ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. И. ПЛОТКИН

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.
П 39
УДК 512.80

2-2-3
99-66

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Глава первая. **Алгебраические системы** 17

§ 1. Алгебры 17

1. Определения (17). 2. Конгруэнции и гомоморфизмы (23).
3. Прямые и подпрямые суммы алгебр (27). 4. Свободные и приведенные свободные алгебры (29). 5. Коммутативные алгебры. Коммутант (32). 6. Квазиэндоморфизмы алгебр. Ω-полугруппы (33).

§ 2. Мультиоператорные группы 37

1. Определения (37). 2. Почти кольца. Мультиоператорные почти кольца (39). 3. Нормальные ряды и системы (43).
4. Абелевость, нильпотентность, разрешимость (45).
5. Прямые разложения. Полная приводимость (46).
6. Радикалы в мультиоператорных группах (52).

§ 3. Модели. Общие алгебраические системы 58

1. Определения (58). 2. Язык узкого исчисления предикатов (63). 3. Прямые произведения моделей. Ультрапроизведения (67). 4. Локальная теорема Гёделя — Мальцева (73). 5. Дальнейшие обобщения (79).

Глава вторая. **Группы автоморфизмов алгебраических систем** 82

§ 1. Представления и связанные с ними пары 82

1. Предварительные замечания (82). 2. Гомоморфизмы пар. Подпары (85). 3. Транзитивные пары (93).
4. Прямые произведения пар и другие конструкции (99).
5. Радикалы, связанные с представлениями (106).

§ 2. Теоремы существования представлений 108

1. Предварительные замечания (108). 2. Теорема Мостовского — Эренфойхта (111). 3. Одна теорема Г. Биркгофа (117). 4. Локальные теоремы о представлениях (118). 5. Разное (123).

§ 3. Соответствия Галуа 126

1. Соответствия Галуа для пар (126). 2. Продолжение представлений. Шкала Бурбаки (128). 3. Еще о соответствиях Галуа (131).

§ 4. Некоторые внешние свойства и радикалы 136

1. Один способ образования внешних свойств (136). 2. Радикалы действующей группы, связанные с отмеченными свойствами (140). 3. Почти периодичность и относительная конечность (143). 4. Относительная нильпотентность и относительная разрешимость (145). 5. Пример (148). 6. Ограниченность и алгебраичность (149).

§ 5. Представления групп и представления Ω-полугрупп 153

1. Представления Ω-полугрупп и обобщенные модули (153). 2. Полугрупповые (групповые) Ω-полугруппы (156). 3. Мультиоператорные почти кольца и представления относительно Ω-групп (160). 4. Еще об ограниченности и алгебраичности (163).

Глава третья. **Группы автоморфизмов мультиоператорных групп** 168

§ 1. Приводимость и неприводимость 168

1. Приводимость (168). 2. Неприводимость (175). 3. Радикал представления (178). 4. Радикал Джекобсона Ω-почти кольца (184). 5. Обобщения (185).

§ 2. Разложимость, полная приводимость, импримитивность 187

1. Исходные замечания. Теорема Машке (187). 2. Теорема Клиффорда (192). 3. Импримитивность и примитивность (194). 4. Группа всех автоморфизмов вполне приводимой Ω-группы (199).

§ 3. Стабильность и относящиеся к ней радикалы 200

1. Финитная стабильность. γ-радикал (200). 2. Одно замечание о локальной ограниченности представления (205). 3. Квазистабильность. β-радикал (207). 4. О нильмножествах в действующей группе (209). 5. Отношения между тремя радикалами (213). 6. Радикалы области действия (216). 7. Общая треугольность (218). 8. Обратимость эндоморфизма Ω-группы (220).

§ 4. Дополнительные замечания об обобщенных модулях 224

1. Аннуляторные свойства (224). 2. Аннуляторные свойства и нильсвойства (229). 3. Радикал Левицкого Ω-почти кольца (233).

§ 5. Группы автоморфизмов прямых сумм Ω-групп 283

1. Общие замечания (235). 2. Треугольные группы автоморфизмов, связанные с прямыми разложениями (237). 3. Обобщенные матрицы (240).

Глава четвертая. **Группы автоморфизмов векторных пространств** 245

§ 1. Линейные представления и линейные пары 245

1. Введение (245). 2. Матрицы и матричные представления (250). 3. Треугольность и стабильность в линейных парах (258). 4. Условия конечности (264).

§ 2. Конечномерные линейные представления 269

1. Вводные замечания (269). 2. Локальная теорема (271). 3. Группы с конечным числом образующих (273). 4. Характеры (281).

§ 3. Некоторые свойства бесконечномерных линейных групп 289

1. Алгебраические элементы и локальная конечномерность (289). 2. Радикалы линейной группы и радикалы ее оболочки (293).

§ 4. Группы автоморфизмов линейных алгебраических систем 300

1. Линейные алгебраические системы (300). 2. Алгебраические линейные группы (301). 3. Регулярные автоморфизмы линейных систем (310). 4. Разное (316).

§ 5. Полная линейная и полная симметрическая группы 320

1. Полная симметрическая группа (320). 2. Полная мономиальная группа (328). 3. Полная линейная группа. Обзор (330).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУПП

Глава пятая. **Некоторые сведения из абстрактной теории групп** 335

§ 1. Групповые пары 335

1. Групповые пары и полупрямые произведения (335). 2. Голоморф (337). 3. Связи с группой внутренних автоморфизмов (341). 4. Два замечания о приводимости в групповых парах (343).

§ 2. Радикалы в группах 345

1. Радикалы и субинвариантность (345). 2. Некоторые конкретные радикалы (349). 3. Радикал Бера и надннльпотентный радикал (353). 4. Минимальные радикальные классы (359). 5. Локально ограниченные группы (360). 6. α-радикал группы. Радикалы, связанные с внутренней парой (362).

§ 3. Радикальные группы и W-группы 363

1. Полупростота. Вполне приводимый радикал (363). 2. Радикальные группы и W-группы (366). 3. Одна теорема об изоморфизмах рядов (369). 4. Нормальные делители, ограничивающие группу (373).

§ 4. Нильэлементы в группах. Примеры 378
1. Локально нильпотентный радикал и нильэлементы (378). 2. Нильгруппы. Обобщенные центральные элементы (387). 3. Примеры (389).

Глава шестая Автоморфизмы групп 402

§ 1. Типы автоморфизмов 402
1. Локально внутренние автоморфизмы (402). 2. Внешние автоморфизмы (404). 3. Нормальные и центральные эндоморфизмы и автоморфизмы (404). 4. Нильавтоморфизмы (407). 5. Регулярные автоморфизмы (407). 6. Разное (411).

§ 2. Совершенные группы. Башня групп автоморфизмов 414
1. Совершенные группы (414). 2. Определение башни (415). 3. Теорема Виландта (418).

§ 3. Группа автоморфизмов голоморфа 422
1. Совершенность голоморфа (422). 2. Группа автоморфизмов голоморфа (426).

§ 4. Другие вопросы 430
1. Еще о квазикольцах, порожденных эндоморфизмами группы (430). 2. Финитная аппроксимируемость группы автоморфизмов (432).

Глава седьмая. Стабильность и нильпотентность . . 435

§ 1. Финитная стабильность и нильпотентность 435
1. Введение (435). 2. Теоремы Калужнина и Ф. Холла (437). 3. Вспомогательные леммы (440). 4. Дополнительные замечания (443).

§ 2. Квазистабильные и внешне локально нильпотентные группы автоморфизмов 445
1. Постановка вопроса (445). 2. Стабильность и радикалы области действия (448). 3. Отношения между внешней локальной нильпотентностью и квазистабильностью действующей группы (452). 4. Примеры (456).

§ 3. Некоторые свойства квазистабильных групп 457
1. Чистые автоморфизмы (457). 2. Почти периодические автоморфизмы (462). 3. Существование центральной системы у квазистабильной группы автоморфизмов (466). 4. Одно уточнение для групп без кручения (469). 5. Примеры (471).

§ 4. Достаточные признаки стабильности 474
1. Коммутант и стабильность (474). 2. Коммутант и квазистабильность (476). 3. Роль центра (478).

§ 5. Радикалы стабильного типа в групповых парах . . . 480
1. Радикалы действующей группы (480). 2. Связи

с α-радикалом (489). 3. Радикалы в области действия (491).

Глава восьмая. **Условия конечности в групповых парах** 494

§ 1. Стабильность и условия конечности 494

1. Ранг группы (494). 2. Конечность ранга области действия (497). 3. Конечность ранга действующей группы (502). 4. Условия обрыва в действующей группе (504). 5. Условие обрыва в области действия (507). 6. Еще об отношениях между α- и β-радикалами (509).

§ 2. Операторный случай 512

1. Общие замечания (512). 2. Второе обобщение теоремы Цасенхауза (515). 3. Еще о треугольности (521).

Глава девятая. **Группы автоморфизмов разрешимых и нильпотентных групп** 524

§ 1. Автоморфизмы абелевых групп 524

1. Введение (524). 2. Периодические группы (524). 3. Группы без кручения. Ссылки (527).

§ 2. Периодические, разрешимые и нильпотентные линейные группы 528

1. Периодические матричные группы (528). 2. Разрешимые группы (535). 3. Нильпотентные матричные группы (540). 4. Обобщения на бесконечномерный случай (545). 5. Существование точных представлений (546).

§ 3. Группы автоморфизмов разрешимых групп 548

1. Исходные замечания (548). 2. Группы автоморфизмов разрешимых A_i-групп (549). 3. Полные группы автоморфизмов (554). 4. Добавление об условиях конечности в группах (556).

§ 4. Автоморфизмы нильпотентных групп 559

1. Существование внешних автоморфизмов (559). 2. Разное (561). 3. Автоморфизмы свободных нильпотентных групп (563).

Добавление 566

Литература 573

Предметный указатель 598

ПРЕДИСЛОВИЕ

Под алгебраической системой, или структурой, в настоящей книге мы понимаем, как это сейчас принято, множество с некоторым набором алгебраических операций и отношений, определенных на этом множестве. В последнее время все более возрастает интерес к различным новым типам алгебраических систем, и теперь уже группы, так же как и кольца, — это только частные представители общего семейства таких систем. Вместе с тем группы все еще продолжают находиться на «особом» положении. Причины здесь ясны. Во-первых, группы пришли в математику раньше других абстрактных алгебраических систем и к настоящему времени достигли наибольшей степени зрелости. Во-вторых, структура группы является одной из составных частей многих важных алгебраических систем, охватываемых, например, общим понятием мультиоператорной группы. И, наконец, что для нас особенно важно, совокупность всех автоморфизмов каждой индивидуальной алгебраической, и вообще математической, структуры есть группа.

Роль автоморфизмов хорошо известна. При изучении всевозможных специальных математических структур алгебраического, геометрического или даже внематематического происхождения встречаются разного рода симметрии, играющие важную роль. Все эти симметрии учитываются и описываются на языке автоморфизмов. Поэтому группа автоморфизмов конкретной математической структуры во многом определяет ситуацию в самой этой структуре. Общеизвестно также, что со времен эрлангенской программы группы автоморфизмов используются и для классификации и систематизации различных математических объектов.

Мы знаем, что почти все прошлое столетие группы воспринимались прежде всего как группы автоморфизмов, и прошло довольно много времени, пока было осознано,

что группу можно рассматривать и абстрактно, независимо от объекта, на котором она действует. При этом в каждой конкретной группе автоморфизмов различают внутренние, абстрактные свойства и внешние свойства, связанные с объектом и действием. Абстрактные свойства важны еще и потому, что они являются инвариантами относительно различных конкретизаций группы — относительно различных изоморфных ее представлений. С появлением понятия абстрактной группы началось систематическое изучение абстрактных свойств групп и абстрактных классов групп. Теперь уже абстрактная теория групп живет очень богатой и интересной внутренней жизнью — за последние десятилетия в ней накопилось большое число идей и результатов, посвящённых особенностям внутреннего строения групп. Многие важные результаты были получены лишь недавно в итоге многолетних поисков. Есть здесь и такие задачи, о решении которых пока приходится только мечтать.

Вместе с тем внутреннее развитие привело и к некоторому отчуждению, все реже в группе видят группу автоморфизмов, теряются многие связи. С другой стороны, при изучении конкретных групп преобразований недостаточно учитывались достижения современной абстрактной теории групп. В настоящее время положение здесь существенно меняется и устанавливаются многочисленные новые связи между абстрактным направлением и теорией групп преобразований. Такое взаимодействие теории групп с внешним миром представляет несомненный интерес не только для разделов математики, использующих группы как группы автоморфизмов, но и для самой теории групп. Достаточно, например, вспомнить, что многие тонкие факты абстрактной теории групп были получены внешними средствами, и роль этих внешних методов все более растет.

Теперь мы можем сказать, что все эти связи, взаимодействия и были руководящей исходной идеей настоящей книги. Ведь известно, что связи и взаимодействия — одна из самых замечательных сторон каждой науки. Однако совершенно очевидно, что одной книгой исчерпать возникающую здесь тему невозможно, и мы ограничиваем себя определенным кругом вопросов. Сейчас мы

приблизительно очертим проблематику, которой посвящена книга.

Прежде всего заметим, что нашей первоначальной целью было рассмотрение групп автоморфизмов групп и, в меньшей степени, автоморфизмов векторных пространств -- линейных групп. Предполагалось, что основное внимание будет уделено абстрактным свойствам и применениям к абстрактным группам. Отправными пунктами для нас были важные исследования А. И. Мальцева, Р. Бера и Ф. Холла, хорошо известная теперь и очень простая теорема Калужнина, содержащая внешний признак нильпотентности группы автоморфизмов, исследования, связанные с изучением абстрактных свойств линейных групп и применениями линейных групп в абстрактной теории групп, а также работы, посвященные абстрактным свойствам группы с точки зрения существования у нее тех или иных симметрий — автоморфизмов.

С другой стороны, учитывая, что группы автоморфизмов групп имеют много общего с линейными группами и с теорией линейных представлений, мы сочли полезным рассмотреть эти параллельные факты с единой точки зрения. Так возникла новая идея —начинать книгу с общих представлений и всего, что к ним относится. При этом слово «общих» имеет тот смысл, что рассматриваются представления групп автоморфизмами произвольных алгебраических систем, а не только векторных пространств, как это делается в классической теории представлений. Вскоре, однако, выяснилось, что такому началу придется посвятить около половины книги, и это, собственно, послужило основанием назвать книгу так, как она сейчас названа. Автор старался, в частности, проследить, что́ из классической теории представлений переносится на более общие случаи. Такие рассмотрения интересны не только сами по себе — этот общий подход позволяет иногда по-новому взглянуть и на давно известные вещи, объединяет различные специальные конструкции, и часто отсюда можно разглядеть разные новые связи. При этом, конечно, работая с общими конструкциями, мы не должны забывать об их происхождении и различных конкретных проявлениях.

В результате книга разделилась на две части. В первой части собраны различные предложения, относящиеся к группам автоморфизмов общих алгебраических систем. Если заданы некоторая алгебраическая система G и группа Γ, а затем еще представление группы Γ автоморфизмами системы G (гомоморфизм группы Γ в группу всех автоморфизмов системы G), то Γ сама становится группой автоморфизмов, у нее появляются внешние свойства. Одновременно мы приходим к понятию пары (G, Γ), состоящей из G и Γ, причем предполагается, что фиксировано представление группы Γ автоморфизмами системы G. Такое представление определяет действие группы Γ в G, т. е. некоторое специальное отображение декартова произведения $G\times\Gamma$ в G. Общая теория групп автоморфизмов — это, по существу, теория таких пар. Для пар определяются обычные алгебраические понятия (подпары, гомоморфизмы и изоморфизмы, фактор-пары, прямые произведения и т. д.), и теория пар развивается естественными для алгебры путями. В частности, благодаря понятию изоморфизма пар можно говорить об абстрактных свойствах пар.

Таким образом, мы имеем три категории абстрактных свойств: абстрактные свойства G и Γ и, с другой стороны, абстрактные свойства пары — взаимные свойства G и Γ, свойства самого действия. Эти три типа свойств тесно связаны между собой. Уже теория Галуа демонстрирует, насколько глубокими могут быть эти связи. Подобные связи можно проследить и в различных других случаях. Особое внимание в первой части уделяется тому случаю, когда область действия G является мультиоператорной группой. Введенные недавно Хиггинсом мультиоператорные группы оказались здесь весьма удобным объектом для обобщений.

Всю первую часть можно рассматривать как введение в теорию групп автоморфизмов алгебраических систем. Введение — хотя бы потому, что наиболее содержательные теории (но не теоремы!) предполагают достаточную степень конкретизации. Из глубоких теорем первой части, относящихся к общей ситуации, отметим, например, теорему Мостовского — Эренфойхта. В первой части имеется также глава, посвященная группам авто-

морфизмов векторных пространств — линейным группам. Эта глава, с одной стороны, дополняет предыдущие, а с другой, — служит введением в общую теорию линейных групп.

Вторая часть посвящена группам автоморфизмов групп. Изучение групп автоморфизмов групп представляет, как известно, большой интерес с точки зрения абстрактной теории групп. Соответствующие пары называются здесь групповыми парами. Особую роль при этом играют групповые пары, в которых одна группа — левая — является нормальным делителем другой, а представление определяется переходом к внутренним автоморфизмам. Легко видеть, что отношения между группой и ее нормальными делителями удобно изучать на языке таких групповых пар, причем точка зрения групповых пар помогает часто лучше понять и ряд известных теоретико-групповых фактов. Во второй части имеется также один параграф, посвященный абстрактным свойствам линейных групп.

Кроме того, в первой и второй частях имеются некоторые замечания обзорного характера, относящиеся к другим конкретным случаям. Мы не будем более подробно говорить о содержании и сошлемся еще на приведенное выше оглавление.

Из этого оглавления видно, что книга далеко не исчерпывает даже тему, объявленную в ее названии. Ведь эта тема включает и теорию Галуа со всеми ее обобщениями, и все, что относится к группам подстановок и линейным группам. Теории Галуа в книге нет, хотя из этой теории, из рассмотрения автоморфизмов полей и берет начало современная теория групп автоморфизмов. Линейным группам и группам подстановок отведена лишь небольшая часть. Уже давно назрела необходимость в отдельной обстоятельной книге по теории линейных групп и групп подстановок.

Отметим еще, что в книге не рассматриваются связи с топологией. Хотя такие связи особенно существенны для групп автоморфизмов и привлечение топологии часто оказывается полезным даже в чисто алгебраических вопросах, топологические факты здесь сводятся к нескольким незначительным замечаниям.

Более того, книга не является достаточно полной и в отношении групп автоморфизмов групп. С сожалением мы отмечам, что в книге почти нет описания групп автоморфизмов конкретных систем. Относящиеся сюда результаты часто очень изящны, однако такое описание невозможно в отрыве от детального рассмотрения соответствующих объектов.

По аналогичным причинам мало внимания уделено изучению алгебраических систем с позиций их групп автоморфизмов. Мы должны отчетливо подчеркнуть, что центр тяжести в этой книге смещен в сторону самой группы автоморфизмов и наша главная цель — это рассмотрение того, как абстрактная группа работает в качестве группы автоморфизмов, и близких к этому вопросов, объединяемых отмеченными общими идеями и, вероятно, вкусами автора. Лишь в незначительной степени этот недочет восполняется списком литературы. Попутно заметим, что было бы очень полезно иметь книгу учебного характера, посвященную некоторым конкретным внешним связям теории групп и написанную, скажем, в духе известной статьи А. И. Мальцева [14].

Большинство из излагаемых в настоящей книге результатов содержится лишь в журнальных статьях, и сводного изложения их еще не было. В основном, это результаты сравнительно последнего времени, полученные многими авторами, в том числе и автором данной книги. Имеются здесь и некоторые результаты, ранее не публиковавшиеся.

Предназначена книга для читателей, интересующихся современной алгеброй и ее приложениями и знакомых с основами теории групп. В ряде случаев используются также некоторые хорошо известные сведения о нильпотентных и разрешимых группах. Весь этот теоретико-групповой материал имеется, конечно, во втором издании книги А. Г. Куроша «Теория групп», владение которой, особенно для второй части, весьма желательно.

Первая часть более независима. В начале книги, во вводной первой главе, собраны все нужные нам сведения об общих алгебраических системах, в частности, об универсальных алгебрах, мультиоператорных группах и моделях. Как известно, основы теории универсальных

алгебр и групп с мультиоператорами содержатся в другой книге А. Г. Куроша — «Лекции по общей алгебре». Однако, имея в виду полноту изложения, мы напоминаем здесь и некоторые факты, вошедшие в эту книгу. Все эти повторения заняли небольшую часть первой главы.

Подчеркнем далее, что понятие модели используется в книге не только для обобщений — в ряде случаев существенно используется локальная теорема из теории моделей. Эта важная теорема (Гёделя — Мальцева) находит сейчас многочисленные приложения в алгебре и, в частности, в теории групп автоморфизмов.

В разных частях книги формулируются некоторые проблемы. Среди них имеются и нерешенные вполне конкретные задачи, иногда, как нам кажется, достаточно привлекательные. Отмечаются и проблемы, связанные с разработкой некоторых новых направлений. Некоторые из этих проблем являются новыми.

В списке литературы содержатся не только используемые работы, но и другие источники, связанные с данной темой. Порядок ссылок на этот список обычный. В ссылках на предложения, параграфы и пункты из настоящей книги первая цифра обозначает главу, вторая — параграф, третья — пункт и четвертая — номер предложения из данного пункта. Если ссылка делается в пределах главы, то номер главы не указывается, аналогично и для параграфов.

Отдельные главы этой книги докладывались мною в свердловском, московском, новосибирском и рижском алгебраических семинарах.

Я особенно признателен академику А. И. Мальцеву, оказавшему большое влияние на меня своими трудами и сделавшему по этой книге ряд ценных указаний. За многочисленные полезные советы я благодарен также своему учителю проф. П. Г. Конторовичу и проф. А. Г. Курошу. Считаю своим приятным долгом выразить благодарность за большую помощь при подготовке рукописи к печати В. Г. Житомирскому, Л. А. Симоняну и А. И. Токаренко. Много полезных замечаний сделал редактор книги Г. В. Дорофеев.

Автор

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. АЛГЕБРЫ

1. Определения. Как уже отмечалось в предисловии, в последнее время возрастает число различных конкретных типов алгебраических систем. Некоторые из них зарождаются в самой алгебре, а некоторые возникают из других разделов математики, в частности, в связи с нуждами геометрии или математической логики; нередко новые алгебраические системы приходят из физики, кибернетики, техники. В теориях этих систем имеется много параллельных фактов и конструкций, и поэтому целесообразно рассматривать общие алгебраические системы (структуры), охватывающие все эти специальные разновидности. Такие общие алгебраические системы рассматриваются с тридцатых годов, а в последнее десятилетие интерес к ним особенно возрос.

Мы начнем с определения (универсальной) алгебры.

Пусть G — некоторое множество. Всякая функция n переменных, определенная на этом множестве, значения которой также принадлежат G, называется *n-арной алгебраической операцией*, определенной на G. Если ω — n-арная алгебраическая операция на множестве G и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторое (упорядоченное) семейство из элементов этого множества, то результат применения операции ω к указанной системе элементов будет обозначаться через $a_1a_2 \ldots a_n\omega$.

Множество G вместе с некоторым набором Ω алгебраических операций, определенных на этом множестве, называется *алгеброй* (или еще *универсальной алгеброй*). Иногда такую алгебру мы будем также называть Ω-алгеброй и в отдельных случаях будем для нее употреблять обозначение $\langle G, \Omega\rangle$. Так мы будем поступать

в тех случаях, когда возникает потребность особо подчеркнуть систему операций Ω. Само множество G называется *основным множеством алгебры*, а операции из Ω называются *основными операциями*.

Среди этих основных операций алгебры могут быть и *нульарные* операции — константы. Вводить нульарные операции удобно в тех случаях, когда нужно выделить в алгебре некоторые особые элементы. Так, например, группа — это алгебра с тремя основными операциями: бинарной операцией умножения, унарной операцией, сопоставляющей каждому элементу обратный элемент, и нульарной операцией, выделяющей единицу группы.

Хотя различные конкретные типы алгебр обязаны своим происхождением не общему понятию алгебры, естественна потребность хорошо видеть место этих конкретных систем в объединенной семье универсальных алгебр. Существуют различные приемы выделения конкретных типов — классов алгебр. Все эти приемы основаны на том, что на основные операции накладываются те или иные дополнительные ограничения. Часто такие ограничения носят характер тождественных соотношений. Так, например, группы, кольца, а также некоторые другие важнейшие классы алгебр могут быть выделены на языке тождественных соотношений.

Если G — Ω-алгебра и H — непустое подмножество в G, замкнутое относительно всех операций из Ω, то H относительно системы операций Ω образует подалгебру в G. Всякое непустое пересечение любого множества подалгебр алгебры является также подалгеброй, и, следовательно, можно говорить о подалгебре, порожденной произвольным подмножеством алгебры. Если X — подмножество алгебры G, то подалгебра, порожденная этим подмножеством, обозначается через $\{X\}$ или еще через $\{X\}^{\Omega}$. Подмножество X называется *системой образующих* подалгебры $\{X\}$.

Обозначим дальше через $\tilde{\Omega}$ совокупность всех «сложных» операций, порождаемых операциями из Ω. Очевидно следующее утверждение. Если H — подалгебра в G, порожденная подмножеством X, то элементы из H — это всевозможные элементы из X и элементы вида: $x_1x_2\ldots x_n\omega$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и ω — операция из $\tilde{\Omega}$ соответствующей «арности».

Обычным путем определяется композит системы подалгебр алгебры. Ясно, что относительно операций пересечения и взятия композита система всех подалгебр заданной алгебры (дополненная пустой «подалгеброй», если некоторые подалгебры могут иметь пустое пересечение) образует полную решетку (структуру). Эту решетку обозначим через $\mathscr{L}(G)$.

Аналогично тому, как это делается в теории групп, определяется понятие *локальной системы подалгебр*. Система $[G_\alpha]$ подалгебр алгебры G называется локальной системой, если а) теоретико-множественная сумма всех G_α совпадает с G и б) любые два члена этой системы содержатся в некотором третьем члене этой же системы. Непосредственно видно, что если алгебра G порождается подмножеством X, то система всех подалгебр, порождаемых конечными подмножествами из X, является локальной системой в G, так что, в частности, для любого элемента $g \in G$ найдется такое конечное подмножество $X' \subset X$, что $g \in \{X'\}$. Это, впрочем, следует и непосредственно из приведенного выше замечания о представимости элементов алгебры через образующие элементы.

Из определения локальной системы подалгебр непосредственно следует также, что каждое конечное множество элементов алгебры принадлежит некоторому члену локальной системы. Указанное свойство часто принимают в качестве определения локальной системы. Отметим в связи с этим, что, хотя в дальнейшем мы будем исходить из приведенного выше определения, многие результаты, связанные с локальными системами, оказываются справедливыми и при указанном более слабом предположении.

Алгебра G называется *нетеровой*, если решетка всех ее подалгебр удовлетворяет условию максимальности. Легко видеть, что это условие равносильно требованию, чтобы сама алгебра и все ее подалгебры имели конечные системы образующих. Алгебра, обладающая локальной системой из нетеровых подалгебр, называется *локально нетеровой* алгеброй. В дальнейшем нам довольно часто придется предполагать, что рассматриваемая алгебра является локально нетеровой. Простейшим и важным

примером локально нетеровой алгебры служит векторное пространство над некоторым телом *).

Определим теперь понятия гомоморфизма, изоморфизма и, соответственно, эндоморфизма и автоморфизма алгебры.

Пусть G и G' — две однотипные алгебры, т. е. такие две алгебры, что можно считать, что совокупность основных операций Ω у обеих алгебр одна и та же. Пусть, далее, φ — однозначное отображение множества G на множество G', причем условимся образ элемента $g \in G$ при отображении φ обозначать через $g\varphi$ (или иногда через g^{φ}). Будем говорить, что отображение φ сохраняет n-арную операцию ω, если имеет место следующая перестановочность: $(a_1 a_2 \ldots a_n \omega)\varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi)\ldots(a_n\varphi)\omega$ для любых наборов элементов $a_i \in G$. Перестановочность φ с нульарными операциями означает, что все выделенные элементы из G переводятся в соответствующие выделенные элементы в G'. φ называется *гомоморфизмом* алгебры G, если это отображение сохраняет все основные операции алгебры. Если при этом φ — взаимно однозначное отображение, то нетрудно заметить, что и обратное отображение φ^{-1} также является гомоморфизмом, и в таком случае φ называется *изоморфизмом* алгебр G и G'. Алгебры G и G' называются *изоморфными*, если существует некоторый изоморфизм между ними. Заметим здесь, что можно также говорить о гомоморфном отображении одной алгебры в другую, т. е. на подалгебру другой алгебры. В тех случаях, когда нужно специально подчеркнуть, что речь идет о гомоморфизме на всю алгебру, употребляют еще термин *эпиморфизм*.

Понятие изоморфизма алгебр позволяет говорить об *абстрактных* свойствах алгебр: свойство алгебры называется абстрактным, если из того, что этим свойством обладает алгебра G, следует, что и всякая изоморфная с G алгебра обладает этим же свойством. Соответственно

*) В этой алгебре элементы основного тела рассматриваются как самостоятельные операции — операторы. Понятно, что все содержание векторных пространств при таком подходе не может быть охвачено. Векторные пространства следует вообще рассматривать как двуосновные алгебраические системы (ср. п. 1.3.5).

класс алгебр $\mathfrak{K}$ называется *абстрактным классом*, если вместе с каждой своей алгеброй G класс $\mathfrak{K}$ содержит и все изоморфные с G алгебры.

Напомним далее, что *преобразованием* множества G называется отображение этого множества в себя, а *подстановкой* — взаимно однозначное отображение на себя. Преобразование основного множества алгебры G, являющееся гомоморфизмом, называется *эндоморфизмом* этой алгебры. *Автоморфизм* алгебры — это подстановка основного множества, являющаяся также изоморфизмом.

Совокупность всех преобразований произвольного множества G естественным образом обращается в полугруппу (умножением служит последовательное выполнение преобразований). Относительно такого умножения совокупность всех подстановок множества G образует группу. Эта группа называется *полной симметрической группой* множества G и обозначается через S_G.

Непосредственно видно, что если G — алгебра, то совокупность всех эндоморфизмов этой алгебры является подполугруппой в полугруппе всех преобразований множества G, а совокупность всех автоморфизмов алгебры G есть подгруппа в группе всех подстановок множества G. Полугруппу всех эндоморфизмов алгебры G обозначим через $\mathfrak{E}(G)$, а группу всех автоморфизмов этой алгебры будем обозначать через $\mathfrak{A}(G)$ или еще — $\mathrm{Aut}(G)$.

Так, например, если G — векторное пространство, рассматриваемое как универсальная алгебра в том смысле, как это раньше отмечалось, то эндоморфизмы G — это линейные операторы, а автоморфизмы — обратимые линейные операторы. Если G — группа или полугруппа, или кольцо, то примерами автоморфизмов здесь служат внутренние автоморфизмы. Интересные примеры автоморфизмов доставляет теория полей. При этом по поводу полей и тел нужно еще заметить, что они выделяются в классе колец добавлением еще одной унарной операции, сопоставляющей каждому ненулевому элементу его обратный. Эта операция является частичной операцией, и поэтому о полях и телах можно только с соответствующей оговоркой говорить как об универсальных алгебрах.

Различные конкретные примеры автоморфизмов и групп автоморфизмов можно найти в книге А. Г. Куроша

«Лекции по общей алгебре» и в другой учебной алгебраической литературе. Мы рекомендуем читателю запастись достаточным числом таких примеров, в том числе и для систем с отношениями (ср. § 3), с тем чтобы иметь твердую почву для общих построений.

Подалгебра H называется *характеристической*, если для любых $h \in H$ и $\sigma \in \mathfrak{A}(G)$ выполняется $h\sigma \in H$. Если же для каждого $h \in H$ и при любом $\varphi \in \mathfrak{E}(G)$ имеет место $h\varphi \in H$, то такая подалгебра H называется *вполне характеристической*. Все характеристические подалгебры заданной алгебры G образуют подрешетку в решетке всех подалгебр из G. Эту подрешетку обозначим через $\mathfrak{X}(G)$. Подрешетку составляют и все вполне характеристические подалгебры из G. Решетка $\mathfrak{X}(G)$ в известном смысле характеризует степень однородности алгебры G: алгебра G называется *однородной*, если $\mathfrak{X}(G)$ состоит только из самой алгебры G или, быть может, еще из подалгебры $0(G)$, порожденной всеми выделенными (по-другому, нулевыми) элементами, если такие имеются. Ясно, что $0(G)$ — всегда характеристическая подалгебра.

Часто под однородностью алгебры понимают также требование, чтобы группа всех ее автоморфизмов действовала транзитивно на множестве всех ненулевых элементов алгебры. Такая однородность — довольно редкое явление (см., например, работу А. И. Кострикина [1], основной результат которой будет также сформулирован в п. 4.4.4).

Среди характеристических подалгебр алгебры особо выделяются еще *сильно характеристические* подалгебры. Подалгебра H алгебры G называется *сильно характеристической*, если H является неподвижным элементом — инвариантом относительно группы всех автоморфизмов решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подалгебр из G. Всякая сильно характеристическая подалгебра является характеристической, но обратное, вообще говоря, неверно.

Группу всех автоморфизмов решетки $\mathcal{L}(G)$ — $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(G))$ — мы обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}}(G)$. Каждый автоморфизм σ алгебры G индуцирует некоторый элемент из $\tilde{\mathfrak{A}}(G)$, который обозначим через $\tilde{\sigma}$. Отображение $\sigma \to \tilde{\sigma}$ является гомоморфизмом, и ядро этого гомоморфизма состоит из таких автоморфизмов алгебры G, которые оставляют неподвижной каждую подалгебру из G.

2. Конгруэнции и гомоморфизмы. В приводимой ниже теореме о гомоморфизмах основную роль играет понятие конгруэнции алгебры. Как известно, *эквивалентностью* на множестве G называется всякое бинарное отношение на G, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Каждая эквивалентность ρ определяет разбиение множества G на непересекающиеся *смежные классы* X_α (два элемента a, b из G эквивалентны, если оба они принадлежат одному смежному классу X_α). Тот факт, что a и b эквивалентны, обозначается через $a\rho b$. Каждый смежный класс X_α однозначно определяется любым своим представителем: если x — элемент из X_α, то будем писать $X_\alpha=[x]$ (или еще $=[x]_\rho$).

Если, далее, смежные классы эквивалентности ρ рассматривать как элементы нового множества, то это новое множество называется *фактор-множеством* множества G по эквивалентности ρ и обозначается это фактор-множество через G/ρ.

Пусть ω — n-арная операция на множестве G. Эквивалентность ρ называется конгруэнцией относительно этой операции, если для любых a_i, $a'_i \in G$, $i=1, 2, \ldots, n$, из того, что при каждом i имеет место $a_i\rho a'_i$, следует, что $(a_1a_2 \ldots a_n\omega)\,\rho\,(a'_1a'_2 \ldots a'_n\omega)$. В случае, когда G — Ω-алгебра, эквивалентность ρ основного множества G называется *конгруэнцией* алгебры G, если ρ является конгруэнцией относительно каждой операции из Ω.

Каждой конгруэнции алгебры G отвечает естественный гомоморфизм этой алгебры. Пусть ρ — некоторая конгруэнция на G и пусть G/ρ — соответствующее фактор-множество. Допустим еще, что ω — n-арная операция из Ω и $[a_1], [a_2], \ldots, [a_n]$ — семейство из n элементов множества G/ρ.

Полагая

$$[a_1]\,[a_2] \ldots [a_n]\,\omega=[a_1a_2 \ldots a_n\omega],$$

мы определим ω как операцию на G/ρ. Смысл понятия конгруэнции, очевидно, в том и состоит, что так определенная операция не зависит от выбора представителей смежных классов. Теперь ясно, что все операции системы Ω автоматически переносятся на множество смеж-

ных классов, и это множество становится Ω-алгеброй. Алгебра G/ρ называется *фактор-алгеброй* алгебры G по конгруэнции ρ. Сопоставляя здесь каждому $x \in G$ смежный класс $[x]$, мы получим естественный гомоморфизм алгебры G на фактор-алгебру G/ρ. Обозначим этот гомоморфизм через φ_ρ.

Пусть дальше μ: $G \to G'$ — гомоморфизм алгебры G на некоторую алгебру G'. Будем писать $x\rho y$, x, $y \in G$, если $x\mu = y\mu$. Легко проверить, что ρ — конгруэнция алгебры G. Сопоставим каждому смежному классу $[x]$ этой конгруэнции элемент $x\mu \in G'$, и это отображение обозначим через ψ. Непосредственная проверка показывает, что ψ — изоморфизм алгебр G/ρ и G', причем имеет место соотношение: $\varphi_\rho\psi = \mu$. Все сказанное сейчас и составляет содержание теоремы о гомоморфизмах алгебр. Эта теорема показывает, что гомоморфизмы алгебр находятся во взаимно однозначном соответствии с их конгруэнциями.

Для конгруэнций алгебры естественно вводятся операции решетки. Напомним вначале определение *пересечения* эквивалентностей. Пусть $\rho_\alpha = [X_\beta^\alpha]$ — набор эквивалентностей алгебры G. Пересечением всех эквивалентностей этого набора называется эквивалентность ρ, определяемая следующим образом: если $x \in G$, то через $[x]_\rho$ обозначим пересечение всех X_β^α (по всем α), содержащих x. Совокупность всех $[x]_\rho$ действительно определяет эквивалентность. Легко видеть, что пересечение любого набора конгруэнций алгебры также является конгруэнцией.

Если, далее, ρ_α, $\alpha \in I$, — снова некоторый набор конгруэнций в G, то *композитом* этого набора естественно назвать пересечение всех конгруэнций алгебры G, содержащих все ρ_α. При этом конгруэнция ρ_α принадлежит конгруэнции ρ ($\rho_\alpha \subset \rho$), если $x\rho_\alpha y$ всегда влечет $x\rho y$. К определению композита возможен и более конструктивный подход, основанный на операции произведения бинарных отношений.

Хорошо известно, что если ρ_1 и ρ_2 — бинарные отношения на множестве G, то их произведением $\rho_1\rho_2$ называется бинарное отношение, определяемое правилом: $x\rho_1\rho_2 y$ в том и только в том случае, когда при некото-

ром z выполняется $x\rho_1 z$ и $z\rho_2 y$. При этом отношения ρ_1 и ρ_2 называются перестановочными, если $\rho_1\rho_2=\rho_2\rho_1$.

Пусть теперь ρ_α, $\alpha\in I$, — некоторый набор бинарных отношений. *Композитом* всех этих отношений называется отношение ρ, определяемое следующим правилом: $x\rho y$ означает, что найдутся такие $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in I$ и $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_{n-1}\in G$, что $x\rho_{\alpha_1}z_1$, $z_1\rho_{\alpha_2}z_2$, $\ldots$, $z_{n-1}\rho_{\alpha_n}y$.

Легко проверяется, что композит эквивалентностей также является эквивалентностью, а композит конгруэнций в этом новом смысле есть конгруэнция, совпадающая с ранее определенным композитом конгруэнций. Если конгруэнции ρ_1 и ρ_2 перестановочны, то их композит совпадает с произведением $\rho_1\rho_2$. Относительно введенных сейчас операций пересечения и композита все конгруэнции алгебры G образуют полную решетку. Обозначим эту решетку через $\mathscr{L}'(G)$. В книге Г. Биркгофа [3] показывается, что если все конгруэнции алгебры G попарно перестановочны, то решетка $\mathscr{L}'(G)$ является модулярной (дедекиндовой).

Пусть теперь ρ — конгруэнция алгебры G и μ — гомоморфизм этой алгебры на алгебру G^μ. Если $[x]$, $x\in G$, — смежные классы конгруэнции ρ, то их образы в G^μ — $[x]^\mu$ — покрывают, но не обязательно расщепляют G^μ, т. е. эти $[x]^\mu$ могут не составлять эквивалентность в G^μ. В том хорошем случае, когда все эти $[x]^\mu$ образуют эквивалентность в G^μ, мы скажем, что конгруэнция ρ и гомоморфизм μ согласованы. Если такое согласование имеет место, то соответствующую эквивалентность мы обозначим через ρ^μ. Легко видеть, что ρ^μ здесь автоматически оказывается конгруэнцией алгебры G^μ.

Понятно, что для групп, а следовательно и для Ω-групп (см. следующий параграф), специальные оговорки о согласованности оказываются излишними, но уже для полугрупп они нужны. Кроме того, нетрудно проверить, что в том случае, когда конгруэнция гомоморфизма μ принадлежит конгруэнции ρ, нужная согласованность имеет место.

В общем случае, когда ρ и μ не обязательно согласованы, мы поступим следующим образом. Если π — конгруэнция гомоморфизма μ и $\{\rho, \pi\}$ — композит ρ и π, то ясно, что $\{\rho, \pi\}$ и μ согласованы. Теперь обозначим

$\rho^\mu = \{\rho, \pi\}^\mu$. Покажем, что если ρ и μ согласованы, то это новое ρ^μ совпадает с определенным ранее. Достаточно установить, что при наличии согласованности из $x^\mu \{\rho, \pi\}^\mu y^\mu$ следует $x^\mu \rho^\mu y^\mu$. Пусть $x^\mu \{\rho, \pi\}^\mu y^\mu$. Тогда $x \{\rho, \pi\} y$. Последнее означает, что найдутся некоторые $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такие, что

$$x \sim z_1, \; z_1 \sim z_2, \; \ldots, \; z_{n-1} \sim z_n, \; z_n \sim y,$$

где каждая из участвующих эквивалентностей есть либо ρ, либо π. Если теперь перейти к образам всех этих элементов в G^μ, то в тех местах, где входит эквивалентность ρ, ее следует заменить на ρ^μ, а там, где π — получится равенство. Таким образом, везде можно перейти к эквивалентности ρ^μ, и, следовательно, получим $x^\mu \rho^\mu y^\mu$.

Итак, если G — алгебра и ρ — некоторая ее конгруэнция, то каждому эпиморфизму $\mu : G \to G^\mu$ отвечает конгруэнция ρ^μ алгебры G^μ.

Если, далее, A — подалгебра в G, то через $A \cap \rho$ обозначим эквивалентность в A, смежными классами которой служат пересечения с A смежных классов конгруэнции ρ. Легко видеть, что $A \cap \rho$ есть конгруэнция в A, причем фактор-алгебра $A / A \cap \rho$ изоморфна некоторой подалгебре из G/ρ.

Нам понадобится следующее определение. Если μ — эндоморфизм алгебры G и ρ — ее конгруэнция, то эту конгруэнцию назовем инвариантной относительно μ, если $x \rho y$ всегда влечет $x^\mu \rho y^\mu$. Такое определение инвариантности равносильно следующему: каждый смежный класс эквивалентности ρ^μ принадлежит некоторому смежному классу эквивалентности ρ. Действительно, пусть конгруэнция ρ инвариантна относительно эндоморфизма μ, π — конгруэнция эндоморфизма μ и пусть X — некоторый смежный класс конгруэнции $\{\rho, \pi\}$. Нужно показать, что если x и y — два элемента в X, то $x^\mu \rho y^\mu$. Тот факт, что x и y принадлежат одному смежному классу X, означает, что имеются такие $z_1, z_2, \ldots, z_n$, для которых

$$x \sim z_1, \; z_1 \sim z_2, \; \ldots, \; z_{n-1} \sim z_n, \; z_n \sim y,$$

где, как и раньше, каждая из эквивалентностей — это ρ или π. Переходя теперь к образам при отображении μ

и используя инвариантность конгруэнции ρ, получим:

$$x^{\mu}\rho z_1^{\mu},\ z_1^{\mu}\rho z_2^{\mu},\ \ldots,\ z_{n-1}^{\mu}\rho z_n^{\mu},\ z_n^{\mu}\rho y^{\mu}.$$

Таким образом, имеем $x^{\mu}\rho y^{\mu}$. Обратное очевидно.

Нетрудно понять, что в том случае, когда σ — автоморфизм алгебры G, инвариантность ρ относительно σ и σ^{-1} равносильна совпадению ρ и ρ^{σ}.

Конгруэнция ρ называется *характеристической*, если она инвариантна относительно всех автоморфизмов алгебры G, и *вполне характеристической*, если имеет место инвариантность относительно всех эндоморфизмов.

Тривиальными конгруэнциями называются нулевая конгруэнция — разбиение множества G на отдельные элементы — и единичная конгруэнция, состоящая из одного смежного класса, совпадающего с G. Алгебра G называется *простой*, если у нее нет нетривиальных конгруэнций, и *характеристически простой*, если у нее нет нетривиальных характеристических конгруэнций. Легко понять, что для групп характеристическая простота и однородность — равносильные понятия.

Как мы знаем, всякий автоморфизм σ алгебры G переводит каждую конгруэнцию ρ этой алгебры в некоторую другую конгруэнцию ρ^{σ}. Следовательно, σ индуцирует некоторую подстановку $\bar{\sigma}$ на множестве $\mathscr{L}'(G)$. Легко видеть, что на самом деле отображение $\sigma \to \bar{\sigma}$ есть гомоморфизм группы $\mathfrak{A}(G)$ в группу всех автоморфизмов решетки $\mathscr{L}'(G)$. Ядром этого гомоморфизма служит совокупность всех таких автоморфизмов алгебры G, которые оставляют неподвижной каждую конгруэнцию. (По этому поводу см. также работу Ф. Дуингера [1].)

3. Прямые и подпрямые суммы алгебр. Пусть $[G_\alpha]$ — некоторый набор однотипных Ω-алгебр с индексами α, принадлежащими множеству I. Обозначим через G множество, элементами которого являются всевозможные функции, сопоставляющие каждому $\alpha \in I$ определенный элемент a_α из G_α. Такие функции будем обозначать $a = (a_\alpha)$. Элемент a_α называется компонентой элемента a в G_α.

Операции системы Ω следующим образом распространяются на множество G. Пусть ω — n-арная операция из Ω и пусть $a^{(k)} = (a_\alpha^k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — n элементов

из G. Тогда полагаем:

$$a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(n)}\omega = (a_\alpha^1 a_\alpha^2 \ldots a_\alpha^n \omega).$$

Так определенная Ω-алгебра G называется *полной прямой суммой* алгебр G_α.

Если все G_α обладают одноэлементными подалгебрами, то можно говорить и о *дискретной прямой сумме* всех этих G_α. Дискретная прямая сумма алгебр G_α, $\alpha \in I$, — это подалгебра в их полной прямой сумме, состоящая из последовательностей (a_α), в которых лишь конечное число компонент не принадлежит соответствующим одноэлементным подалгебрам.

Важную роль играет восходящее к Ремаку понятие подпрямой суммы алгебр. Подалгебра $\mathfrak{G}$ полной прямой суммы алгебр G_α называется *подпрямой суммой* этих алгебр, если при каждом $\alpha \in I$ компоненты элементов из $\mathfrak{G}$ с индексом α исчерпывают всю алгебру G_α. Если алгебра $\mathfrak{G}$ является подпрямой суммой алгебр G_α, то, сопоставляя каждому $a \in \mathfrak{G}$ его компоненту a_α, мы получим гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на G_α. Этому гомоморфизму отвечает конгруэнция ρ_α. Легко понять, что пересечение всех таких ρ_α, $\alpha \in I$, есть нулевая конгруэнция в $\mathfrak{G}$. Имеет место и следующее обратное утверждение:

3.1. *Если в алгебре $\mathfrak{G}$ задана система конгруэнций ρ_α с пересечением ρ, то фактор-алгебра $\mathfrak{G}/\rho$ изоморфна подпрямой сумме фактор-алгебр $\mathfrak{G}/\rho_\alpha$.*

Действительно, пусть G — полная прямая сумма алгебр $\mathfrak{G}/\rho_\alpha$. Сопоставим элементу $a \in \mathfrak{G}$ элемент $\bar{a} \in G$ такой, что его компонента $\bar{a}_\alpha$ в $\mathfrak{G}/\rho_\alpha$ есть смежный класс конгруэнции ρ_α, содержащий a. Легко видеть, что такое отображение является гомоморфизмом $\mathfrak{G}$ в G. Конгруэнцией этого гомоморфизма служит пересечение всех ρ_α, т. е. ρ. Очевидно также, что компоненты с индексом α элементов из $\mathfrak{G}/\rho$ полностью исчерпывают алгебру $\mathfrak{G}/\rho_\alpha$.

Параллельно этой теореме в ряде работ приводятся условия, при которых для заданной системы конгруэнций ρ_α алгебры G эта алгебра изоморфна полной (дискретной) прямой сумме фактор-алгебр G/ρ_α.

Отметим еще, что, так же как, например, для колец (см. Н. Джекобсон [4]), в полной прямой сумме естественно определяется топология, играющая важную роль.

4. Свободные и приведенные свободные алгебры. Пусть X — некоторое множество и Ω — набор алгебраических операций. Точнее говоря, здесь речь идет о *символах операций*, так как эти операции пока нигде не определены. Индуктивно определяется понятие слова. Словом считается каждый элемент из X и каждый символ нульарной операции. Если, далее, выражения $w_1, w_2, \ldots, w_n$ уже определены как слова и ω — символ n-арной операции из Ω, $n \geqslant 1$, то формальное выражение $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$ также считается словом. Этим определена совокупность слов, которую обозначим через

$$G = G(\Omega, \ X).$$

Множество G следующим образом можно рассматривать как алгебру относительно системы операций Ω. Каждая нульарная операция из Ω выделяет символ соответствующей нульарной операции. Если ω — n-арная операция из Ω с $n \geqslant 1$, то для любых n слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ слово $w_1 w_2 \ldots w_n \omega$ есть результат применения к указанным словам операции ω. Такая алгебра слов называется *свободной* или, точнее, *абсолютно свободной* алгеброй.

Легко найти все автоморфизмы алгебры $G(\Omega, X)$.

Пусть σ — некоторая подстановка на множестве X, w — элемент в G и пусть в записи этого элемента участвуют следующие элементы из X: $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Заменяя в слове w все эти x соответственно элементами $x_1\sigma, x_2\sigma, \ldots$ $\ldots, x_k\sigma$, мы получим новое слово и это новое слово обозначим через $w\sigma$. Легко видеть, что отображение $w \to w\sigma$ является автоморфизмом алгебры G.

Пусть, с другой стороны, φ — автоморфизм алгебры $G(\Omega, X)$. Учитывая тот факт, что отображение φ должно сохранять строение слов, заключаем, что множество X остается инвариантным относительно φ. Поэтому автоморфизму φ отвечает подстановка множества X. Такое соответствие между элементами группы всех подстановок множества X и элементами группы автоморфизмов алгебры $G(\Omega, X)$ является, очевидно, изоморфизмом.

Переходя к понятию приведенной свободной алгебры, уточним вначале определение тождественного соотношения. Пусть X и Ω такие же, как и раньше, и пусть w_1 и w_2 — два слова. Пусть еще $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — все

элементы из X, участвующие в записи слов w_1 и w_2, и $0_1, 0_2, \ldots, 0_l$ — символы нульарных операций из Ω, встречающиеся в этих словах. Говорят, что в Ω-алгебре G выполняется тождественное соотношение $w_1 = w_2$, если указанное равенство имеет место в G при замене всех x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, любыми элементами из G и подстановке вместо $0_1, 0_2, \ldots, 0_l$ соответствующих выделенных элементов алгебры.

Понятно, что тождественные соотношения можно рассматривать как самостоятельные объекты, не связывая их с определенной Ω-алгеброй.

Возьмем теперь некоторую систему Λ тождественных соотношений, и пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех Ω-алгебр, в каждой из которых выполняются все соотношения системы Λ. Каждый такой класс $\mathfrak{K}$ называется *примитивным* классом алгебр. Несложная проверка показывает, что всякий примитивный класс алгебр замкнут относительно полных прямых сумм, гомоморфизмов и операции взятия подалгебры в алгебре. Благодаря этим важным свойствам примитивные классы алгебр играют особую роль. С другой стороны, согласно известной теореме Биркгофа [3] (см. также Добавление) всякий класс алгебр, замкнутый относительно указанных трех операций, является примитивным классом. Таким образом, примитивные классы — их называют еще многообразиями — имеют также хорошую инвариантную характеристику.

Сопоставим далее каждой системе Λ тождественных соотношений некоторую конгруэнцию алгебры слов $G(\Omega, X)$. Обозначим вначале через $\tilde{\Lambda}$ новую систему соотношений, получаемую из Λ следующим образом: если соотношение $w_1 = w_2$ принадлежит Λ, то, заменяя в нем элементы из множества X произвольными словами, мы получим соотношение $w_1' = w_2'$, принадлежащее системе $\tilde{\Lambda}$. Назовем еще преобразованием эквивалентности слов каждое преобразование следующего вида: если v — слово и w — некоторое его подслово, такое, что в системе $\tilde{\Lambda}$ имеется соотношение $w = w'$, то, заменяя в слове v часть w словом w', получим новое слово v'. Два слова v_1 и v_2 называются эквивалентными, если от одного из них можно перейти к другому, применяя конечное число преобразований эквивалентности.

Нетрудно понять, что определенная так эквивалентность слов в действительности является конгруэнцией алгебры $G(\Omega, X)$ и эта конгруэнция вполне характеристична. Фактор-алгебра алгебры слов по такой конгруэнции называется *приведенной свободной алгеброй* или еще *свободной алгеброй примитивного класса* $\mathfrak{K}$, определяемого системой тождеств Λ. Обозначим эту свободную алгебру через $\overline{G}$. Легко видеть, что $\overline{G}$ также принадлежит классу $\mathfrak{K}$, и, кроме того, имеет место следующее характерное здесь свойство: каждое отображение $\mu: X \to G'$ множества X в алгебру G', принадлежащую классу $\mathfrak{K}$, может быть продолжено до гомоморфизма $\mu: \overline{G} \to G'$. Отсюда непосредственно получаем и следующую теорему:

4.1. *Всякая алгебра G примитивного класса $\mathfrak{K}$ является гомоморфным образом некоторой свободной алгебры этого класса.*

Пусть теперь Λ — некоторая система тождественных соотношений, определяющая примитивный класс $\mathfrak{K}$, и пусть G — алгебра. Через $\rho(\Lambda, G)$ обозначим конгруэнцию в G, совпадающую с пересечением всех конгруэнций ρ, для которых G/ρ есть алгебра из класса $\mathfrak{K}$. Мы знаем, что $G/\rho(\Lambda, G)$ также принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Конгруэнцию $\rho(\Lambda, G)$ будем называть Λ-конгруэнцией в G или конгруэнцией, определяемой системой Λ. Такая конгруэнция обобщает понятие вербальной подгруппы из теории групп. Простая проверка показывает, что если μ — гомоморфизм алгебры G, то имеет место формула: $\rho(\Lambda, G^{\mu}) = \rho(\Lambda, G)^{\mu}$.

Справедлива также следующая теорема:

4.2. *Всякая Λ-конгруэнция алгебры G является вполне характеристической конгруэнцией.*

Пусть $\rho(\Lambda, G) = \rho$ — Λ-конгруэнция в G и σ — некоторый эндоморфизм этой алгебры. Так как в $G^{\sigma}/\rho \cap G^{\sigma}$ выполняются все соотношения из Λ, то конгруэнция $\rho(\Lambda, G^{\sigma})$ принадлежит $\rho \cap G^{\sigma}$. Учитывая теперь, что $\rho(\Lambda, G^{\sigma}) = \rho^{\sigma}$, мы получаем требуемое утверждение.

Отметим далее, что в теории универсальных алгебр, так же как и в теории групп, важную роль играют свободные произведения и приведенные (в том или ином смысле) свободные произведения. По поводу общей теории таких операций см., в частности, статью Т. М. Бара-

нович [1], в которой продолжены теоретико-групповые исследования О. Н. Головина [1].

В заключение пункта еще заметим, что в работе И. И. Валуцэ [1] изучаются полугруппы всех эндоморфизмов приведенных свободных алгебр.

5. Коммутативные алгебры. Коммутант. Пусть ω_1 — n-арная и ω_2 — m-арная операции системы Ω, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, и пусть (x_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — матрица, составленная из элементов множества X. Введем обозначения:

$$w_1 = ((x_{11}x_{12}\ldots x_{1n}\omega_1)(x_{21}x_{22}\ldots x_{2n}\omega_1)\ldots(x_{m1}x_{m2}\ldots x_{mn}\omega_1))\,\omega_2,$$

$$w_2 = ((x_{11}x_{21}\ldots x_{m1}\omega_2)(x_{12}x_{22}\ldots x_{m2}\omega_2)\ldots$$
$$\ldots(x_{1n}x_{2n}\ldots x_{mn}\omega_2))\,\omega_1.$$

Соотношение $w_1 = w_2$ назовем соотношением перестановочности операций ω_1 и ω_2. Операции ω_1 и ω_2 называются перестановочными на Ω-алгебре G, если на этой алгебре тождественно выполняется соотношение перестановочности для этих операций. Можно говорить также и о перестановочности двух операций, одна из которых нульарна. Если 0 — нульарная операция и ω — n-арная $(n \geqslant 1)$, то перестановочность этих операций означает выполнимость условия: $\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ раз}}\omega = 0$. Перестановочность двух нульарных операций означает совпадение соответствующих выделенных элементов алгебры. Алгебра G называется *коммутативной*, если любые две ее операции, в том числе и совпадающие, перестановочны на ней. Отсюда следует, в частности, что в коммутативной алгебре имеется не более чем один выделенный элемент, который будем называть ее нулем. Понятно, что класс всех коммутативных Ω-алгебр является примитивным классом. Легко видеть, что в случае групп такое определение приводит к абелевым группам*). Исходя из

*) Операция ω называется симметричной на заданной алгебре, если любая перестановка аргументов оставляет неизменным соответствующее значение. Для групп симметричность умножения и перестановочность его самого с собой оказываются равносильными условиями. Можно указать и ряд других классов алгебр с подобной ситуацией.

аналогии с группами, имеет смысл ввести также следующий специальный тип Λ-конгруэнции.

Пусть G — некоторая алгебра. Назовем *коммутантом* этой алгебры конгруэнцию $\rho(G)$, совпадающую с пересечением всех конгруэнций из G, фактор-алгебры по которым коммутативны. Очевидно, что $G/\rho(G)$ — коммутативная алгебра.

6. Квазиэндоморфизмы алгебр. Ω-полугруппы. Обозначим через $H(G) = H$ полугруппу всех преобразований основного множества Ω-алгебры G. Покажем, что на множество H естественно переносятся все операции системы Ω. Пусть, например, ω — n-арная операция из Ω и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ принадлежат H. Тогда $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega$ — это преобразование, определяемое формулой: $g(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega) = (g\varphi_1)(g\varphi_2) \ldots (g\varphi_n)\omega$ при любом $g \in G$.

Если $0_\alpha \in \Omega$ — нульарная операция, то в том же духе мы считаем, что она выделяет в H преобразование ε_α, переводящее каждый $g \in G$ в выделенный операцией 0_α элемент в G.

Таким образом, H становится Ω-алгеброй, и, кроме того, в H имеется еще и умножение. Легко видеть, что это умножение обладает свойством *левой дистрибутивности* по отношению ко всем операциям системы Ω: если ω — n-арная операция из Ω и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in H$, то

$$\varphi(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega) = (\varphi\varphi_1)(\varphi\varphi_2) \ldots (\varphi\varphi_n)\omega.$$

Правая дистрибутивность, вообще говоря, не имеет места, но выполняется, очевидно, для преобразований φ, являющихся эндоморфизмами алгебры G. Для нульарной операции 0_α роль левой дистрибутивности играет всегда выполняющееся равенство $\varphi\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha$, $\varphi \in H$, а правая дистрибутивность равносильна условию: $\varepsilon_\alpha\varphi = \varepsilon_\alpha$.

Введем теперь следующее определение.

Множество K называется *Ω-полугруппой*, если на этом множестве определены все операции системы Ω (K является Ω-алгеброй) и еще умножение, относительно которого K является полугруппой (мультипликативной полугруппой K), причем выполняется левая дистрибутивность для умножения относительно всех операций системы Ω.

Дистрибутивными элементами Ω-полугруппы называются элементы, для которых выполняется не только левое, но еще и правое дистрибутивное правило. Совокупность всех дистрибутивных элементов Ω-полугруппы K является подполугруппой в мультипликативной полугруппе K. Эту подполугруппу обозначим через $D(K)$. Легко доказывается следующее утверждение:

6.1. *Если L — некоторая подполугруппа в $D(K)$, то подалгебра Ω-алгебры K, порожденная элетентами из L, замкнута и относительно умножения.*

Прежде всего заметим, что индукцией непосредственно доказывается, что в Ω-полугруппе левая дистрибутивность выполняется не только для операций из Ω, но и для всех производных операций — операций из $\tilde{\Omega}$. То же самое можно сказать и относительно правой дистрибутивности для элементов из $D(K)$. Пусть теперь u и v — два элемента в $\{L\}^{\Omega}$ и пусть для них найдены такие

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \in L,\ \bar{\omega}_1 \in \tilde{\Omega} \text{ и } v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m \in L,\ \bar{\omega}_2 \in \tilde{\Omega},$$

что $u = u_1u_2 \ldots u_n\bar{\omega}_1$ и $v = v_1v_2 \ldots v_m\bar{\omega}_2$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} uv = u\,(v_1v_2 \ldots v_m\bar{\omega}_2) = (uv_1)\,(uv_2) \ldots (uv_m)\,\bar{\omega}_2 = \\ = ((u_1v_1)\,(u_2v_1) \ldots (u_nv_1)\,\bar{\omega}_1)\,((u_1v_2)\,(u_2v_2) \ldots \\ \ldots (u_nv_2)\,\bar{\omega}_1) \ldots ((u_1v_m)\,(u_2v_m) \ldots (u_nv_m)\,\bar{\omega}_1)\,\bar{\omega}_2, \end{aligned}$$

так что uv также элемент из $\{L\}^{\Omega}$. Так же легко разбирается случай, когда среди сомножителей имеются выделенные элементы. Этим доказано, что Ω-подалгебра, порожденная элементами из L, в действительности является даже Ω-подполугруппой.

В частности, Ω-подполугруппой в H является подалгебра, порожденная всеми эндоморфизмами алгебры G. Элементы такой подалгебры будем называть *квазиэндоморфизмами* алгебры G и совокупность всех квазиэндоморфизмов обозначим здесь через $H'(G)$.

Приводимая ниже теорема является обобщением хорошо известного факта относительно эндоморфизмов абелевых групп.

Ω-полугруппа называется *дистрибутивной*, если каждый ее элемент является дистрибутивным элементом.

6.2. *Если G — коммутативная Ω-алгебра, то совокупность всех эндоморфизмов этой алгебры является дистрибутивной Ω-полугруппой.*

Нам нужно только показать, что каждый элемент из $H'(G)$ является эндоморфизмом алгебры G. Для доказательства последнего факта достаточно установить, что совокупность всех эндоморфизмов замкнута относительно операций из Ω.

Пусть ω — n-арная операция из Ω и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — эндоморфизмы алгебры G. Покажем, что $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega$ также эндоморфизм. Допустим, что ω' — m-арная операция в Ω, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — элементы алгебры G. Используя перестановочность операций ω и ω' на алгебре G, получаем:

$$\begin{aligned}
&a_1a_2 \ldots a_m\omega'(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega) = \\
&\qquad = ((a_1a_2 \ldots a_m\omega')\varphi_1(a_1a_2 \ldots a_m\omega')\varphi_2 \ldots \\
&\qquad \ldots (a_1a_2 \ldots a_m\omega')\varphi_n)\omega = ((a_1\varphi_1)(a_2\varphi_1) \ldots \\
&\qquad \ldots (a_m\varphi_1)\omega'(a_1\varphi_2)(a_2\varphi_2) \ldots (a_m\varphi_2)\omega' \ldots \\
&\qquad \ldots (a_1\varphi_n)(a_2\varphi_n) \ldots (a_m\varphi_n)\omega')\omega = ((a_1\varphi_1)(a_1\varphi_2) \ldots \\
&\qquad \ldots (a_1\varphi_n)\omega(a_2\varphi_1)(a_2\varphi_2) \ldots (a_2\varphi_n)\omega \ldots (a_m\varphi_1)(a_m\varphi_2) \ldots \\
&\qquad \ldots (a_m\varphi_n)\omega)\omega' = (a_1(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega))(a_2(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega)) \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots (a_m(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega))\omega'.
\end{aligned}$$

Кроме того, если 0 — нулевой элемент алгебры G, то

$$0(\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega) = (0\varphi_1)(0\varphi_2) \ldots (0\varphi_n)\omega = 00 \ldots 0\omega = 0.$$

Все это означает, что $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n\omega$ — эндоморфизм. Очевидно также, что и нулевой элемент в $H'(G)$ является эндоморфизмом.

В общем случае Ω-полугруппа $H'(G)$, конечно, не является дистрибутивной, и не каждый квазиэндоморфизм будет эндоморфизмом. В дальнейшем нам придется выделить класс Ω-полугрупп, которые подобно $H'(G)$ обладают дистрибутивными Ω-образующими. Наличие таких образующих является существенным облегчением при исследовании Ω-полугрупп. Аналогично тому как это делалось в только что приведенных выкладках, можно доказать следующее утверждение:

6.3. *Если Ω-полугруппа K обладает дистрибутивными образующими и Ω-алгебра K коммутативна, то K — дистрибутивная Ω-полугруппа.*

См. по этому поводу еще работу Т. Эванса [1].

Легко видеть, что гомоморфный образ Ω-полугруппы также является Ω-полугруппой, причем дистрибутивные элементы при гомоморфизме переходят в дистрибутивные элементы. Докажем теперь следующее предложение:

6.4. *Если K — Ω-полугруппа с дистрибутивными образующими и ρ — конгруэнция Ω-алгебры K, определяемая некоторой системой тождественных соотношений, то ρ является также конгруэнцией Ω-полугруппы K.*

Как мы знаем уже из 4.2, ρ является вполне характеристической конгруэнцией Ω-алгебры K. Если теперь u — произвольный элемент в K, то, в силу левой дистрибутивности, отображение $x \to ux$, $x \in K$, есть эндоморфизм Ω-алгебры K. Отсюда, используя полную характеристичность конгруэнции ρ, заключаем, что $x\rho y$ влечет $(ux)\rho(uy)$. Аналогично для дистрибутивного элемента u получаем, что из $x\rho y$ следует $(xu)\rho(yu)$. Так как K обладает дистрибутивными образующими, то последнее свойство выполняется и для всех $u \in K$.

Пусть теперь $x\rho y$ и $u\rho v$. Из предыдущих замечаний имеем $(ux)\rho(uy)$ и $(uy)\rho(vy)$. Отсюда $(ux)\rho(vy)$, что и требовалось.

Некоторые вопросы теории Ω-полугрупп рассматриваются в работе Я. В. Хиона [1]. Здесь, в частности, исследуется вопрос о присоединении к Ω-полугруппе единицы с сохранением тех или иных условий. Как оказалось, дело здесь обстоит далеко не просто.

Рассмотрим далее случай, когда даны две Ω-алгебры, A и B, и пусть $H(A, B)$ — совокупность всех однозначных отображений множества A в множество B. Точно так же, как это делалось для $H(G)$, все операции системы Ω естественно переносятся в множество $H(A, B)$. Так, если ω — n-арная операция из Ω и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — элементы из $H(A, B)$, то $\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\omega$ есть отображение, определяемое формулой: $a(\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\omega) = (a\varphi_1)\ldots(a\varphi_n)\omega$ при всех $a \in A$. Таким образом, мы получим Ω-алгебру $H(A, B)$. Непосредственно из определения следует, что при любом $a \in A$ отображение $\varphi \to a\varphi$ есть гомоморфизм

алгебры $H(A, B)$ в алгебру B. Пусть ρ_a — конгруэнция такого гомоморфизма: $\varphi\rho_a\psi$ означает, что $a\varphi = a\psi$. Понятно, что пересечение всех ρ_a, $a \in A$, является нулевой конгруэнцией Ω-алгебры $H(A, B)$. Отсюда и из теоремы 3.1 о подпрямых суммах алгебр следует, что Ω-алгебра $H(A, B)$ принадлежит каждому примитивному классу алгебр, содержащему алгебру B. Аналогичное утверждение применимо, в частности, и к Ω-алгебре $H(G)$.

Непосредственно проверяется также следующее свойство:

6.5. *Если B — коммутативная алгебра, то совокупность всех гомоморфизмов A в B составляет подалгебру в $H(A, B)$.*

Такую подалгебру принято обозначать через $\mathrm{Hom}(A, B)$.

§ 2. МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ ГРУППЫ

1. Определения. Как известно, в случае групп, колец*) и в ряде других случаев гомоморфизмы обладают замечательной особенностью: существуют ядра гомоморфизмов, позволяющие реализовать смежные классы соответствующих конгруэнций, как смежные классы по этим ядрам. Аналогичная ситуация имеет место для всех типов алгебр, объединяемых понятием *группы с системой мультиоператоров.* Группы и кольца — это частные виды групп с мультиоператорами. Теория таких мультиоператорных групп развита Ф. Хиггинсом [1] и довольно подробно изложена в книге А. Г. Куроша [4].

Приведем исходные понятия этой теории.

Пусть G — алгебра относительно некоторой системы операций (мультиоператоров) Ω и пусть еще на множестве G определена группа относительно некоторого, вообще некоммутативного, сложения (аддитивная группа G). Это множество G вместе с групповыми операциями и системой операций Ω называется группой с *мультиоператорами* (или *мультиоператорной группой*), если при любом $\omega \in \Omega$ выполняется условие: $00\ldots0\omega = 0$.

*) Кольца, как правило, не предполагаются ассоциативными.

Здесь 0 — нуль аддитивной группы G, и повторяется этот нуль n раз, если операция ω n-арная.

Часто для того, чтобы специально отметить систему операторов Ω, мультиоператорную группу называют *Ω-группой*. Аддитивную группу Ω-группы G обозначают также через G^+.

Легко понять, каким образом группы и кольца включаются в общее определение мультиоператорных групп. Векторные пространства также являются Ω-группами — система Ω состоит здесь из скалярных операторов основного поля (или тела). Вообще же понятно, что Ω-группы служат в известной степени обобщением колец в том отношении, что сложение не обязательно коммутативно и вместо одного умножения имеется много «умножений», роль которых играют операции из системы Ω. Заметим еще здесь, что введенные в предыдущем параграфе Ω-полугруппы (мультиоператорные полугруппы) также можно рассматривать как обобщение колец. Только теперь уже при одном умножении имеется много «сложений».

Из определения следует, что Ω-группа является алгеброй относительно множества операций Ω и операций аддитивной группы, в том числе нульарной операции, выделяющей элемент нуль. Сам этот нуль составляет Ω-подгруппу. При этом понятно, что под Ω-подгруппой следует понимать такое подмножество $H \subset G$, которое является подгруппой группы G^+ и подалгеброй алгебры G. Легко видеть, что гомоморфный образ Ω-группы также является Ω-группой.

Пусть дальше φ — гомоморфное отображение Ω-группы G на Ω-группу G' и пусть ρ — соответствующая конгруэнция. Пусть еще H — полный прообраз в G нуля группы G'^+. Так как φ является одновременно гомоморфизмом аддитивных групп, то H — нормальный делитель в G^+, и смежными классами по H исчерпываются все смежные классы конгруэнции ρ.

Кроме того, H обладает еще следующим свойством: для всякой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и для любых $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in G$, $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$ выполняется включение

$$(x_1 + h_1)(x_2 + h_2) \ldots (x_n + h_n)\omega \in x_1 x_2 \ldots x_n \omega + H. \qquad (1)$$

Всякий нормальный делитель H аддитивной группы G^+, обладающий указанным свойством, называется *идеалом* Ω-группы. Взяв во включении (1) в качестве элементов x_i все нули, мы получим, что идеал всегда является Ω-подгруппой. Включение (1) показывает также, что смежные классы по каждому идеалу образуют конгруэнцию Ω-группы, и, таким образом, идеалы Ω-группы являются ядрами гомоморфизмов. В связи с тем, что конгруэнции Ω-групп находятся во взаимно однозначном соответствии с идеалами, возникает возможность заменить обозначение Ω-фактор-группы G/ρ обозначением G/H, где H — отвечающий конгруэнции ρ идеал.

Нетрудно видеть, что пересечение любого множества идеалов Ω-группы снова является идеалом, причем имеет место следующее правило: если ρ_α — набор конгруэнций мультиоператорной группы и H_α — отвечающие этим конгруэнциям идеалы, то идеал, отвечающий пересечению всех ρ_α, совпадает с пересечением всех H_α. Композит идеалов является идеалом и совпадает с подгруппой аддитивной группы G^+, порожденной аддитивными группами исходных идеалов.

Легко также проверить, что композиту конгруэнций Ω-группы отвечает композит соответствующих идеалов. Отсюда следует, что решетка всех конгруэнций Ω-группы G изоморфна решетке идеалов, и, следовательно, она может рассматриваться как подрешетка в решетке всех Ω-подгрупп из G. Приводившийся в предыдущем параграфе (п. 2) гомоморфизм группы $\mathfrak{A}(G)$ в группу всех автоморфизмов решетки $\mathscr{L}'(G)$ превращается сейчас в гомоморфизм группы $\mathfrak{A}(G)$ в группу всех автоморфизмов решетки идеалов Ω-группы G. Ядром этого гомоморфизма служат автоморфизмы, оставляющие на месте каждый идеал из G.

Из предыдущих замечаний также следует, что все конгруэнции Ω-группы попарно перестановочны.

2. Почти кольца. Мультиоператорные почти кольца. В предыдущем параграфе для каждой Ω-алгебры G была определена Ω-полугруппа всех преобразований этой алгебры. Если G — группа, то такая Ω-полугруппа называется *почти кольцом*. Почти кольца являются частным

случаем мультиоператорных групп, и с этой точки зрения рассмотрим сейчас простейшие их свойства.

Итак, *почти кольцом* называется множество K с двумя алгебраическими операциями — сложением и умножением, относительно которых предполагается следующее:

а) по сложению K — группа (аддитивная группа K^+), причем не обязательно коммутативная;

б) относительно умножения K — полугруппа (мультипликативная полугруппа $K^{\cdot}$);

в) умножение и сложение связаны левым дистрибутивным законом

$$x(y+z)=xy+xz.$$

Вообще говоря, следовало бы требовать, чтобы левая дистрибутивность выполнялась и относительно остальных двух операций аддитивной группы. Покажем, однако, что это условие вытекает из предыдущих. Пусть x и y — произвольные элементы почти кольца K и 0 — нуль аддитивной группы. Покажем, что выполняются тождества:

$$x\cdot 0=0;\quad x(-y)=-xy.$$

Действительно, $x(0+y)=x\cdot 0+xy=xy$, откуда $x\cdot 0=0$.

Далее, $x(y-y)=0=xy+x(-y)$ и $x(-y)=-xy$.

Посмотрим теперь, как выглядит определение идеала в случае почти колец. Пусть H — идеал почти кольца K. Это означает, что H — нормальный делитель аддитивной группы, и так как в нашем случае система операций Ω состоит из одного умножения, остается добавить условие:

$$(x_1+h_1)(x_2+h_2)\in x_1x_2+H \tag{1}$$

при всех x_1, $x_2\in K$, $h_1,h_2\in H$.

Применяя левый дистрибутивный закон, это включение можно переписать еще следующим образом:

$$(x_1+h_1)x_2+(x_1+h_1)h_2\in x_1x_2+H. \tag{2}$$

Рассматривая случай $h_1=0$, мы заключаем отсюда, что необходимо, чтобы включение $x_1h_2\in H$ выполнялось при любых $x_1\in K$ и $h_2\in H$, т. е. H должно быть левым

идеалом (в смысле теории полугрупп) в мультипликативной полугруппе K. Но теперь включение (2) оказывается эквивалентным следующему условию:

$$-x_1x_2+(x_1+h)x_2 \in H \tag{3}$$

при любых x_1, $x_2 \in K$ и $h \in H$.

Из всего сказанного следует, что нормальный делитель H аддитивной группы K^+ тогда и только тогда является идеалом, когда H — левый идеал мультипликативной полугруппы $K^{\cdot}$ и выполняется условие (3).

Почти кольцо K назовем здесь *квазикольцом*, если группа K^+ порождается дистрибутивными элементами. Так же, как и выше, легко проверить, что при определении дистрибутивного элемента x достаточно требовать дистрибутивности по отношению к сложению, — отсюда уже следует, что при любом y будут верны равенства $(-y)x=-yx$ и $0x=0$.

Покажем, что нормальный делитель H аддитивной группы квазикольца K в том и только в том случае является идеалом в K, когда H является двусторонним идеалом мультипликативной полугруппы $K^{\cdot}$.

Пусть H — идеал квазикольца K. Тогда, применяя включение (3) для случая, когда x_2 — дистрибутивный элемент, мы получим $hx_2 \in H$. Пусть теперь x — произвольный элемент из K. Этот x можно представить в виде $x=\sum\limits_i \varepsilon_i x_i$, где $\varepsilon_i x_i = \pm x_i$ и все элементы x_i дистрибутивны. Для любого $h \in H$ получаем $hx=\sum\limits_i \varepsilon_i hx_i \in H$, т. е. H — правый идеал в $K^{\cdot}$. Тот факт, что H — левый идеал, был установлен раньше.

Допустим теперь, что H является двусторонним идеалом мультипликативной полугруппы $K^{\cdot}$. Нужно показать, что выполняется условие (3).

Пусть $x_2=\sum\limits_i \varepsilon_i y_i$, где все y_i — дистрибутивные элементы. Имеем:

$$-x_1x_2+(x_1+h)x_2=$$
$$=-x_1x_2+\sum_i \varepsilon_i (x_1+h)y_i=-x_1x_2+\sum_i \varepsilon_i (x_1y_i+hy_i).$$

Так как H — нормальный делитель аддитивной группы и все hy_i принадлежат H, то можно записать:

$$-x_1x_2+(x_1+h)x_2= \\ =-x_1x_2+\sum_i \varepsilon_i x_1 y_i + h' = -x_1x_2 + x_1x_2 + h'.$$

Здесь $h' \in H$, и следовательно, требуемое условие выполняется.

Отметим, что согласно общей теореме 1.6.3, относящейся к Ω-полугруппам, всякое квазикольцо с коммутативной аддитивной группой является кольцом.

После предыдущих рассмотрений естественно напрашивается следующее обобщение.

Пусть G — некоторая Ω-группа и H — полугруппа всех преобразований множества G. Нам уже известно, что как аддитивные операции группы G^+, так и все мультиоператоры системы Ω непосредственно переносятся на множество H. При этом нулем в H оказывается преобразование из H, переводящее каждый элемент Ω-группы G в ее нуль. Из общих соображений следует, что таким образом H становится также Ω-группой. Теперь мы имеем в H следующие три системы операций:

а) операции аддитивной группы,

б) операции системы Ω,

в) умножение.

Разбирая различные комбинации из этих систем, мы получаем следующую картину. Относительно а) и в) H является почти кольцом, а относительно а) и б), как уже отмечалось, H — Ω-группа. Отсюда уже следует, что H является мультиоператорной группой относительно аддитивных операций а) и системы мультиоператоров, состоящей из б) и в). Кроме того, H — мультиоператорная полугруппа относительно умножения в) и системы мультиоператоров, состоящей из а) и б).

Мы подошли к следующему определению.

Всякое множество K, на котором заданы системы операций а), б) и в), обладающие перечисленными свойствами, будем называть *мультиоператорным* (Ω-) *почти кольцом.*

Назовем, далее, *Ω-квазикольцом* такое Ω-почти кольцо, в котором соответствующая Ω-группа порождается ди-

стрибутивными элементами. Понятно, что здесь имеется в виду дистрибутивность (умножения) относительно операций типа а) и б). Наконец, Ω-кольцо — это такое Ω-почти кольцо K, что по отношению к сложению и умножению K — кольцо, Ω-группа K абелева (см. п. 4) и умножение дистрибутивно относительно всех операций этой Ω-группы. Простейшим и важным примером таких Ω-колец служат ассоциативные линейные алгебры.

Легко видеть, что идеал Ω-почти кольца K есть такое подмножество в K, которое является идеалом почти кольца K и одновременно идеалом Ω-группы K.

3. Нормальные ряды и системы. Понятия нормальной системы, инвариантной системы, возрастающих и убывающих нормальных рядов играют важную роль не только в абстрактной теории групп, или в общем случае Ω-групп; они являются основными и при рассмотрении представлений групп автоморфизмами Ω-групп. Эти понятия, как известно, в общем виде были выделены в теории групп в обзорной статье А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [1]. Соответствующие понятия для Ω-групп отличаются от теоретико-групповых понятий лишь тем, что во всех случаях, где речь идет о нормальных делителях, нужно говорить об идеалах.

Напомним определения.

Пусть в Ω-группе G задана система Ω-подгрупп $[A_\alpha]$, к которой принадлежат нулевая подгруппа $0 = A_0$ и сама группа $G = A_\gamma$, и пусть эта система упорядочена по отношению к теоретико-множественному включению. Система $[A_\alpha]$ называется *полной*, если для любой ее подсистемы пересечение и объединение всех членов этой подсистемы также принадлежат системе $[A_\alpha]$. Скачком в системе $[A_\alpha]$ называется такая пара ее членов — обозначим их через A_α и $A_{\alpha+1}$, — что между ними нет других членов этой системы. Если система $[A_\alpha]$ является полной, то каждый элемент g из G определяет скачок: $A_\alpha(g)$ — объединение всех членов системы, не содержащих g, и $A_{\alpha+1}(g)$ — пересечение всех членов, содержащих g. Известно, что каждую упорядоченную по включению систему Ω-подгрупп мультиоператорной группы можно пополнить.

Полная система $[A_\alpha]$ называется *нормальной*, если для каждого ее скачка $A_\alpha, A_{\alpha+1}$ Ω-подгруппа A_α является идеалом в $A_{\alpha+1}$. Если же все A_α — идеалы в G, то система называется *инвариантной*. Ω-группы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$, связанные с нормальной системой $[A_\alpha]$, называются *факторами* этой системы.

Нормальная система $[A'_\alpha]$ называется *уплотнением* нормальной системы $[A_\alpha]$, если $[A_\alpha]$ есть подсистема в $[A'_\alpha]$. Если нормальная система не допускает нетривиальных уплотнений, то она называется *композиционной*. Всякая Ω-группа обладает композиционными системами, причем каждая нормальная система такой группы содержится в некоторой композиционной системе. Один из распространенных способов классификации Ω-групп основан на свойствах имеющихся в данной Ω-группе композиционных и других нормальных систем.

Так, например, система $[A_\alpha]$ называется *сильно разрешимой* (разрешимые системы будут определены позднее), если каждый ее фактор является коммутативной алгеброй. Ω-группа называется *абсолютно простой*, если в ней нет нетривиальных нормальных систем. *Простая* Ω-группа, т. е. Ω-группа без нетривиальных идеалов, может не быть абсолютно простой.

Нормальная система называется *возрастающим* (соответственно *убывающим*) *нормальным рядом*, если эта система вполне упорядочена по возрастанию (соответственно по убыванию). Ω-группа называется *строго простой*, если в ней нет нетривиальных возрастающих нормальных рядов.

В недавней работе [6] Ф. Холл показал, что существуют простые группы, не являющиеся даже строго простыми.

Пример простой, но не строго простой группы построен также в работе Е. М. Левича [1]. Вместе с тем в другой работе Е. М. Левича [3] показано также, что в случаях ассоциативных и лиевых колец понятия простоты и строгой простоты совпадают.

Две нормальные системы называются изоморфными, если между их факторами можно установить взаимно однозначное соответствие, причем такое, чтобы сопоставляемые факторы оказывались изоморфными Ω-груп-

пами. Классическая теорема Жордана—Гельдера справедлива и для Ω-групп: если в Ω-группе имеются два конечных нормальных ряда с простыми факторами, то такие ряды изоморфны. Аналогом этой теоремы для бесконечных рядов служит следующая хорошо известная теорема А. Г. Куроша [2]:

3.1. *Если в Ω-группе G заданы два возрастающих нормальных ряда со строго простыми факторами, то такие ряды изоморфны.*

Доказательства для мультиоператорных групп — такие же, как и для групп без операторов, и основаны они все на той же лемме Цасенхауза. Эта лемма, а также теорема об изоморфизмах остаются справедливыми для произвольных Ω-групп.

В дальнейшем для одного специального класса Ω-групп будет приведен аналог теоремы А. Г. Куроша, относящийся к рядам с простыми факторами (см. 5.3.3).

4. Абелевость, нильпотентность, разрешимость. В случае Ω-групп с нетривиальной системой мультиоператоров мы будем различать понятия «абелевость» и «коммутативность». Ω-группа называется *коммутативной*, если она коммутативна как алгебра, т. е. если: 1) аддитивная группа G^+ коммутативна, 2) все операции системы Ω перестановочны с аддитивными операциями (тут достаточно требовать перестановочности со сложением) и 3) Ω-алгебра G коммутативна.

Мультиоператорная группа, в которой выполняются лишь первые два условия, называется *абелевой* Ω-группой.

В связи со сказанным приходится различать два типа коммутантов. *Коммутантом Ω-группы G* называется пересечение всех идеалов из G, которым соответствуют абелевы Ω-фактор-группы. Если G' — такой коммутант, то Ω-группа G/G' также абелева.

Если в приведенном определении исходить не из абелевости, а из коммутативности, то тем самым будет определен *сильный коммутант*. Сильный коммутант Ω-группы G соответствует, очевидно, коммутанту в смысле предыдущего параграфа для G, рассматриваемой как алгебра.

Сейчас мы приведем еще одно, внутреннее, определение коммутанта.

Пусть A и B — две Ω-подгруппы мультиоператорной группы G. Назовем *взаимным коммутантом* $[A, B]$ этих двух подгрупп пересечение идеалов из $\{A, B\}$, содержащих все коммутаторы $[a, b] = -a - b + a + b$, $a \in A$, $b \in B$, и все элементы вида

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n; \omega] = -a_1a_2\ldots a_n\omega - \\ - b_1b_2\ldots b_n\omega + (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)\omega,$$

где ω — n-арная операция из Ω, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$. Нетрудно проверить, что при этом выполняется равенство $[A, B] = [B, A]$.

Из определения взаимного коммутанта непосредственно следует, что если H — идеал в G с абелевой Ω-фактор-группой G/H, то взаимный коммутант $[G, G]$ содержится в H. С другой стороны, $G/[G, G]$ есть, очевидно, также абелева Ω-группа. Поэтому взаимный коммутант $[G, G]$ совпадает с коммутантом Ω-группы G.

Понятие взаимного коммутанта имеет еще следующее значение. Ω-подгруппа H Ω-группы G тогда и только тогда является идеалом в G, когда взаимный коммутант $[H, G]$ принадлежит H.

Из этого замечания следует, в частности, что в абелевой Ω-группе всякая Ω-подгруппа является идеалом.

Теперь нам осталось определить следующие понятия.

Нормальная система $[A_\alpha]$ Ω-группы G называется *разрешимой*, если все ее факторы являются абелевыми Ω-группами. Система $[A_\alpha]$ называется *центральной системой*, если для любого ее скачка A_α, $A_{\alpha+1}$ выполняется $[A_{\alpha+1}, G] \subset A_\alpha$. Отправляясь от этих понятий, мы приходим к различным классам Ω-групп разрешимого и нильпотентного типа.

При этом разрешимые и нильпотентные Ω-группы — это Ω-группы, обладающие соответственно конечным разрешимым или центральным рядом.

5. Прямые разложения. Полная приводимость. Понятие полной прямой суммы алгебр применимо, в частности, и к Ω-группам. Однако для мультиоператорных групп имеется еще возможность, так же как и в случае групп, говорить о прямых разложениях. Прямое разложение Ω-группы G — это такое прямое разложение аддитивной

группы G^+, в котором все компоненты разложения являются идеалами.

Пусть дальше $[G_\alpha]$, $\alpha \in I$, — некоторый набор Ω-групп и пусть G — их полная прямая сумма. G также является Ω-группой. Рассмотрим в G элементы, у которых компонента с индексом α пробегает всю группу G_α, а все остальные компоненты — нули. Множество таких элементов — обозначим его G'_α — является в G идеалом, изоморфным Ω-группе G_α. Обозначим через G' Ω-подгруппу в G, порожденную всеми такими G'_α. G' называется (*дискретной*) *прямой суммой* Ω-групп G_α. Таким образом, в случае конечного числа слагаемых полная прямая сумма и дискретная прямая сумма — это одно и то же. В общем случае группа G' раскладывается в прямую сумму своих идеалов G'_α. Это означает, что операции прямого суммирования и прямого разложения можно рассматривать как взаимно обратные операции.

В теорию мультиоператорных групп переносятся многие теоремы об изоморфизмах прямых разложений. Мы не будем здесь формулировать такие теоремы; отметим лишь, что вопрос об изоморфизмах прямых разложений имеет также прямое отношение к нашей теме.

Приведем сейчас некоторые факты о вполне приводимых Ω-группах. Ω-группа G называется *вполне приводимой*, если для каждого ее идеала A существует такой дополнительный идеал B, что вся группа G является прямой суммой A и B.

Докажем следующую лемму:

5.1. *Всякий идеал вполне приводимой Ω-группы также вполне приводим.*

Отметим вначале такое свойство: если $G = A + B$ — прямое разложение Ω-группы G и C — идеал в A, то C также идеал в G. Нужно лишь показать, что для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ и любых $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ будет:

$$[c_1, c_2, \ldots, c_n; \quad g_1, g_2, \ldots, g_n; \ \omega] \in C.$$

Каждый g_i имеет вид $g_i = a_i + b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, из определения прямого разложения непосредственно следует, что

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)\,\omega = a_1a_2\ldots a_n\omega + b_1b_2\ldots b_n\omega.$$

Дальше имеем:

$$[c_1, c_2, \ldots, c_n; g_1, g_2, \ldots, g_n; \omega] = -c_1c_2\ldots c_n\omega - \\ - g_1g_2\ldots g_n\omega + (c_1+g_1)(c_2+g_2)\ldots(c_n+g_n)\omega = \\ = -c_1c_2\ldots c_n\omega - a_1a_2\ldots a_n\omega - b_1b_2\ldots b_n\omega + \\ + (c_1+a_1)(c_2+a_2)\ldots(c_n+a_n)\omega + b_1b_2\ldots b_n\omega = \\ = [c_1, c_2, \ldots, c_n; a_1, a_2, \ldots, a_n; \omega] \in C,$$

откуда и следует, что C — идеал в G.

Пусть теперь G — вполне приводимая Ω-группа, A — ее идеал и C — идеал в A. Тогда C — идеал в G и, следовательно, обладает в G дополнительным идеалом D. Используя тот факт, что структура всех идеалов Ω-группы дедекиндова (она является подструктурой структуры нормальных делителей аддитивной группы G^+), получаем $A = (C + D) \cap A = C + (D \cap A)$. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает также, что гомоморфный образ вполне приводимой Ω-группы также вполне приводим. Действительно, согласно теореме об изоморфизмах всякий гомоморфный образ вполне приводимой Ω-группы изоморфен некоторому идеалу этой группы, который согласно лемме вполне приводим.

А теперь докажем теорему (ср., например, Н. Джекобсон [4]):

5.2. *Ω-группа G тогда и только тогда вполне приводима, когда эта группа является прямой суммой простых Ω-групп.*

Пусть G — вполне приводимая Ω-группа. Докажем, что в ней имеются простые идеалы (т. е. идеалы, являющиеся простыми Ω-группами). Если G — простая Ω-группа, то утверждение тривиально. Допустим, что в G имеется собственный идеал A, и пусть a — элемент из G, не принадлежащий A. Согласно лемме Цорна, в G найдется некоторый идеал A', максимальный относительно свойства: содержать A и не содержать элемент a. Пусть B — дополнение к A' в G. Покажем, что B — простой идеал. Пусть это не так. Тогда, будучи вполне приводимой Ω-группой, B распадается в нетривиальную прямую сумму идеалов всей Ω-группы G: $B = B_1 + B_2$. Теперь, используя максимальность A', получаем $a \in (A' + B_1) \cap$

$\cap (A' + B_2) = A'$. Противоречие, следовательно, в G имеются простые идеалы.

Напомним дальше, что *цоколем* Ω-группы G называется идеал в G, порожденный всеми минимальными идеалами из G. Легко видеть, что цоколь раскладывается в прямую сумму минимальных идеалов из G.

Пусть теперь G' — цоколь вполне приводимой Ω-группы G и пусть этот цоколь не совпадает с G. Тогда обозначим через H дополнение к G' в G. H — также вполне приводимая Ω-группа и обладает, следовательно, простыми идеалами. Такие идеалы являются также идеалами в G и поэтому должны принадлежать G'. Полученное противоречие показывает, что $G' = G$, а это, очевидно, означает, что G является прямой суммой простых Ω-групп.

Докажем обратное утверждение.

Пусть G — прямая сумма простых Ω-групп и пусть A — идеал в G. Пусть еще B — идеал в G, максимальный относительно свойства: $A \cap B = 0$, и пусть $G' = A + B$. Если допустить, что $G' \neq G$, то в G найдется такой простой идеал C, что C не принадлежит G'. В силу простоты C, $G' \cap C = 0$, так что сумма $G' + C$ — прямая, и, следовательно, $A \cap (B + C) = 0$. Это противоречит максимальности идеала B. Таким образом, $G' = G$ и идеал A обладает дополнением.

Из этой теоремы следует утверждение:

5.3. *Прямая сумма любого множества вполне приводимых Ω-групп также является вполне приводимой Ω-группой.*

Действительно, такая прямая сумма вместе со своими слагаемыми представима в виде прямой суммы простых Ω-групп.

Пусть задано некоторое разложение вполне приводимой Ω-группы G в прямую сумму простых идеалов: $G = \sum H_\alpha$, $\alpha \in I$.

Разобьем множество всех прямых слагаемых на непересекающиеся классы попарно изоморфных, и пусть G_β, $\beta \in I'$, — прямые суммы слагаемых из одного класса. Тогда $G = \sum G_\beta$. Покажем, что все эти G_β — они называются *однородными компонентами* — не зависят от способа разложения G в прямую сумму простых слагаемых.

Пусть, например, $G_\beta = \sum H_\gamma$, $\gamma \in I''$, где все H_γ изоморфны. Покажем, что простой идеал из G тогда и только тогда принадлежит G_β, когда он изоморфен этим H_γ.

Пусть A — простой идеал в G. Легко видеть, что в исходном разложении найдется конечное число слагаемых, сумма которых содержит A. Обозначим эту сумму через G', и пусть $G'_\beta = G' \cap G_\beta$. Ясно, что G' является прямой суммой этих G'_β. Допустим теперь, что идеал A изоморфен компонентам разложения группы G_β, и допустим, что $A \not\subset G'_\beta$. Это означает, что G' можно так двумя способами разложить в прямую сумму простых Ω-групп, что в этих разложениях будет различное число слагаемых, изоморфных простым группам H_γ, $\gamma \in I''$. Последнее противоречит, например, теореме Жордана—Гельдера. Следовательно, в этом случае A содержится в G_β.

Пусть, обратно, идеал A содержится в G_β. Мы можем допустить, что A содержится в G'_β. Так как A является членом некоторого прямого разложения G'_β в прямую сумму простых слагаемых, то снова по теореме Жордана—Гельдера (или по теореме Шмидта) идеал A изоморфен всем H_γ, $\gamma \in I''$.

Отсюда и следует указанная инвариантность однородных компонент.

Из сказанного нетрудно вывести теорему о том, что любые два разложения Ω-группы в прямую сумму простых слагаемых изоморфны.

Доказательство этой теоремы мы опускаем и рассмотрим случай, когда вполне приводимая Ω-группа обладает единственным разложением в прямую сумму простых слагаемых.

Идеал Z Ω-группы G называется *центральным* идеалом, если $[Z, G] = 0$. Сумма всех центральных идеалов произвольной Ω-группы также является центральным идеалом и называется *центром* этой Ω-группы (Ф. Хиггинс [1]). Мультиоператорная группа называется *группой без центра*, если ее центр совпадает с нулевой подгруппой.

Покажем, что если G — вполне приводимая Ω-группа, то каждый абелев идеал из G является центральным идеалом.

Пусть A — абелев идеал в G. Мы уже видели, что из того, что A — прямое слагаемое в G, следует, что $[A, G]=[A, A]$. Но так как A — абелев идеал, то $[A, A]=0$. Следовательно, и $[A, G]=0$.

Теперь докажем теорему:

5.4. *Если G — вполне приводимая Ω-группа без центра, то G имеет единственное разложение в прямую сумму простых слагаемых.*

Пусть

$$G=\sum H_\alpha,\quad \alpha\in I,$$

есть одно из разложений G в прямую сумму простых слагаемых и пусть A — некоторый простой идеал в G. Для доказательства единственности разложения достаточно показать, что A совпадает с одним из H_α. Если это не так, то всегда $A\cap H_\alpha=0$. Отсюда следует, что для всех слагаемых будет $[A, H_\alpha]=0$. Мы покажем, что отсюда следует, что A — центральный идеал.

Очевидно, что в указанном разложении Ω-группы G можно так выбросить одно слагаемое, например H_1, что сумма остальных слагаемых не содержит A. Эту последнюю сумму обозначим через B. Ясно, что $A+B=G$. Пусть дальше ω — n-арная операция из Ω, $a_1, a_2, \ldots a_n\in A$, $b_1, b_2, \ldots, b_n\in B$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n\in H_1$. Так как A, B и H_1 — идеалы и суммы $A+B$ и H_1+B — прямые, мы получим:

$$\begin{aligned}(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\ldots(a_n+b_n+c_n)\omega&=\\ =a+b_1b_2\ldots b_n\omega+c_1c_2\ldots c_n\omega&=\\ =a_1a_2\ldots a_n\omega+b_1b_2\ldots b_n\omega+c;&\quad a\in A,\ c\in H_1.\end{aligned}$$

Отсюда

$$a+c_1c_2\ldots c_n\omega=a_1a_2\ldots a_n\omega+c.$$

Это возможно лишь при условии

$$a=a_1a_2\ldots a_n\omega,\qquad c=c_1c_2\ldots c_n\omega.$$

Таким образом,

$$(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\ldots(a_n+b_n+c_n)\omega=\\ =a_1a_2\ldots a_n\omega+b_1b_2\ldots b_n\omega+c_1c_2\ldots c_n\omega.$$

Теперь имеем:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots, b_n+c_n;\ \omega]=$$
$$=-a_1a_2\ldots a_n\omega-(b_1+c_1)(b_2+c_2)\ldots(b_n+c_n)\omega+$$
$$+a_1a_2\ldots a_n\omega+(b_1+c_1)(b_2+c_2)\ldots(b_n+c_n)\omega=0,$$

что и означает, что $[A, G]=0$.

По условию, в G нет центральных идеалов, и, следовательно, предположение о том, что A не совпадает ни с одним H_α, ведет к противоречию.

Если G — кольцо (не обязательно ассоциативное), то его идеал H тогда и только тогда является центральным идеалом, когда при любых $h\in H$ и $g\in G$ выполняется равенство $hg=gh=0$. Из доказанной сейчас теоремы вытекает известное утверждение о том, что если кольцо G представимо в виде прямой суммы простых идеалов с ненулевым умножением, то такое разложение должно быть единственным.

В заключение этого пункта приведем еще следующую теорему:

5.5. *Пусть G — произвольная Ω-группа и H_α, $\alpha\in I$, — некоторое семейство идеалов в G, пересечение которых обозначим через H. Тогда Ω-группа G/H изоморфна подпрямой сумме всех G/H_α.*

Эта теорема непосредственно вытекает из аналогичной теоремы, относящейся к произвольным универсальным алгебрам, и из замечаний по поводу связей между конгруэнциями и идеалами Ω-групп.

6. Радикалы в мультиоператорных группах. Здесь будут приведены некоторые понятия, относящиеся к общей теории радикалов в Ω-группах (см. С. Амицур [1, 2], А. Г. Курош [5], Б. И. Плоткин [3]). В дальнейшем эти понятия используются в основном для групп. Мы приводим их здесь, во-первых, потому, что радикалы играют важную роль в теории строения Ω-групп, а во-вторых, они являются характеристическими Ω-подгруппами и, следовательно, представляют интерес с точки зрения автоморфизмов.

Везде в этом пункте система операций Ω предполагается фиксированной, так что все рассматриваемые

здесь мультиоператорные группы являются однотипными. Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{R}$ — некоторые абстрактные классы Ω-групп, содержащие нулевую Ω-группу. Назовем $\mathfrak{R}$-*радикалом* Ω-группы G, принадлежащей классу $\mathfrak{K}$, такой ее $\mathfrak{R}$-идеал (идеал, принадлежащий классу $\mathfrak{R}$), который содержит все другие $\mathfrak{R}$-идеалы из G. Если такой $\mathfrak{R}$-радикал существует в G, то он обозначается через $\mathfrak{R}(G)$.

Класс $\mathfrak{R}$ называется *радикальным классом* (относительно класса $\mathfrak{K}$), если в любой Ω-группе из класса $\mathfrak{K}$ имеется $\mathfrak{R}$-радикал. Ω-группа G называется $\mathfrak{R}$-*полупростой*, если в ней нет нетривиальных (отличных от нуля) $\mathfrak{R}$-*идеалов*. Радикал $\mathfrak{R}(G)$ называется *строгим радикалом*, или радикалом в смысле А. Г. Куроша, если $G/\mathfrak{R}(G)$ — $\mathfrak{R}$-полупростая группа. Наконец, радикальный класс $\mathfrak{R}$ называется *строго радикальным* классом, если во всякой Ω-группе из $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{R}$-радикал $\mathfrak{R}(G)$ является строгим радикалом.

Дальше мы допустим, что класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно гомоморфизмов и класс $\mathfrak{R}$ является радикальным классом. Определим *верхний* $\mathfrak{R}$-*радикальный ряд* произвольной Ω-*группы* G, принадлежащей классу $\mathfrak{K}$.

Таким рядом является ряд:

$$0=\mathfrak{R}_0(G)\subset\mathfrak{R}_1(G)\subset\ldots\subset\mathfrak{R}_\alpha(G)\subset\mathfrak{R}_{\alpha+1}(G)\subset\ldots,$$

где $\mathfrak{R}_1(G)=\mathfrak{R}(G)$, $\mathfrak{R}_{\alpha+1}(G)/\mathfrak{R}_\alpha(G)=\mathfrak{R}(G/\mathfrak{R}_\alpha(G))$, и на предельных местах стоят объединения предыдущих членов.

Понятно, что верхний $\mathfrak{R}$-радикальный ряд обладает таким первым членом $\mathfrak{R}_\gamma(G)$, что все последующие члены этого ряда совпадают с $\mathfrak{R}_\gamma(G)$. Идеал $\mathfrak{R}_\gamma(G)$ называется *верхним* $\mathfrak{R}$-*радикалом* Ω-группы G. В силу этих определений, Ω-группа $G/\mathfrak{R}_\gamma(G)$ является $\mathfrak{R}$-полупростой группой. Ясно также, что $\mathfrak{R}(G)=\mathfrak{R}_\gamma(G)$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R}(G)$ — строгий радикал.

Верхний $\mathfrak{R}$-радикал Ω-группы G будем обозначать через $\tilde{\mathfrak{R}}(G)$.

Непосредственно из определений следует, что как $\mathfrak{R}$-радикал, так и все члены верхнего $\mathfrak{R}$-радикального ряда в G являются характеристическими Ω-подгруппами.

Здесь нам придется еще сделать следующее замечание. Дело в том, что в теории мультиоператорных групп

идеал A Ω-группы G принято называть *характеристическим идеалом*, если выполняется следующее условие: всякий раз, когда G содержится в качестве идеала в некоторой большей Ω-группе G', A является также идеалом и в G'. Поэтому идеал, являющийся характеристической Ω-подгруппой, вообще говоря, может не быть характеристическим идеалом. Одно из главных удобств групп без операторов в том и состоит, что в них характеристическая подгруппа автоматически оказывается нормальным делителем, и, следовательно, для групп оба эти понятия характеристичности совпадают. С другой стороны, важный в теории лиевых алгебр радикал — локально нильпотентный радикал — в случае полей простой характеристики не является характеристическим идеалом, и это ведет к большим осложнениям. Как обстоит дело с этим радикалом в случае нулевой характеристики, пока неизвестно.

Обозначим теперь через $\widetilde{\mathfrak{R}}$ класс всех Ω-групп, совпадающих со своим верхним $\mathfrak{R}$-радикалом. Этот класс $\widetilde{\mathfrak{R}}$ может не быть радикальным классом даже при условии, что $\mathfrak{R}$ — радикальный класс. Это объясняется тем, что $\mathfrak{R}$-радикал Ω-группы не обязательно является характеристическим идеалом. В тех хороших случаях, когда эта характеристичность имеет место, класс $\widetilde{\mathfrak{R}}$ оказывается радикальным и даже строго радикальным классом (см. по этому поводу § 5.2).

Отметим дальше следующие два простых предложения:

6.1. *Класс $\mathfrak{R}$, замкнутый относительно перехода к идеалам, в том и только в том случае является радикальным классом, когда во всякой Ω-группе G класса $\mathfrak{R}$ объединение возрастающей последовательности $\mathfrak{R}$-идеалов есть снова $\mathfrak{R}$-идеал и сумма двух $\mathfrak{R}$-идеалов из G также $\mathfrak{R}$-идеал.*

6.2. *Если радикальный класс $\mathfrak{R}$ замкнут относительно гомоморфизмов, то верхний радикал $\widetilde{\mathfrak{R}}(G)$ совпадает с пересечением таких идеалов H из G, для которых G/H — $\mathfrak{R}$-полупростая Ω-группа.*

Приведем доказательство второго предложения.

Пусть H — такой идеал в G, что G/H — $\mathfrak{R}$-полупростая Ω-группа. Достаточно показать, что $\widetilde{\mathfrak{R}}(G) \subset H$.

Если это не так, то в верхнем $\mathfrak{R}$-радикальном ряде Ω-группы G среди членов, не принадлежащих идеалу H, найдется первый член $\mathfrak{R}_\beta(G)$. При этом β не является предельным числом и существует $\mathfrak{R}_{\beta-1}(G)$. Так как $\mathfrak{R}_{\beta-1}(G) \subset H$, то Ω-группа $\mathfrak{R}_\beta(G)+H/H$ является гомоморфным образом Ω-группы $\mathfrak{R}_\beta(G)/\mathfrak{R}_{\beta-1}(G)$. Учитывая, что последняя является $\mathfrak{R}$-Ω-группой, заключаем, что в G/H имеется нетривиальный $\mathfrak{R}$-идеал. Это противоречит $\mathfrak{R}$-полупростоте G/H, и потому $\widetilde{\mathfrak{R}}(G) \subset H$.

Наряду с радикалами в Ω-группах имеет смысл рассматривать еще двойственные радикалы (корадикалы).

Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{R}$ — снова некоторые абстрактные классы Ω-групп, содержащие нулевую Ω-группу. Идеал A Ω-группы G назовем *$\mathfrak{R}^*$-идеалом*, или *ко-$\mathfrak{R}$-идеалом*, если G/A принадлежит классу $\mathfrak{R}$. Если в G имеется такой $\mathfrak{R}^*$-идеал, который содержится во всяком другом $\mathfrak{R}^*$-идеале из G, то такой идеал называется *$\mathfrak{R}$-корадикалом* и обозначается через $\mathfrak{R}^*(G)$. Класс $\mathfrak{R}$ называется *двойственно радикальным* классом относительно класса $\mathfrak{K}$, если в любой Ω-группе из $\mathfrak{K}$ определен $\mathfrak{R}$-корадикал. Примером такого корадикала может служить коммутант Ω-группы. И вообще легко понять, что всякий примитивный класс $\mathfrak{R}$ является всегда двойственно радикальным классом.

При этом, если примитивный класс $\mathfrak{R}$ определяется системой тождеств Λ, то идеал Ω-группы G, отвечающий Λ-конгруэнции в смысле п. 1.4, это и есть $\mathfrak{R}$-корадикал.

Определим теперь еще один конкретный корадикал (Алберта [1]; см. также Ф. Хиггинс [1] и Г. Биркгоф [1]).

Вначале приведем следующее вспомогательное утверждение:

6.3. *Если Ω-фактор-группы G/A и G/B Ω-группы G по идеалам A и B вполне приводимы, то и $G/A \cap B$ — вполне приводимая Ω-группа.*

Пусть $A+B=C$. Так как G/A вполне приводима, то найдется такой идеал D, что G/A распадается в прямую сумму: $G/A=C/A+D/A$. При этом $D+C=G$ и $D \cap C=A$. Отсюда следует, что Ω-группа $G/A \cap B$ представима в виде прямой суммы:

$$G/A \cap B = D/A \cap B + B/A \cap B.$$

Остается заметить, что оба слагаемых здесь вполне приводимы. Это вытекает из следующих изоморфизмов:

$$D/A\cap B = D/D\cap B \approx D+B/B = G/B;$$
$$B/A\cap B \approx A+B/A = C/A.$$

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — некоторый класс Ω-групп, удовлетворяющих условию минимальности для идеалов, и $\mathfrak{R}$ — класс вполне приводимых Ω-групп.

При этих условиях справедлива теорема:

6.4. *Класс $\mathfrak{R}$ является двойственно радикальным классом относительно $\mathfrak{K}$, причем для любой Ω-группы G класса $\mathfrak{K}$ Ω-фактор-группа $G/\mathfrak{R}^*(G)$ распадается в прямую сумму конечного числа простых Ω-групп.*

Действительно, пусть H — пересечение всех ко-$\mathfrak{R}$-идеалов из G. Ввиду условия минимальности H есть пересечение лишь конечного числа ко-$\mathfrak{R}$-идеалов. По предыдущему предложению, H также ко-$\mathfrak{R}$-идеал, а это и означает, что $H=\mathfrak{R}^*(G)$. Ω-фактор-группа $G/\mathfrak{R}^*(G)$ является прямой суммой простых Ω-групп. Число таких слагаемых должно быть конечным за счет условия минимальности.

Пусть теперь $A(G)/\mathfrak{R}^*(G)$ — центр в $G/\mathfrak{R}^*(G)$. Тогда легко видеть, что $G/A(G)$ распадается в прямую сумму простых неабелевых идеалов и $A(G)$ содержится в каждом идеале из G, фактор-группа по которому обладает таким же разложением. Этот идеал $A(G)$ и называется корадикалом Алберта. Согласно предыдущему в $G/A(G)$ имеется единственное разложение в прямую сумму простых идеалов.

В общем случае, отправляясь от корадикалов, естественно рассматривать убывающие ряды таких корадикалов и соответственно нижние корадикалы. Понятно, что все члены таких убывающих рядов являются характеристическими Ω-подгруппами.

Идея корадикала представляет особый интерес еще в связи с тем обстоятельством, что, в силу теоремы 6.2, для каждого строго радикального класса $\mathfrak{R}$, замкнутого относительно гомоморфизмов, свойство Ω-группы быть $\mathfrak{R}$-полупростой определяет корадикал, и этот корадикал совпадает с радикалом $\mathfrak{R}$.

Различные конкретные радикалы и корадикалы в определенных классах Ω-групп находят многочисленные применения. Что касается аксиоматики радикалов и радикальных классов, то она подвергалась наиболее систематическому исследованию в серии работ А. Г. Куроша, открывшего эту область, и в работах его учеников.

Отметим еще, что в теории радикала полезна также точка зрения теоретико-групповых функций. Речь идет о функциях (функторах) f, сопоставляющих каждой Ω-группе G (вообще из класса $\mathfrak{K}$) некоторый ее идеал $f(G)$, причем должно выполняться следующее условие абстрактности: $f(G^{\varphi})=f(G)^{\varphi}$ для каждого изоморфизма φ между G и G^{φ}. Если $\mathfrak{X}$ — некоторый абстрактный класс Ω-групп, то ему, естественно, отвечают следующие две функции: $\mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{X}^*$. Первая из них сопоставляет каждой Ω-группе G сумму всех ее $\mathfrak{X}$-идеалов $\mathfrak{X}'(G)$, а вторая — пересечение $\mathfrak{X}^*(G)$ всех ко-$\mathfrak{X}$-идеалов. Если $\mathfrak{X}$ — радикальный класс, то $\mathfrak{X}'(G)=\mathfrak{X}(G)$ — соответствующий радикал. В дальнейшем мы иногда будем писать $\mathfrak{X}(G)$ вместо $\mathfrak{X}'(G)$ и в тех случаях, когда класс $\mathfrak{X}$ не является радикальным классом. Ясно также, что если $\mathfrak{X}$ — двойственно радикальный класс, то $\mathfrak{X}^*(G)$ — определенный выше $\mathfrak{X}$-корадикал.

В свою очередь, каждой функции f также естественно сопоставляются два класса Ω-групп. Через f' обозначается класс Ω-групп G, для которых выполняется $f(G)=G$, и f^* обозначает класс Ω-групп, удовлетворяющих условию $f(G)=0$. Легко видеть, что всегда $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{X}''$ и $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{X}^{**}$, а если $\mathfrak{X}$ — радикальный класс, то $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}''$, и если $\mathfrak{X}$ — двойственно радикальный класс, то $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^{**}$.

Условия радикальности и двойственной радикальности могут быть переведены также на язык функций. Нетрудно заметить, что если $\mathfrak{X}$ — двойственно радикальный класс, замкнутый относительно гомоморфизмов, то при любом гомоморфизме φ Ω-группы G выполняется $\mathfrak{X}^*(G^{\varphi})=\mathfrak{X}^*(G)^{\varphi}$. С другой стороны, легко также показать, что для каждой функции f с отмеченной инвариантностью относительно гомоморфизмов соответствующий класс f^* является двойственно радикальным,

замкнут относительно гомоморфизмов и еще выполняется равенство $f = f^{**}$.

Довольно просто проверяется также, что если функция f удовлетворяет условию: $f(H) = f(G) \cap H$ при любом идеале H Ω-группы G, то класс f' является радикальным классом, замкнут относительно взятия идеалов и выполняется $f = f''$. Вместе с тем хорошо известно, что, например, для групп без операторов, если $\mathfrak{R}$ — радикальный класс, замкнутый относительно взятия нормальных делителей, то всегда $\mathfrak{R}(H) = \mathfrak{R}(G) \cap H$. Соответствующие оговорки здесь приходится делать, так как в этом соотношении играет роль характеристичность подходящих идеалов.

Систематическому рассмотрению такого функционального подхода посвящена, в частности, недавняя работа Р. Бера [18].

§ 3. МОДЕЛИ. ОБЩИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1. Определения. Понятие модели является обобщением понятия универсальной алгебры и охватывает многие важные классы математических структур. В современной теории моделей алгебраические методы тесно переплетаются с методами математической логики, оказавшейся здесь хорошим средством для получения конкретных математических результатов. Впервые на такое применение математической логики указал А. И. Мальцев, получивший ряд фундаментальных результатов в теории моделей. Систематическому изложению основ этой теории посвящены важные работы А. Тарского [1] и книга А. Робинсона [1]; обзору исследований по теории моделей посвящены статьи А. Мостовского [1] и А. И. Мальцева [18].

Здесь мы ограничимся изложением некоторых, необходимых для дальнейшего, исходных понятий теории моделей и приведем доказательство локальной теоремы Гёделя — Мальцева.

Пусть G — некоторое множество и $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция n переменных, определенная на этом множестве и принимающая лишь два значения — *И* (истина) или *Л* (ложь), которые обозначаются также через 1 и 0 соответственно. Такая функция называется *n-местным*

предикатом, или, что то же самое, n-местным (n-арным) *отношением*. Если при этом для некоторого набора $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ выполняется равенство $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И$, то говорят, что указанный набор находится в отношении P. Можно говорить также и о нульместных предикатах: нульместные предикаты — это просто высказывания. Примерами предикатов служат отношения эквивалентности, порядка и т. д. Всякую алгебраическую операцию на множестве G также можно рассматривать как предикат. Делается это следующим образом.

Пусть ω — n-арная операция, определенная на множестве G. Этой операции сопоставляется $(n+1)$-местный предикат $P_\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ по правилу: $P_\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = И$, тогда и только тогда, когда $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = a_{n+1}$.

Множество G вместе с некоторым набором $\mathfrak{P}$ предикатов, определенных на этом множестве, называется *моделью*. Из только что сказанного относительно алгебраических операций следует, что всякую алгебру можно рассматривать как модель. Вообще же понятия алгебры и модели объединяются также в следующем общем определении алгебраической системы.

Алгебраической системой называется множество G, на котором определены система алгебраических операций Ω и некоторая система предикатов $\mathfrak{P}$.

Примерами алгебраических систем, не являющихся алгебрами, могут служить упорядоченные группы и вообще упорядоченные алгебры.

Хотя и общие алгебраические системы можно рассматривать как частный случай моделей, тем не менее делать так не всегда удобно. Причина этого неудобства состоит в определениях подмоделей, подсистем и гомоморфизмов моделей и алгебраических систем.

Пусть G — некоторая алгебраическая система с основным множеством G, основными операциями Ω и системой основных предикатов $\mathfrak{P}$ и пусть H — подмножество в G. Понятно, что все предикаты системы $\mathfrak{P}$ определены и на H. Что касается алгебраических операций, то их можно считать определенными на H лишь в том случае, когда множество H замкнуто относительно всех этих операций. Итак, подсистемой алгебраической системы является

всякое ее подмножество H, замкнутое относительно операций из Ω. Если, в частности, Ω пусто, т. е. G — модель, то всякое подмножество из G является подмоделью. Это означает также, что если алгебраическую систему G рассматривать как модель, заменив все операции из Ω соответствующими предикатами, то не всякая подмодель из G будет подсистемой алгебраической системы G.

Пусть дальше, кроме G, заданы еще одна, однотипная с G (т. е. с теми же $\mathfrak{P}$ и Ω) алгебраическая система G' и однозначное отображение φ системы G на G'. Говорят, что это отображение φ сохраняет n-местный предикат $P \in \mathfrak{P}$, если каждый раз из $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, вытекает $P(a_1\varphi, a_2\varphi, \ldots, a_n\varphi) = И$. Отображение φ называется *гомоморфизмом* G на G', если φ перестановочно со всеми операциями из Ω и сохраняет все предикаты из $\mathfrak{P}$.

Определим теперь естественные гомоморфизмы алгебраической системы G, связанные с некоторыми эквивалентностями, заданными на множестве G. Пусть ρ — произвольная эквивалентность на G. Покажем, что все предикаты из $\mathfrak{P}$ естественно переносятся на фактормножество G/ρ.

Возьмем n-местный предикат $P \in \mathfrak{P}$, и пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — набор из n смежных классов эквивалентности ρ. Положим $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = И$ в том и только в том случае, когда в каждом X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно так выбрать по представителю x_i, что будет $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = И$. Операции системы Ω переносятся на G/ρ уже не всегда, а лишь при условии, что ρ является конгруэнцией по отношению ко всем операциям этой системы. Для такой конгруэнции ρ мы получаем фактор-систему G/ρ, причем легко видеть, что естественное отображение: $x \to [x]_\rho$ является гомоморфизмом алгебраической системы G на фактор-систему G/ρ.

В частности, если G — модель, то всякая эквивалентность на основном множестве этой модели определяет гомоморфизм модели.

Из сказанного следует, что если алгебраическую систему G рассматривать как модель, то не каждый гомоморфизм такой модели будет одновременно и гомоморфизмом алгебраической системы G.

В теории общих алгебраических систем возникает необходимость рассматривать также понятие *сильного гомоморфизма*. Гомоморфизм φ системы G называется сильным, если всякий раз из истинности $P(a_1\varphi, a_2\varphi, \ldots, a_n\varphi)$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, $P \in \mathfrak{P}$, вытекает существование таких $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$, что $b_i\varphi = a_i\varphi$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $P(b_1, b_2, \ldots, b_n) = И$. Таким образом, акцент «сильный» адресуется только предикатам; для алгебраических операций соответствующее условие выполняется автоматически, и гомоморфизмы алгебр всегда являются сильными. Все естественные гомоморфизмы алгебраических систем на фактор-системы являются, очевидно, сильными гомоморфизмами.

Взаимно однозначный сильный гомоморфизм называется изоморфизмом. На сильные гомоморфизмы алгебраических систем непосредственно обобщается основная теорема о гомоморфизмах алгебр.

Так же как и для алгебр, понятие изоморфизма алгебраических систем позволяет говорить об абстрактных свойствах таких систем и абстрактных классах.

По аналогии с мультиоператорными группами можно определить еще следующее понятие. Если на группе G определены система предикатов $\mathfrak{P}$ и система операций Ω такие, что относительно системы Ω группа G является Ω-группой, то такую группу назовем $\mathfrak{P},\Omega$-группой. Гомоморфизмы $\mathfrak{P}$, Ω-групп должны сохранять групповую операцию и поэтому обладают ядрами. Такими ядрами служат идеалы соответствующей Ω-группы.

Сделаем теперь следующее замечание по поводу определения гомоморфизма. Пусть G и G' — две однотипные алгебраические системы и φ — отображение G на G'. Допустим далее, что ω — n-арная операция, входящая в число основных операций этих систем. Легко видеть, что отображение φ в том и только в том случае сохраняет эту операцию, когда φ сохраняет отвечающий этой операции предикат. Отсюда следует, что если G и G' рассматривать как модели, то всякий гомоморфизм этих моделей (G на G') является также гомоморфизмом исходных алгебраических систем, и наоборот.

Обычным путем определяются эндоморфизмы и сильные эндоморфизмы алгебраических систем, а также

автоморфизмы этих систем. В силу только что сказанного, если алгебраическую систему рассматривать как модель, то это не отразится на ее эндоморфизмах и автоморфизмах — они останутся теми же, что были для алгебраической системы. Совокупность всех эндоморфизмов данной алгебраической системы является, очевидно, полугруппой, — обозначим ее через $\mathfrak{E}(G)$, — а сильные эндоморфизмы составляют в этой полугруппе подполугруппу. Множество всех автоморфизмов алгебраической системы образует группу. Как и для алгебр, будем ее обозначать через $\mathfrak{A}(G)$ ($\mathrm{Aut}(G)$).

Заметим теперь, что значение понятия автоморфизма алгебраической системы, как и вообще математической структуры, состоит, в частности, в том, что оно позволяет уточнить смысл одинаковости поведения двух элементов системы. Два элемента a и b алгебраической системы G называются *подобными* (симметричными), если существует автоморфизм системы, переводящий один из этих элементов в другой. Подобные элементы одинаково ведут себя в данной алгебраической системе. Элемент a называется *индивидуальным* элементом, если он совпадает со всеми подобными ему. Другими словами, никакой другой элемент системы G не ведет себя в G так же, как a.

Аналогично тому, как это делается для одного элемента, можно говорить и о подобии (симметричности) двух множеств элементов, подобии двух подсистем. При этом характеристические подсистемы — это подсистемы, подобные только себе.

С другой стороны, симметрии заданного подмножества $X \subset G$ — это автоморфизмы алгебраической системы G, отображающие X на себя. Эти симметрии образуют группу — подгруппу в группе всех автоморфизмов.

Как уже отмечалось, свойства автоморфизмов алгебраической системы во многом определяют абстрактные свойства самой системы. Соответствующие примеры будут приведены в дальнейшем. С точки зрения общей теории алгебраических систем представляет интерес исследование природы систем без автоморфизмов или с малым числом автоморфизмов (группа всех автоморфизмов конечна). Различные конкретные примеры таких систем хорошо известны. С другой стороны, как показывает

теорема Мостовского — Эренфойхта из следующей главы, язык узкого исчисления предикатов для исследования логической природы таких систем, в общем, оказывается недостаточным.

Отметим еще, что всюду под группой автоморфизмов алгебраической системы G мы будем понимать произвольную подгруппу из $\mathrm{Aut}\,(G)$.

2. Язык узкого исчисления предикатов. Вся остальная часть этого параграфа в основном будет посвящена моделям. В теории моделей важную роль играет язык узкого исчисления предикатов (сокращенно УИП). Формулами этого языка задаются многие важные классы моделей. Известно, что учет логических средств, с помощью которых задаются различные классы моделей, составляет одну из наиболее интересных задач общей теории моделей. Класс моделей называется *элементарно аксиоматизируемым*, если он может быть задан некоторым набором формул языка УИП. Сейчас мы опишем этот язык.

Узкое исчисление предикатов использует следующие символы:

1) Символы объектов, или предметные символы, которые будут обозначаться через a, b, c, ..., а также этими же буквами с индексами. Запас этих символов определяется конкретной ситуацией, и их может быть любое фиксированное (в том числе и трансфинитное) число. При содержательном истолковании языка эти символы призваны обозначать элементы основного множества модели.

2) Символы переменных (короче, переменные) — x, y, z, ... и эти же буквы с индексами. Предполагается, что этих символов счетное множество. При интерпретации эти переменные имеют своей областью значений основное множество модели.

3) Символы отношений, или предикатные символы, P, Q, R, ... и они же с индексами. В содержательном истолковании значениями этих символов являются основные предикаты моделей. Поэтому предполагается, что каждому предикатному символу отвечает определенное n, являющееся «арностью» этого символа. Среди

символов отношений могут быть и нульарные, которые призваны обозначать высказывания. О запасе символов отношений можно сказать то же, что и о запасе предметных символов.

4) Логические символы: $\sim$ — отрицание, & — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\rightarrow$ — импликация, $\forall$ — квантор всеобщности, $\exists$ — квантор существования.

Кроме указанных символов, используются еще различные вспомогательные символы: скобки, запятые и т. д.

В случае, когда задан определенный набор предметных и предикатных символов, говорят, что задан определенный язык УИП, и этот язык обозначается некоторой буквой, например L.

С помощью перечисленных символов строятся *формулы* УИП, которые определяются индуктивно по следующим правилам:

а) Нульарный символ отношения и символ предиката с подставленными в соответствующем количестве символами объектов или переменных являются формулами. Так, например, выражение вида $P(x, y, \ldots, a, b, \ldots, z)$ есть формула. Такие формулы называются простыми или еще атомными.

Если в формулу $\mathfrak{A}$ входит переменная x и одновременно с ней встречается выражение $\exists x$ или $\forall x$, то x называется связанной переменной в $\mathfrak{A}$. Если x входит в $\mathfrak{A}$ без знаков кванторов, то такая переменная называется свободной.

б) Если $\mathfrak{A}(x)$ есть формула, в которую x входит как свободная переменная, то $(\exists x)\, \mathfrak{A}(x)$ и $(\forall x)\, \mathfrak{A}(x)$ также формулы.

в) Если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — формулы, причем одна и та же предметная переменная не встречается свободной в одной из них и связанной в другой, то и выражения $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ являются формулами.

г) Если $\mathfrak{A}$ — формула, то и $\sim\mathfrak{A}$ также формула.

Применяя указанные правила, мы получаем все возможные формулы УИП.

Нужно только заметить, что для построения сложных формул из простых используются скобки, причем имеются правила, позволяющие в некоторых случаях эти скобки опускать. Подчеркнем еще, что из определения формулы

следует, что если переменная x входит в формулу $\mathfrak{A}$, то во всех вхождениях в $\mathfrak{A}$ эта переменная одновременно или свободна, или везде является связанной.

Формула называется *замкнутой*, если в ней нет свободных переменных.

Формулы узкого исчисления предикатов приобретают содержательное истолкование при рассмотрении их связей с моделями. Такие связи устанавливаются по хорошо известным правилам математической логики. Напомним эти правила.

Пусть L — определенный язык УИП, в котором записываются все рассматриваемые нами формулы, и пусть G — некоторая модель с множеством основных предикатов $\mathfrak{P}$. Мы скажем, что *язык* L *задан на модели* G, если указано некоторое однозначное отображение (обозначим его здесь через $*$), относящее: а) каждому нульарному предикатному символу языка L определенное, зависящее от G значение истинности (*И* или *Л*); б) каждому не нульарному предикатному символу определенный предикат такой же «арности» из $\mathfrak{P}$; в) каждому предметному символу из L некоторый элемент основного множества модели. Такое отображение $*$ будем еще называть *содержательным истолкованием языка* L *на модели* G. Подчеркнем, что это отображение является однозначным, но не обязательно взаимно однозначным.

Если теперь язык L задан на модели G, то каждая простая формула этого языка может рассматриваться как некоторый предикат на G. Действительно, если, например, $P(x, y, \ldots, a, b, \ldots, z)$ — такая формула и $d, e, \ldots, g$ — элементы из G, то считаем, что значение истинности для $P(d, e, \ldots, a, b, \ldots, g)$ совпадает со значением истинности $P^*(d, e, \ldots, a^*, b^*, \ldots, g)$. Сказанное означает, что иногда можно просто отождествить предикатные символы из L с предикатами из $\mathfrak{P}$ и предметные символы с некоторыми элементами модели. Нужно только учитывать, что при таком отождествлении может произойти склеивание символов.

Дальше действуют следующие правила. Пусть формулы $\mathfrak{A}_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и $\mathfrak{A}_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ — все свободные переменные соответственно в $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ (эти множества перемен-

ных могут и пересекаться), уже определены как предикаты на множестве G. Допустим еще, что $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначает одну из формул $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$ или $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ — некоторые значения перечисленных переменных в G. Тогда значение истинности для высказывания $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ определяется по обычным правилам исчисления высказываний. Например, если $\mathfrak{A}$ есть $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$, то $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=И$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_2(a_{k+1}, \ldots, a_n)=И$ или $\mathfrak{A}_1(a_1, a_2, \ldots, a_k)=\mathfrak{A}_2(a_{k+1}, \ldots, a_n)=Л$. Аналогично $\sim\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=И$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n)=Л$.

Кванторы существования и всеобщности сопоставляют n-местному предикату $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n-1)$-местные предикаты:

$$(\forall x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

и

$$(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

определяемые следующими правилами. Для набора $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ выполняется $(\forall x_i)\,\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)=И$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)=И$, при всех элементах $a_i \in G$, и $(\exists x_i)\,\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)=И$ в том и только в том случае, когда в G имеется такой элемент a_i, что $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)=И$.

Указанные правила позволяют каждую формулу вида $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_k; P_1, P_2, \ldots, P_m)$, в которую входят $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $P_1, P_2, \ldots, P_m$, принадлежащие заданному на модели G языку L, рассматривать как предикат на этой модели. Такие предикаты называют *формульными*. Если при этом формула $\mathfrak{A}$ окажется замкнутой, то ей отвечает определенное высказывание о модели в целом. В том случае, когда такое высказывание оказывается истинным, говорят, что формула $\mathfrak{A}$ выполняется на модели G.

Пусть, далее, $\mathfrak{M}=[\mathfrak{A}_\alpha]$ — набор замкнутых формул (конечный или бесконечный) в языке УИП. Если все эти формулы заданы и выполняются на некоторой модели G, то про такую модель говорят, что она служит моделью набора формул $\mathfrak{M}$. Система формул $\mathfrak{M}$ называется *со-*

вместной, если она обладает хотя бы одной моделью. Наряду с таким содержательным определением совместности набора формул имеется и другое, эквивалентное ему, внутреннее (без перехода к моделям) определение совместности. Это определение использует дедуктивные свойства языка УИП. Оно нам не понадобится, и поэтому мы его не приводим. Всякий совместный набор формул $\mathfrak{M}$ определяет некоторый класс моделей — класс всех моделей данного набора формул $\mathfrak{M}$. Легко понять, что такие аксиоматизируемые классы моделей замкнуты относительно изоморфизмов, т. е. являются абстрактными классами. С другой стороны, аксиоматизируемые классы не обязательно замкнуты относительно гомоморфизмов. Условию замкнутости класса относительно гомоморфизмов посвящена теорема Линдона [1].

Заметим далее, что язык УИП допускает естественное расширение за счет добавления некоторого набора Ω символов алгебраических операций. При таком расширении в формулы на местах символов переменных и предметных символов могут входить еще, как нетрудно понять, и слова (термы) — элементы абсолютно свободной Ω-алгебры, построенной над множеством предметных символов и символов переменных. Легко видеть, каким образом следует определить понятие модели системы формул с символами операций: на этот раз моделью служит алгебраическая система в том смысле, как она была выше определена.

В заключение пункта приведем еще полезное понятие *формульного элемента* данной модели. Пусть G — некоторая модель относительно совокупности основных предикатных символов $\mathfrak{P}$, и g — элемент в G. Этот элемент называется формульным, если существует такой формульный одноместный предикат $\mathfrak{A}(x)$, составленный из предикатов, входящих в $\mathfrak{P}$, что элемент g и только он удовлетворяет этому предикату. Очевидно, что всякий формульный элемент является индивидуальным элементом модели.

3. Прямые произведения моделей. Ультрапроизведения. Понятие полной прямой суммы алгебр непосредственно обобщается на произвольные алгебраические

системы. Сейчас только, следуя сложившейся здесь традиции, вместо термина «сумма» мы будем употреблять «произведение».

Пусть задан некоторый набор G_α, $\alpha \in I$, однотипных алгебраических систем. Через G обозначим декартово произведение всех множеств G_α, т. е. совокупность всех функций — последовательностей (a_α), $a_\alpha \in G_\alpha$. Если теперь P — n-местный предикат, входящий в число основных предикатов, и (a_α^1), (a_α^2), $\ldots$, (a_α^n) — n элементов в G, то полагаем $P((a_\alpha^1), (a_\alpha^2), \ldots, (a_\alpha^n)) = И$ в том и только в том случае, когда при всех $\alpha \in I$ выполняется:

$$P(a_\alpha^1, a_\alpha^2, \ldots, a_\alpha^n) = И.$$

Таким образом все основные предикаты переносятся на G. Как переносятся на G операции, мы уже знаем. При этом только следует отметить, что если ω — некоторая n-арная операция из числа основных операций и P_ω — отвечающий ей $(n+1)$-местный предикат, то определение ω на G вполне согласуется с определением предиката P_ω. Итак, декартово произведение G становится алгебраической системой, однотипной со всеми G_α. Эта система называется *полным прямым произведением систем* G_α по всем $\alpha \in I$. В силу сделанного только что замечания, при определении полного прямого произведения алгебраических систем достаточно ограничиваться случаем моделей.

Теперь мы перейдем к определению ультрапроизведений и приведенных произведений моделей, обобщающих полные прямые произведения.

Идея приведенных произведений и ультрапроизведений алгебраических систем зародилась уже давно. В самое последнее время эти конструкции приобретают большое значение в общей теории моделей. Опираясь на ультрапроизведения, многие глубокие теоремы удается доказывать едиными методами. По-видимому, эти операции окажутся полезными и в теориях классических алгебраических систем.

В определении приведенных произведений и ультрапроизведений существенную роль играют соответственно понятия фильтра и ультрафильтра. Напомним содержание этих понятий (см. Н. Бурбаки [1]).

Фильтром на множестве I называется такое множество D подмножеств из I, что:

1) всякое подмножество из I, содержащее некоторое подмножество семейства D, также принадлежит D;

2) пересечение любого конечного числа множеств из D также принадлежит D;

3) пустое подмножество не принадлежит D.

Фильтр D называется *ультрафильтром*, если для любого подмножества $X \subset I$ либо само это X, либо его дополнение $\bar{X}$ принадлежит D.

Напомним еще, что некоторая система D подмножеств из I называется центрированной, если пересечение любой конечной части этой системы не пусто. Всякая центрированная система подмножеств порождает некоторый фильтр. Действительно, пусть D — центрированная система подмножеств множества I и пусть D' — система всех подмножеств из I, являющихся пересечениями всевозможных конечных частей из D. Обозначим через D'' систему всех подмножеств из I, содержащих некоторые подмножества из D'. Очевидно, что D'' — фильтр на множестве I. В частности, если A — произвольное непустое подмножество в I, то совокупность всех подмножеств X, удовлетворяющих условию $A \subseteq X$, составляет фильтр. Такой фильтр называется *главным фильтром*, порожденным множеством A. Легко видеть, что главный фильтр тогда и только тогда является ультрафильтром, когда порождающее множество A состоит из одного элемента множества I. Если I — конечное множество, то все фильтры на I являются главными фильтрами.

Приведем другие примеры. Если I — бесконечное множество, то дополнения всех конечных подмножеств из I составляют фильтр, который, очевидно, не является ультрафильтром. Пусть дальше I — некоторое линейно упорядоченное множество. Для каждого $\alpha \in I$ через $I(\alpha)$ обозначим совокупность всех $x \in I$, удовлетворяющих неравенству $\alpha \leqslant x$. Система всех подмножеств $I(\alpha)$ центрирована, и, следовательно, она порождает некоторый фильтр.

Докажем теперь следующее предложение:

3.1. *Каждый фильтр на произвольном множестве I может быть дополнен до ультрафильтра.*

Условимся говорить, что фильтр D' больше фильтра D, если $D \subset D'$. Фильтр D называется максимальным, если он не содержится ни в каком большем. Покажем, что максимальные фильтры и только они являются ультрафильтрами. Пусть D — максимальный фильтр и X — не принадлежащее D подмножество в I. Если допустить, что X имеет непустое пересечение с каждым $Y \in D$, то X и все эти Y составляют центрированную систему. В таком случае существует фильтр, содержащий X и все Y. Это противоречит максимальности D. Таким образом, найдется такое Y, что пересечение $X \cap Y$ пусто. Но тогда $Y \subset \bar{X}$ и $\bar{X} \in D$. Доказано, что D — ультрафильтр.

Пусть теперь D — ультрафильтр, и допустим, что он содержится в некотором фильтре D', и пусть $X \in D'$. Включение $\bar{X} \in D$ невозможно, так как в D' было бы пустым пересечение X и $\bar{X}$, так что $X \in D$ и $D = D'$. Следовательно, D — максимальный фильтр.

Нам остается заметить, что каждый фильтр содержится в некотором максимальном. Это непосредственно следует из леммы Цорна, так как объединение возрастающей последовательности фильтров также, очевидно, является фильтром.

Допустим теперь, что заданы некоторое множество I и фильтр D на этом множестве, и пусть еще каждому $\alpha \in I$ сопоставлена модель G_α из некоторого класса $\mathfrak{K}$ однотипных моделей. Пусть, далее, $G = \Pi G_\alpha$ обозначает декартово произведение всех основных множеств G_α. На этом декартовом произведении мы определим сейчас отношение эквивалентности ρ_D. Два элемента (a_α) и (b_α) называются сравнимыми по модулю ρ_D, $(a_\alpha)\,\rho_D\,(b_\alpha)$, если совокупность всех индексов α, для которых имеет место $a_\alpha = b_\alpha$, принадлежит фильтру D. Такое отношение действительно является эквивалентностью, и мы приходим к фактор-множеству G/ρ_D, которое обозначим через $\bar{G}$. Элементы из $\bar{G}$ будем обозначать через $\overline{(a_\alpha)}$. Пусть, далее, P — некоторый n-местный предикат из числа основных предикатов заданного класса. Определим этот предикат на $\bar{G}$ следующим образом. Если $\overline{(a_\alpha^1)}, \overline{(a_\alpha^2)}, \ldots, \overline{(a_\alpha^n)}$ — последовательность n элементов из $\bar{G}$, то полагаем

$P(\overline{(a_\alpha^1)}, \overline{(a_\alpha^2)}, \ldots, \overline{(a_\alpha^n)}) = И$ в том и только в том случае, когда совокупность индексов α, для которых $P(a_\alpha^1, a_\alpha^2, \ldots$ $\ldots, a_\alpha^n) = И$, принадлежит фильтру D. Легко проверить, что такое определение не зависит от выбора представителей в смежных классах, и, таким образом, $\overline{G}$ становится моделью, однотипной со всеми G_α. Так определенная модель $\overline{G}$ называется *приведенным* (*относительно фильтра* D) *произведением* семейства моделей G_α, $\alpha \in I$. Легко понять, что если фильтр D является главным, порожденным подмножеством A, то соответствующее приведенное произведение изоморфно полному прямому произведению моделей G_α по всем $\alpha \in A$. В том случае, когда фильтр D является ультрафильтром, соответствующее приведенное произведение называется *ультрапроизведением*.

Понятие ультрапроизведения играет большую роль благодаря теореме, которую мы сейчас намерены привести. Пусть $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторая формула УИП, записанная через основные предикаты заданного класса $\mathfrak{K}$, со свободными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть еще $\overline{(a_\alpha^1)}, \overline{(a_\alpha^2)}, \ldots, \overline{(a_\alpha^n)}$ — последовательность n элементов из ультрапроизведения G. Эту последовательность обозначим одной буквой $\tilde{a}$, и пусть $\mathfrak{A}(\tilde{a})$ обозначает результат подстановки в формулу вместо переменных x_i соответствующих $\overline{(a_\alpha^i)}$. Справедлива следующая теорема (см., например, С. Кочин [1] или А. Д. Тайманов [1]):

3.2. *Высказывание $\mathfrak{A}(\tilde{a})$ тогда и только тогда истинно на ультрапроизведении $\overline{G}$, когда совокупность индексов α, для которых $\mathfrak{A}(a_\alpha^1, a_\alpha^2, \ldots, a_\alpha^n) = И$, принадлежит D.*

Доказательство этой теоремы проводится индукцией по длине формулы $\mathfrak{A}$. Для простой (атомной) формулы утверждение содержится в самом определении ультрапроизведения. Допустим дальше, что теорема верна для формул $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, и докажем ее для формул $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$, $\sim\mathfrak{A}_1$, $(\exists x)\,\mathfrak{A}_1(x)$. Так как остальные логические операции выражаются через перечисленные, то этого будет достаточно.

Условимся дальше употреблять следующее обозначение: если некоторая формула $\mathfrak{A}$ выполняется на модели G, то этот факт обозначим через $G \models \mathfrak{A}$. Обозначим

еще через $\tilde{a}_\alpha$ последовательность $a_\alpha^1, a_\alpha^2, \ldots, a_\alpha^n$, и пусть $X_i = \{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}_i(\tilde{a}_\alpha)\}, i = 1, 2$; $X = \{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}_1(\tilde{a}_\alpha) \,\&\, \mathfrak{A}_2(\tilde{a}_\alpha)\}$. Здесь мы употребили обычный способ обозначения множества элементов с определенным свойством. Понятно, что $X = X_1 \cap X_2$.

Допустим теперь, что формула $\mathfrak{A}_1(\tilde{a}) \,\&\, \mathfrak{A}_2(\tilde{a})$ выполняется на модели $\overline{G}$. Тогда на $\overline{G}$ выполняются обе формулы $\mathfrak{A}_1(\tilde{a})$ и $\mathfrak{A}_2(\tilde{a})$. Ввиду предположения индукции получаем $X_1 \in D$, $X_2 \in D$. Но тогда и $X = X_1 \cap X_2 \in D$. С другой стороны, если $X \in D$, то оба множества, X_1 и X_2, принадлежат D. Из индуктивного предположения следует, что $\mathfrak{A}_i(\tilde{a}) = И$, $i = 1, 2$. Но тогда и формула $\mathfrak{A}_1(\tilde{a}) \,\&\, \mathfrak{A}_2(\tilde{a})$ выполняется на модели $\overline{G}$. Случай $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2$ разобран.

Рассмотрим случай $\sim\mathfrak{A}_1$. По предположению индукции, утверждение о том, что $\sim\mathfrak{A}_1(\tilde{a}) = И$, эквивалентно условию: $\{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}_1(\tilde{a}_\alpha)\} \notin D$, которое в свою очередь эквивалентно включению $\{\alpha \mid G_\alpha \models \sim\mathfrak{A}_1(\tilde{a}_\alpha)\} \in D$, и второй случай тоже разобран.

Остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{A}(\tilde{a})$ есть $(\exists x)\mathfrak{A}_1(x)$, где $\mathfrak{A}_1(x) = \mathfrak{A}_1(x, \tilde{a})$. Допустим, что на модели $\overline{G}$ формула $(\exists x)\mathfrak{A}_1(x)$ выполняется. Это значит, что в $\overline{G}$ найдется такой элемент $\bar{b} = \overline{(b_\alpha)}$, что формула $\mathfrak{A}(\bar{b}, \tilde{a})$ истинна на $\overline{G}$. По индуктивному предположению, получим $\{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}_1(b_\alpha, \tilde{a}_\alpha)\} \in D$. Учитывая при этом, что $\{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}_1(b_\alpha, \tilde{a}_\alpha)\} \subseteq \{\alpha \mid G_\alpha \models (\exists x)\mathfrak{A}_1(x, \tilde{a}_\alpha)\}$, получаем $\{\alpha \mid G_\alpha \models (\exists x)\mathfrak{A}_1(x, \tilde{a}_\alpha)\} \in D$. Допустим теперь, что $X = \{\alpha \mid G_\alpha \models (\exists x)\mathfrak{A}_1(x, \tilde{a}_\alpha)\} \in D$. Возьмем в G некоторый элемент $b = (b_\alpha)$, такой, что для $\alpha \in X$ имеет место $G_\alpha \models \mathfrak{A}_1(b_\alpha, \tilde{a}_\alpha)$, а для $\alpha \notin X$ компоненты b_α произвольны. Для такого b имеем:

$$\{\alpha \mid G_\alpha \models (\exists x)\mathfrak{A}_1(x)\} = \{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}_1(b_\alpha, \tilde{a}_\alpha)\}.$$

Таким образом, ввиду предположения индукции на $\overline{G}$ выполняется формула $\mathfrak{A}_1(\bar{b}, \tilde{a})$, а следовательно, и формула $(\exists x)\mathfrak{A}_1(x, \tilde{a})$. Этим теорема доказана.

Если, в частности, $\mathfrak{A}$ замкнутая формула, то эта формула тогда и только тогда выполняется на $\overline{G}$, когда множество индексов α, таких, что $\mathfrak{A}$ выполняется на G_α, принадлежит фильтру D.

Непосредственным следствием доказанной теоремы является следующее утверждение:

3.3. *Всякий элементарно аксиоматизируемый класс* $\mathfrak{K}$ *замкнут относительно ультрапроизведений.*

Для доказательства достаточно лишь вспомнить, что все множество I является элементом каждого фильтра. Значит, если формула выполняется на каждой модели G_α, то она выполняется и на ультрапроизведении этих моделей по любому ультрафильтру. Пример класса линейно упорядоченных множеств показывает, что аналогичное утверждение относительно полных прямых произведений неверно *).

Рассмотрим далее, как выглядит определение приведенного произведения в применении к алгебрам.

Пусть все G_α, $\alpha \in I$, — Ω-алгебры, D — некоторый фильтр на множестве I, G — полное прямое произведение всех G_α, и ρ_D — определенная раньше эквивалентность. Покажем, что эта эквивалентность является конгруэнцией Ω-алгебры G. Пусть ω — n-арная операция из Ω, (a_α^1), (a_α^2), ..., (a_α^n) и (b_α^1), (b_α^2), ..., (b_α^n) — элементы в G такие, что $(a_\alpha^i)\,\rho_D\,(b_\alpha^i)$. Обозначим еще $X_i = \{\alpha \mid a_\alpha^i = b_\alpha^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и пусть $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$. Все X_i, а вместе с ними и X, принадлежат D. Ясно, что для всех $\alpha \in X$ выполняется $a_\alpha^1 a_\alpha^2 \ldots a_\alpha^n \omega = b_\alpha^1 b_\alpha^2 \ldots b_\alpha^n \omega$, откуда вытекает, что $(a_\alpha^1)(a_\alpha^2) \ldots (a_\alpha^n)\,\omega\rho_D\,(b_\alpha^1)(b_\alpha^2) \ldots (b_\alpha^n)\,\omega$, т. е. ρ_D действительно является конгруэнцией. Теперь уже нетрудно понять, что фактор-алгебра G/ρ_D — это и есть приведенное произведение по фильтру D алгебр G_α.

В том случае, когда все G_α — мультиоператорные группы, конгруэнции ρ_D отвечает идеал, состоящий из таких элементов из G, у которых индексы нулевых компонент составляют множество, принадлежащее D.

4. Локальная теорема Гёделя—Мальцева. Система замкнутых формул УИП называется *локально совместной*,

---

*) Более того, нетрудно заметить, что в этом примере приставка «ультра» необходима: если на некотором множестве I задан фильтр D, и G — линейно упорядоченное множество, то соответствующая приведенная степень этого множества тогда и только тогда линейно упорядочена, когда D есть ультрафильтр.

если любая конечная подсистема этой системы совместна. В настоящем пункте доказывается следующая теорема:

4.1. *Всякая локально совместная система замкнутых формул* УИП *является совместной системой.*

Эта теорема часто формулируется в других вариантах и в связи с этим имеет и другие названия: теорема полноты, теорема компактности, принцип локализации. Для счетного набора формул она доказана К. Гёделем (см. Гильберт — Аккерман [1]), а для общего случая А. И. Мальцевым [1]. А. И. Мальцеву принадлежит также открытие того факта, что локальная теорема УИП может служить мощным инструментом содержательной математики. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться этой теоремой.

Для доказательства теоремы мы воспользуемся аппаратом ультрапроизведений. (См. уже упоминавшиеся работы С. Кочина и А. Д. Тайманова. Вообще же этот метод, по-видимому, идет от Е. Лося и А. Тарского.) Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая локально совместная система замкнутых формул УИП. Через I обозначим совокупность всех конечных подсистем системы $\mathfrak{M}$. Для каждого $\alpha \in I$ существует модель G_α, на которой выполняются все аксиомы набора α. В результате мы получаем набор моделей G_α, $\alpha \in I$. Теперь для каждой формулы $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ через $S_{\mathfrak{A}}$ обозначим множество всех $\alpha \in I$ таких, что $\mathfrak{A}$ выполняется на G_α. Система S всех подмножеств $S_{\mathfrak{A}}$ является центрированной системой. Действительно, если $S_{\mathfrak{A}_1}, S_{\mathfrak{A}_2}, \ldots, S_{\mathfrak{A}_n}$ — конечная подсистема в S, то для $\alpha = [\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n]$ существует модель G_α, на которой истинна каждая аксиома из α. Очевидно, что α принадлежит пересечению всех $S_{\mathfrak{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

По теореме 3.2 в I существует ультрафильтр D, содержащий центрированную систему S. Рассмотрим ультрапроизведение $\bar{G}$ всех G_α, $\alpha \in I$, по такому ультрафильтру. Если теперь $\mathfrak{A}$ — произвольная формула из набора $\mathfrak{M}$, то $\{\alpha \mid G_\alpha \models \mathfrak{A}\} = S_{\mathfrak{A}} \in D$, и по теореме 3.3 формула $\mathfrak{A}$ выполняется на модели $\bar{G}$. Таким образом, на модели $\bar{G}$ выполняются все формулы набора $\mathfrak{M}$, Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится еще одна конструкция, имеющая отношение к локальной теореме. Эта конструкция позволяет общий случай локально совместной системы формул свести к случаю локально совместной системы формул исчисления высказываний. Первоначальные доказательства теоремы 4.1 были основаны именно на этой идее. Следует еще заметить, что каждое доказательство локальной теоремы содержит некоторый намек относительно характера модели, на которой выполняются все формулы заданного набора. В связи с этим желательно иметь различные доказательства, приводящие к разным конструкциям подходящих моделей.

Напомним теперь, что формула $\mathfrak{A}$ УИП имеет *нормальный вид*, если она записана в виде $(q_1x_1)(q_2x_2)\ldots$ $\ldots(q_nx_n)\mathfrak{A}'$, где (q_ix_i) означает квантор существования или всеобщности, отнесенный к x_i, а часть $\mathfrak{A}'$ не содержит кванторов. При этом выражение $(q_1x_1)(q_2x_2)\ldots(q_nx_n)$ называется кванторной приставкой формулы. Две системы замкнутых формул называются *эквивалентными*, если каждая модель одной из этих систем является также моделью и для другой системы. Известно, что всякую формулу УИП можно привести к нормальному виду, причем если все формулы некоторой системы $\mathfrak{M}$ заменить соответствующими нормальными формулами, то получится система, эквивалентная системе $\mathfrak{M}$. Этот факт достаточно прост и приводится в любом руководстве по математической логике. Опираясь на него, мы можем предполагать, что все рассматриваемые формулы имеют нормальный вид.

Рассмотрим еще один вид замены формул УИП.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая формула нормального вида, и допустим, что в кванторной приставке этой формулы участвуют кванторы существования. Каждой такой формуле мы сопоставим некоторую новую формулу без кванторов существования, но содержащую символы операций. Сделаем это по следующему правилу. Пусть формула $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$(q_1x_1)(q_2x_2)\ldots(q_nx_n)\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

где формула $\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уже без кванторов, и пусть $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ — индексы, отвечающие кванто-

рам существования. Будем производить замены в формуле $\mathfrak{A}$, двигаясь слева направо. Вначале опускаем квантор существования, стоящий на i_1-м месте, и вместо x_{i_1} подставим в $\mathfrak{A}'$ выражение (слово) $x_1x_2 \ldots x_{i_1-1}\omega_1$, где ω_1 — символ (i_1-1)-арной (возможно нульарной) операции. Допустим, что уже произведены замены на местах $i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}$. Теперь опускаем квантор существования, стоящий на i_s-м месте, и вместо x_{i_s} подставляем выражение $x_1x_2 \ldots x_l\omega_s$, где ω_s — снова символ операции и x_i — все переменные с номерами, меньшими i_s, и стоящие под квантором всеобщности. Так продолжаем k раз.

Например, если формула $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\exists v)(\forall w)\mathfrak{A}'(x, y, z, u, v, w),$$

то после всех замен получится формула вида

$$(\forall y)(\forall z)(\forall w)\mathfrak{A}'(\omega_1, y, z, yz\omega_2, yz\omega_3, w).$$

Допустим теперь, что $\mathfrak{M}$ — некоторый набор формул УИП, записанных в нормальном виде, и $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — система формул, полученных из формул, входящих в $\mathfrak{M}$, описанным только что приемом *элиминации кванторов существования*. В формулы системы $\widetilde{\mathfrak{M}}$ входит некоторый набор символов операций Ω. Покажем, что из каждой модели системы $\mathfrak{M}$ можно получить модель для $\widetilde{\mathfrak{M}}$ и наоборот.

Пусть модель G является моделью набора формул $\mathfrak{M}$. Нужно показать, что все операции системы Ω можно так определить на множестве G, что в результате G окажется моделью набора $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Пусть, например, формула (1) входит в набор $\mathfrak{M}$. Допустим, что $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{s-1}$ уже определены как алгебраические операции на G, причем так, что после соответствующих подстановок в формулу $\mathfrak{A}$ на места $i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}$ (по указанному выше правилу) получится истинная на G формула. Нам предстоит определить ω_s как операцию на множестве G. Придавая переменным $x_1, x_2, \ldots, x_l$ некоторые определенные значения $h_1, h_2, \ldots, h_l$ из G, мы получим, в силу предположений, истинную на G формулу

$$(\exists x_{i_s})(q_{i_s+1}x_{i_s+1}) \ldots (q_nx_n)\mathfrak{A}'(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{i_s-1}, x_{i_s}, \ldots, x_n).$$

Следовательно, в G существуют такие элементы h, что выполняется:

$$(q_{i_s+1}x_{i_s+1}) \ldots (q_n x_n)\,\mathfrak{A}'(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{i_s-1}, h, x_{i_s+1}, \ldots, x_n).$$

Возьмем один из элементов h и положим $h_1 h_2 \ldots h_l \omega_s = h$. Так будем поступать для любых распределений значений аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_l$. В результате ω_s будет определена как операция на G. Ясно, что если теперь произвести в формуле $\mathfrak{A}$ соответствующие замены на местах $i_1, i_2, \ldots, i_s$, то получится истинное на G высказывание. Продолжая таким образом k раз, мы определим все ω_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ как операции на G, причем соответствующая формула в $\widetilde{\mathfrak{M}}$ выполняется на G. Аналогично поступим со всеми формулами из $\mathfrak{M}$, и нужное утверждение будет доказано.

Допустим теперь, что алгебраическая система G является моделью набора $\widetilde{\mathfrak{M}}$. В таком случае все предикатные символы, входящие в формулы системы $\mathfrak{M}$, определены как предикаты на G. Пусть дальше $\mathfrak{A}$ — формула из $\mathfrak{M}$, и $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — отвечающая ей формула набора $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Легко видеть, что истинность $\widetilde{\mathfrak{A}}$ на G означает также истинность формулы $\mathfrak{A}$. Действительно, эти формулы отличаются лишь местами, связанными с кванторами существования, а на этих местах существование нужных элементов обеспечивается применением алгебраических операций.

Приведем дальше следующее утверждение.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая система формул УИП, включающих, возможно, символы алгебраических операций Ω и не содержащих кванторы существования. Пусть еще X — совокупность всех предметных символов, входящих в формулы системы $\mathfrak{N}$, а если таких символов нет, то пусть X состоит из одного произвольного предметного символа. Обозначим через G^0 абсолютно свободную Ω-алгебру над множеством X, и пусть $\mathfrak{N}^0$ — множество всех формул, получающихся из формул системы $\mathfrak{N}$ опусканием всех кванторов и заменой переменных всевозможными элементами из G^0, — все эти формулы уже «постоянны». Тогда всякая модель системы $\mathfrak{N}$ служит моделью и для $\mathfrak{N}^0$, и наоборот.

Действительно, пусть алгебраическая система G служит моделью набора $\mathfrak{N}$ относительно некоторого содержательного истолкования $*$. Если множество X состоит из предметных символов, входящих в формулы из $\mathfrak{N}$, то этим предметным символам отвечают определенные элементы из G. Так как G^0 — свободная Ω-алгебра над X, то отображение $*$ может быть однозначно продолжено до гомоморфизма Ω-алгебры G^0 в G. Если X состоит из одного произвольно выбранного предметного символа, то этому символу сопоставим произвольный элемент из G и снова продолжим отображение $*$ до гомоморфизма G^0 в G. Если теперь $\mathfrak{A}$ — некоторая формула в $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}^0$ — произвольная из отвечающих ей формул в $\mathfrak{N}^0$, то имеет смысл говорить о значении $\mathfrak{A}^0$ на G, причем очевидно, что из истинности $\mathfrak{A}$ вытекает и истинность $\mathfrak{A}^0$.

Если, с другой стороны, G — модель системы формул $\mathfrak{N}^0$, то понятно, что все предикатные символы из $\mathfrak{N}$ определены как предикаты на G, и все формулы из $\mathfrak{N}$ оказываются при этом истинными на G.

Формулы набора $\mathfrak{N}^0$ образованы с помощью операций исчисления высказываний из нульместных предикатных символов и из выражений вида $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где P — n-местный символ отношения и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы из G^0. Все эти «кирпичи», из которых строятся формулы системы $\mathfrak{N}^0$, можно рассматривать как систему основных высказываний, и тогда формулы из $\mathfrak{N}^0$ превратятся в формулы исчисления высказываний. При таком новом рассмотрении набор этих формул обозначим через $\mathfrak{N}^{00}$. Если $\mathfrak{N}^0$ — совместный набор формул, то таким же будет и набор $\mathfrak{N}^{00}$. Мы получим нужное нам сведéние к исчислению высказываний, если покажем, что из совместности набора $\mathfrak{N}^{00}$ вытекает совместность набора формул $\mathfrak{N}^0$.

Совместность набора формул $\mathfrak{N}^{00}$ означает, что существует некоторое распределение значений истинности основных высказываний, при котором все формулы из $\mathfrak{N}^{00}$ оказываются истинными. Пусть M — одно из таких распределений. Тогда полагаем, что все $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и все нульместные предикаты, входящие в формулы из $\mathfrak{N}^0$, принимают свои значения согласно

распределению M. Таким путем уже на множестве G^0 будет определена модель, которая вместе с алгебраическими операциями составит алгебраическую систему, служащую моделью набора формул $\mathfrak{M}^0$.

Если теперь считать, что локальная теорема для формул исчисления высказываний доказана, то, опираясь на приведенные построения, можно заключить, что она верна и в общем случае. Кроме того, отсюда же следует, что если $\mathfrak{M}$ — совместный набор формул, то в качестве основного множества модели системы формул $\mathfrak{M}$ можно взять основное множество подходящей абсолютно свободной Ω-алгебры G^0. Этим последним обстоятельством нам в дальнейшем придется воспользоваться.

По поводу доказательства теоремы 4.1 для исчисления высказываний см., например, А. И. Мальцев [1] и П. С. Новиков [1]. Другие локальные теоремы аналогичного типа, но более алгебраизированные содержатся в работах Б. Неймана [4] и Д. Маклейна [2]. Некоторые обобщения, относящиеся к языку второй ступени, см. в важной работе А. И. Мальцева [15].

5. Дальнейшие обобщения. Обобщением понятия модели является понятие *многооснóвной модели*. В многоосновной модели несколько основных множеств и, кроме предикатов, определенных на этих множествах, допускаются еще предикаты, связывающие элементы из различных основных множеств. Еще более общее понятие — это понятие многоосновной алгебраической системы (хотя, впрочем, ясно, что многоосновные алгебраические системы можно рассматривать как многоосновные модели).

На многоосновные алгебраические системы естественным путем обобщается понятие гомоморфизма и, в частности, изоморфизма и автоморфизма, а также понятие подсистемы. Определим, например, гомоморфизмы.

Пусть $[G_1, G_2, \ldots, G_n]$ и $[G'_1, G'_2, \ldots, G'_n]$ — две однотипные алгебраические системы с n основными множествами и пусть имеется n однозначных отображений: $G_1 \to G'_1$, $G_2 \to G'_2$, $\ldots$, $G_n \to G'_n$. Все эти отображения удобно рассматривать как одно отображение μ,

причем если $g \in G_i$, то образ этого g будем обозначать через g^μ.

Допустим дальше, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторое отношение, заданное на обеих системах. Предполагается, что каждой переменной здесь указано в качестве области значений определенное основное множество. Отображение μ сохраняет этот предикат, если при всевозможных значениях аргументов выполняется импликация $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to P(x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_n^\mu)$. Аналогично определяется сохранение многоместной алгебраической операции. И дальше: μ есть гомоморфизм, если это отображение сохраняет все отношения и операции, заданные на наших алгебраических системах.

В следующей главе нам придется иметь дело с гомоморфизмами двуосновных алгебраических систем специального типа.

Обобщениям универсальных алгебр посвящена недавняя работа Ф. Хиггинса [3], в которой рассматриваются многоосновные алгебры, допускающие любое бесконечное число основных множеств. В этой работе, в частности, обобщается на многоосновный случай теорема Биркгофа о характеристике примитивных классов.

В заключение настоящей вводной главы нужно отметить, что изложенное в ней не дает, конечно, полного представления о современном состоянии общей теории алгебраических систем, очень богатой уже собственной интересной проблематикой. Большое место в этой теории занимают задачи, связанные с определением наиболее естественного места для многих теорем, идей и конструкций, уже достаточно зарекомендовавших себя в различных конкретных ситуациях. Это относится, в частности, к учениям о гомоморфизмах, прямых и свободных произведениях, образующих элементах и определяющих соотношениях, теории радикалов. Значительная часть рассмотрений следующих двух глав также относится к этому направлению.

Вторым большим направлением, и, пожалуй, основным сейчас, является исследование классов моделей с точки зрения связей между видом формул — аксиом, задающих эти классы, и их математическими свойствами,

Третье направление связано с алгоритмическими вопросами алгебры.

Ведущиеся сейчас исследования в общей теории алгебраических систем начали также значительно влиять и на уже давно сложившиеся классические алгебраические теории: они приводят здесь к новым интересным постановкам задач.

И еще мы заметим, что алгебраические системы, в том числе и многоосновные, — это только одна из разновидностей общих математических структур, определенных Н. Бурбаки [1] (см. также п. 2.3.2).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПАРЫ

1. Предварительные замечания. При рассмотрении групп автоморфизмов алгебраических систем важную роль играет общая идея представлений и связанное с ней понятие пары. Приведем относящиеся сюда определения.

Пусть G — алгебраическая система (с одним основным множеством) и Γ — некоторая группа. Мы скажем, что задано *представление* группы Γ автоморфизмами алгебраической системы G или, короче, представление Γ относительно G, если определена операция $\circ$ — назовем ее действием, — сопоставляющая каждой паре (g, σ), $g \in G$ и $\sigma \in \Gamma$, определенный элемент $g \circ \sigma$, принадлежащий G, и такая, что выполняются условия:

а) отображение $g \to g \circ \sigma$ является автоморфизмом алгебраической системы G для каждого $\sigma \in \Gamma$,

б) $g \circ \sigma\varphi = (g \circ \sigma) \circ \varphi$ при любых σ, $\varphi \in \Gamma$ и $g \in G$.

К понятию представления можно подойти и по-другому. Из условия а) следует, что если задано представление группы Γ относительно системы G, то одновременно задано и отображение Γ в группу $\mathfrak{A}(G)$ всех автоморфизмов этой алгебраической системы. Обозначим такое отображение через f. Отображение f является гомоморфизмом. Действительно,

$$g(\sigma\varphi)^f = g \circ \sigma\varphi = (g \circ \sigma) \circ \varphi = g\sigma^f\varphi^f = g(\sigma^f\varphi^f),$$

т. е. $(\sigma\varphi)^f = \sigma^f\varphi^f$.

Если, с другой стороны, задан некоторый гомоморфизм f группы Γ в $\mathfrak{A}(G)$, то, полагая $g \circ \sigma = g\sigma^f$, мы, очевидно, определим представление Γ относительно G. Таким образом, задание представления группы Γ относительно алгебраической системы G равносильно зада-

нию некоторого гомоморфизма группы Г в группу $\mathfrak{A}(G)$. *Ядром* представления называется ядро соответствующего гомоморфизма f. Если это ядро равно единице группы Г, т. е. f есть изоморфизм, то представление называется *точным*. Другими словами, представление является точным, если из равенств $g \circ \sigma = g \circ \varphi$ при всех $g \in G$ следует $\sigma = \varphi$.

Всякую группу Г, для которой задано представление относительно алгебраической системы G, можно также рассматривать как группу автоморфизмов этой системы. Единственное существенное отличие такой «обобщенной» группы автоморфизмов от «истинной» группы автоморфизмов состоит в том, что некоторые различные обобщенные автоморфизмы могут действовать в G как один и тот же истинный автоморфизм. К таким обобщенным группам автоморфизмов мы естественно приходим и при изучении истинных групп автоморфизмов. Действительно, если Г — (истинная) группа автоморфизмов алгебраической системы G, и H — допустимая подсистема в G, то группа Г является уже, вообще говоря, обобщенной группой автоморфизмов системы H.

Допустим дальше, что задано представление группы Г относительно алгебраической системы G. В таком случае говорят, что задана *пара* (G, Γ). При этом группу Г мы иногда будем еще называть *действующей группой*, а G — *областью действия*. Образ группы Г при заданном представлении в $\mathfrak{A}(G)$ назовем *проекцией* Г относительно G. Пара (G, Γ) называется *точной*, если соответствующее представление является точным. Примером точной пары служит естественная пара $(G, \mathfrak{A}(G))$, в которой действие $\circ$ совпадает с действием соответствующих автоморфизмов.

Понятно, что пару (G, Γ) можно трактовать также и как алгебраическую систему с двумя основными множествами. В этой двуосновной алгебраической системе, кроме операций и отношений системы G и групповых операций в Г, имеется еще бинарная операция с одним аргументом в G, другим в Г и с результатом снова в G. Такой операцией является действие $\circ$.

Условимся, далее, пару (G, Γ) называть *чистой* парой, если G рассматривается только как множество,

а возможно имеющиеся там операции и отношения нами не учитываются. Другими словами, чистая пара состоит из множества G, группы Γ и некоторого представления этой группы подстановками множества G.

Фиксируем теперь некоторую чистую пару (G, Γ), и пусть H и Σ — подмножества в G и Γ соответственно. Через $H \circ \Sigma$ будем обозначать совокупность всех элементов из G вида $h \circ \sigma$, $h \in H$, $\sigma \in \Sigma$. Множество H называется Σ-допустимым (допустимым относительно Σ), если $H \circ \Sigma \subset H$. Непосредственно видно, что если множество H допустимо относительно Σ, то это множество допустимо и относительно подполугруппы, порожденной в Γ множеством Σ. Допустимость относительно подгруппы $\{\Sigma\}$, порожденной Σ, может при этом не выполняться.

Легко проверяется следующее утверждение: множество H тогда и только тогда допустимо относительно подгруппы $\{\Sigma\}$, когда при любом $\sigma \in \Sigma$ выполняется $H \circ \sigma = H$.

Действительно, условие $H \circ \sigma = H$ равносильно двум включениям $H \circ \sigma \subset H$ и $H \circ \sigma^{-1} \subset H$. Если теперь через Σ' обозначить множество, состоящее из элементов множества Σ и обратных к ним, то требование, чтобы было $H \circ \sigma = H$ при всех $\sigma \in \Sigma$, оказывается равносильным допустимости H относительно Σ'. Остается заметить, что подполугруппа, порожденная множеством Σ', совпадает с подгруппой $\{\Sigma\}$.

Очевидно, что пересечение и сумма произвольной совокупности Σ-допустимых подмножеств из G также Σ-допустимы. Поэтому, в частности, имеет смысл говорить о *Σ-замыкании* произвольного подмножества из G: Σ-замыкание подмножества H из G — это пересечение всех Σ-допустимых подмножеств из G, содержащих H. Если через (Σ) обозначить подполугруппу в Γ, порожденную множеством Σ и единицей, то легко видеть, что Σ-замыкание подмножества H совпадает с множеством $H \circ (\Sigma)$.

Множества вида $a \circ \Gamma$ по различным $a \in G$ называются Γ-*траекториями* (или просто *траекториями*, а иногда еще и *орбитами*). Так как в Γ имеется единица и эта единица действует как тождественное преобразование, то $a \in a \circ \Gamma$. Покажем еще, что если $b \in a \circ \Gamma$, то $a \circ \Gamma =$

$= b \circ \Gamma$. В самом деле, пусть $b = a \circ \sigma$ при некотором $\sigma \in \Gamma$. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ будет $b \circ \gamma = (a \circ \sigma) \circ \gamma = a \circ \sigma\gamma \in a \circ \Gamma$, откуда $b \circ \Gamma \subset a \circ \Gamma$. С другой стороны, $a = a \circ \sigma\sigma^{-1} = (a \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} = b \circ \sigma^{-1}$, и поэтому $a \circ \Gamma \subset b \circ \Gamma$. Из этих включений следует равенство $a \circ \Gamma = b \circ \Gamma$.

Приведенное свойство означает, что две различные Г-траектории не могут иметь общих элементов, и, следовательно, множество всех Г-траекторий на G определяет некоторую эквивалентность.

Понятно, что суммами Г-траекторий исчерпываются все возможные Г-допустимые (короче, допустимые) подмножества из G, и, значит, Г-траектории служат атомами решетки всех допустимых подмножеств множества G.

Введем дальше следующие обозначения.

Через $\mathfrak{z}(H) = \mathfrak{z}_\Gamma(H)$ будем обозначать совокупность всех σ из Γ таких, что при любом $h \in H$ выполняется равенство $h \circ \sigma = h$. $\mathfrak{z}(H)$ — подгруппа в Г, называемая Г-*централизатором* множества H. Г-*нормализатор* множества H — это совокупность $N_\Gamma(H)$ всех $\sigma \in \Gamma$ таких, что $H \circ \sigma = H$. $N_\Gamma(H)$ также подгруппа в Г. Обозначим еще через $Z_G(\Sigma)$, $\Sigma \subset \Gamma$, подмножество в G, состоящее из всех таких $a \in G$, что при любом $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $a \circ \sigma = a$. Подмножество $Z_G(\Sigma)$ называется Σ-*центром* множества G. Ясно, что $Z_G(\Sigma) = Z_G(\{\Sigma\})$.

Возвращаясь к парам, в которых область действия G есть алгебраическая система, отметим, что Σ-центр $Z_G(\Sigma)$ является всегда подсистемой системы G. Кроме того, очевидно, что если Σ — полугруппа с единицей в Г, X — подмножество в G, и Ω — все основные операции алгебраической системы G, то подсистема $\{X \circ \Sigma\}^\Omega$ совпадает с минимальной Σ-допустимой подсистемой в G, содержащей X.

2. Гомоморфизмы пар. Подпары. В этом и следующих пунктах речь будет идти о парах (G, Γ), в которых G является алгебраической системой относительно некоторых фиксированных наборов Ω и $\mathfrak{P}$ алгебраических операций и отношений. Следовательно, все рассматриваемые здесь пары однотипные. Понятие гомоморфизма

таких пар является частным случаем общего определения гомоморфизмов многоосновных алгебраических систем. Приведем это определение применительно к парам. Пусть (G, Γ) и (G', Γ') — две пары и пусть μ обозначает два отображения: G на G' и Γ на Γ'. Такое отображение является *гомоморфизмом пар*, если отображения $\mu: G \to G'$ и $\mu: \Gamma \to \Gamma'$ являются гомоморфными и, кроме того, выполняется условие:

$$(g \circ \sigma)^{\mu} = g^{\mu} \circ \sigma^{\mu}$$

при всех $g \in G$ и $\sigma \in \Gamma$.

Легко заметить, что если пара (G', Γ') является точной, то из последнего условия уже автоматически следует, что отображение $\mu: \Gamma \to \Gamma'$ есть гомоморфизм. Действительно, пусть $\sigma, \varphi \in \Gamma$ и g — произвольный элемент в G. Тогда

$$g^{\mu} \circ (\sigma\varphi)^{\mu} = (g \circ \sigma\varphi)^{\mu} = ((g \circ \sigma) \circ \varphi)^{\mu} = (g \circ \sigma)^{\mu} \circ \varphi^{\mu} = \\ = (g^{\mu} \circ \sigma^{\mu}) \circ \varphi^{\mu} = g^{\mu} \circ \sigma^{\mu}\varphi^{\mu},$$

и для точной пары (G', Γ') это означает, что $(\sigma\varphi)^{\mu} = \sigma^{\mu}\varphi^{\mu}$.

Если гомоморфизм $\mu: G \to G'$ является сильным, то соответствующий гомоморфизм пар естественно назвать *сильным гомоморфизмом пар*.

Гомоморфизм μ есть *изоморфизм пар*, если отображения $\mu: G \to G'$ и $\mu: \Gamma \to \Gamma'$ являются изоморфизмами. Если μ — изоморфизм двух пар (G, Γ) и (G', Γ') с общей действующей группой Γ и если на Γ отображение μ является тождественным, то такой изоморфизм μ называется *эквивалентностью пар*, а соответствующие представления группы Γ называются эквивалентными. Понятие эквивалентности пар может быть истолковано еще следующим образом. Очевидно, что если задана пара (G, Γ), то элементы из Γ можно рассматривать как унарные операции на множестве G, и G при этом становится алгебраической системой с дополнительным набором операций Γ (Γ-системой). Если теперь G и G' — две такие Γ-системы, то каждый изоморфизм этих новых систем является в то же самое время эквивалентностью пар (G, Γ) и (G', Γ) и наоборот.

Естественным образом определяется и понятие *фактор-пары*. Пусть (G, Γ) — некоторая пара и пусть ρ — конгруэнция алгебраической системы G. Так же как и в п. 1.1.2, можно говорить о конгруэнции ρ^σ при любом $\sigma \in \Gamma$. Конгруэнция ρ называется *допустимой*, если для всех $\sigma \in \Gamma$ выполняются $\rho^\sigma = \rho$. Допустимость конгруэнции ρ означает также, что если алгебраическую систему G рассматривать еще как Γ-систему, то ρ является также и конгруэнцией этой Γ-системы.

Предположим, что ρ — допустимая конгруэнция. В таком случае отображение $[x]_\rho \to [x]_\rho \circ \sigma = [x \circ \sigma]_\rho$ является подстановкой на фактор-множестве G/ρ. Легко видеть, что на самом деле это отображение является даже автоморфизмом фактор-системы G/ρ и, кроме того, выполняется равенство $[x]_\rho \circ \sigma\varphi = ([x]_\rho \circ \sigma) \circ \varphi$. Тем самым мы получаем представление группы Γ относительно фактор-системы G/ρ — фактор-представление группы Γ. Возникающая при этом пара $(G/\rho, \Gamma)$ — это только частный вид фактор-пар. Общее определение *фактор-пары* получается следующим образом.

Пусть ρ — допустимая конгруэнция алгебраической системы G и пусть Σ — нормальный делитель в Γ, принадлежащий ядру фактор-представления Γ относительно G/ρ. Зададим пару $(G/\rho, \Gamma/\Sigma)$, полагая для $[x] \in G/\rho$ и $\gamma\Sigma \in \Gamma/\Sigma$

$$[x] \circ \gamma\Sigma = [x] \circ \gamma = [x \circ \gamma].$$

Определенное так действие не зависит от выбора представителей в смежных классах и удовлетворяет нужным условиям. Мы получаем пару, называемую *фактор-парой* пары (G, Γ) по конгруэнции ρ и нормальному делителю Σ.

Отметим здесь, что в случае чистой пары (G, Γ) допустимая конгруэнция ρ — это в точности то же, что обычно принято называть разбиением множества G на классы импримитивности группы Γ. Поэтому отсутствие такого разбиения, т. е. примитивность группы Γ, — это своего рода простота пары (G, Γ).

Из общего определения фактор-пары непосредственно следует, что естественное отображение пары на ее фактор-пару является гомоморфизмом пар. Пусть теперь

μ — гомоморфизм пары (G, Γ) на некоторую другую пару (G', Γ') и пусть ρ — конгруэнция на G, определяемая отображением $\mu: G \to G'$, а Σ — ядро гомоморфизма $\mu: \Gamma \to \Gamma'$. Конгруэнция ρ является конгруэнцией Γ-системы G, так как если $x' \in [x]$, x', $x \in G$, $\sigma \in \Gamma$, то $(x' \circ \sigma)^\mu = x'^\mu \circ \sigma^\mu = x^\mu \circ \sigma^\mu = (x \circ \sigma)^\mu$, т. е. $[x' \circ \sigma] = [x \circ \sigma]$. Кроме того, если $\sigma \in \Sigma$, то $(x \circ \sigma)^\mu = x^\mu \circ \sigma^\mu = x^\mu$, т. е. $[x \circ \sigma] = [x]$, а это означает, что Σ принадлежит ядру фактор-представления Γ относительно G/ρ. Обозначим дальше через ν естественный гомоморфизм пары (G, Γ) на фактор-пару $(G/\rho, \Gamma/\Sigma)$ и через $\bar{\mu}$ — отображения: $[x]^{\bar{\mu}} = x^\mu$, $(\gamma\Sigma)^{\bar{\mu}} = \gamma^\mu$, $x \in G$, $\gamma \in \Gamma$.

Очевидно, что $\nu\bar{\mu} = \mu$, и если μ — сильный гомоморфизм, то отображение $\bar{\mu}$ есть изоморфизм пар $(G/\rho, \Gamma/\Sigma)$ и (G', Γ').

Приведенную сейчас теорему о гомоморфизмах пар можно было бы, конечно, получить в качестве частного случая общей теоремы о гомоморфизмах многоосновных алгебраических систем.

Рассмотрим один пример. Пусть задана пара (G, Γ) с Ω-алгеброй G в качестве области действия. Каждому элементу $g \in G$ мы сопоставим свободную переменную x_g и множество всех этих свободных переменных обозначим через X. В таком случае исходная пара (G, Γ) индуцирует чистую пару (X, Γ). Если через $\tilde{G} = G(X, \Omega)$ обозначить абсолютно свободную Ω-алгебру над множеством X, то мы также получим пару $(\tilde{G}, \Gamma)$. Легко видеть, что отображение $x_g^\mu = g$ определяет гомоморфизм пары $(\tilde{G}, \Gamma)$ на пару (G, Γ).

Допустим теперь, что в паре (G, Γ) область действия G есть мультиоператорная (Ω-) группа. В этом случае, если ρ — конгруэнция в G, то ей отвечает некоторый идеал H. При этом ясно, что допустимость конгруэнции ρ равносильна допустимости идеала H (идеал H допустим, если он является допустимым подмножеством в G), так что в рассматриваемом случае фактор-пары — это пары вида $(G/H, \Gamma/\Sigma)$, где H — допустимый идеал в G, действие Γ в G/H определяется правилом $(a + H) \circ \sigma = a \circ \sigma + H$, $a \in G$, $\sigma \in \Gamma$, и Σ принадлежит ядру этого фактор-представления Γ относительно G/H. Заметим, что последнее условие равносильно тому, что

при любых $a \in G$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется включение $-a + a \circ \sigma \in H$.

Приведем еще простой пример, относящийся к чистой паре (G, Γ). Пусть Σ — нормальный делитель в Γ и ρ_Σ — эквивалентность на множестве G, определяемая всевозможными Σ-траекториями множества G. Покажем, что ρ_Σ — конгруэнция на G относительно Γ. Пусть $[x]$ — смежный класс эквивалентности ρ_Σ и пусть $x' \in [x]$, $x' = x \circ \sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Используя инвариантность погруппы Σ, получаем:

$$x' \circ \gamma = x \circ \sigma\gamma = (x \circ \gamma) \circ \gamma^{-1}\sigma\gamma \in (x \circ \gamma) \circ \Sigma,$$

т. е. $[x' \circ \gamma] = [x \circ \gamma]$, что и требовалось. Ясно также, что Σ принадлежит здесь ядру представления Γ относительно G/ρ_Σ, и, таким образом, можно говорить о фактор-паре $(G/\rho_\Sigma, \Gamma/\Sigma)$.

Определим дальше понятие *подпары*. Пусть Σ — подгруппа в Γ и пусть еще H — Σ-допустимая подсистема в G. Понятно, что действие $\circ$ индуцирует действие Σ в H. Возникающая при этом пара (H, Σ) называется подпарой пары (G, Γ). Так, в частности, каждой допустимой подсистеме $H \subset G$ отвечает подпара (H, Γ). При этом ядром представления Γ относительно H служит, очевидно, Γ-централизатор $\mathfrak{z}_\Gamma(H)$. Отсюда, между прочим, замечаем, что Γ-централизаторы допустимых подсистем из G являются нормальными делителями в Γ.

Отметим еще, что совокупность всех подпар заданной пары образует решетку, причем если (H_1, Σ_1) и (H_2, Σ_2) — две такие подпары, то их пересечение определяется формулой

$$(H_1, \Sigma_1) \cap (H_2, \Sigma_2) = (H_1 \cap H_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2).$$

Остановимся теперь на некоторых фактах, связанных с изоморфизмами пар.

2.1. *Пусть (G, Γ) — некоторая пара и (H, Σ) — ее подпара. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ подмножество $H \circ \gamma$ является $\gamma^{-1}\Sigma\gamma$-допустимым и пары $(H \circ \gamma, \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$ и (H, Σ) изоморфны.*

Пусть отображение μ определяется формулами: $h^\mu = h \circ \gamma$ для $h \in H$ и $\sigma^\mu = \gamma^{-1}\sigma\gamma$ для $\sigma \in \Sigma$. Понятно, что

при этом устанавливается изоморфизм между H и $H \circ \gamma$ и изоморфизм групп Σ и $\gamma^{-1}\Sigma\gamma$. Кроме того, имеем $(h \circ \sigma)^{\mu} = (h \circ \sigma) \circ \gamma = (h \circ \gamma) \circ \gamma^{-1}\sigma\gamma = h^{\mu} \circ \sigma^{\mu}$, что и доказывает утверждение. Ясно, что если здесь элемент γ взят из централизатора подгруппы Σ, то соответствующий изоморфизм окажется эквивалентностью пар.

Также непосредственно проверяются следующие свойства:

2.2. *Пусть f и f' — два представления одной и той же группы Γ относительно алгебраических систем G и G'. Эти представления тогда и только тогда эквивалентны, когда существует изоморфизм φ: $G \to G'$ такой, что при любом $\gamma \in \Gamma$ выполняется равенство $\gamma^{f'} = \varphi^{-1}\gamma^{f}\varphi$.*

2.3. *Если пары (G, Γ) и (G', Γ') изоморфны, то проекции Γ и Γ' относительно своих областей действия сопряжены с помощью некоторого изоморфизма систем G и G'.*

Пусть, скажем, μ — изоморфизм пар (G, Γ) и (G', Γ') и пусть f и f' — соответственно, представления Γ относительно G и Γ' относительно G'. Для любых $g \in G$ и $\gamma \in \Gamma$ имеем:

$$(g \circ \gamma)^{\mu} = (g\gamma^{f})^{\mu} = g^{\mu} \circ \gamma^{\mu} = g^{\mu}\,(\gamma^{\mu})^{f'}.$$

Рассматривая μ как изоморфизм между G и G', перепишем полученное равенство в виде

$$g\gamma^{f}\mu = g\mu\,(\gamma^{\mu})^{f'}.$$

Отсюда $\gamma^{f}\mu = \mu\,(\gamma^{\mu})^{f'}$ и $(\gamma^{\mu})^{f'} = \mu^{-1}\gamma^{f}\mu$, что и доказывает 2.3, а также в одну сторону 2.2. С другой стороны, обратная проверка показывает, что если выполняется условие $(\gamma^{\mu})^{f'} = \mu^{-1}\gamma^{f}\mu$ и отображения μ: $G \to G'$ и μ: $\Gamma \to \Gamma'$ являются изоморфизмами, то представления f и f' задают изоморфные пары. Изоморфизм станет эквивалентностью, если μ — тождественное отображение на действующей группе.

Приведем еще следующую теорему:

2.4. *Пусть задана пара (G, Γ) и пусть Σ — подгруппа в Γ, а ρ — Σ-допустимая конгруэнция в G. Тогда при любом $\gamma \in \Gamma$ конгруэнция ρ^{γ} допустима относительно $\gamma^{-1}\Sigma\gamma$ и пары $(G/\rho, \Sigma)$ и $(G/\rho^{\gamma}, \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$ изоморфны. Если здесь, в частности, G — мультиоператорная группа и конгруэн-*

ции ρ *отвечает идеал* H, *то получим изоморфизм пар* $(G/H, \Sigma)$ *и* $(G/H \circ \gamma, \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$.

Доказательство этой теоремы получается очевидными выкладками, и мы его опускаем.

Понятие изоморфизма пар позволяет говорить об абстрактных свойствах таких пар и рассматривать абстрактные классы пар. Таким образом, мы имеем следующие три типа абстрактных свойств: абстрактные свойства областей действия и действующих групп и абстрактные свойства пар. Изучение взаимодействия между этими тремя типами абстрактных свойств — это, как уже отмечалось, одна из наиболее интересных задач теории пар и, следовательно, теории групп автоморфизмов.

Несколько слов об автоморфизмах пар. Если μ — автоморфизм пары (G, Γ), то ему отвечают два автоморфизма σ: $G \to G$ и τ: $\Gamma \to \Gamma$. При этом должна выполняться формула $\gamma^{\tau f} = \sigma^{-1}\gamma^f\sigma$, где f — соответствующее представление и $\gamma \in \Gamma$. Из этой формулы видно, что если рассматриваемая пара является точной, то автоморфизм τ определяется автоморфизмом σ, и автоморфизмы пары (G, Γ) находятся во взаимно однозначном соответствии с автоморфизмами алгебраической системы G, перестановочными с группой Γ.

Если, с другой стороны, τ — произвольный автоморфизм действующей группы Γ, то, полагая $\gamma^{f'} = \gamma^{\tau f}$, мы сопоставим представлению f группы Γ относительно алгебраической системы G новое представление f' группы Γ относительно G. Такое новое представление группы Γ не обязательно, конечно, индуцирует автоморфизм пары (G, Γ). Понятно, что новые представления можно аналогично получать и за счет автоморфизмов группы $\mathfrak{A}(G)$.

Отметим еще следующее очевидное утверждение. Совокупность всех автоэквивалентностей пары (G, Γ) является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов этой пары.

В теории пар важную роль играет понятие *относительно характеристической* (по отношению к Γ) подсистемы из G. Подсистема $H \subset G$ называется относительно характеристической (Γ-характеристической), если для любой пары $(G, \tilde{\Gamma})$, содержащей пару (G, Γ) и такой,

что Γ — нормальный делитель в $\tilde{\Gamma}$, H всегда оказывается $\tilde{\Gamma}$-допустимым подмножеством. Примером Γ-характеристической подсистемы в G может служить центр $Z_G(\Gamma)$. Этот факт легко проверяется непосредственно (см. также формулу в п. 2.3.1). Другие примеры относительно характеристических подсистем будут приведены позднее.

Для всякой пары (G, Γ), в которой G — мультиоператорная (Ω-) группа, справедливо следующее свойство:

2.5. *Если H — Γ-характеристический идеал в G (т. е. идеал, являющийся Γ-характеристической Ω-подгруппой) и F/H — Γ-характеристическая Ω-подгруппа в G/H, то F — Γ-характеристическая Ω-подгруппа в G.*

Определим теперь понятие *локальной системы* подпар пары.

Пусть (G, Γ) — некоторая пара. Система $\mathfrak{A}$ ее подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ называется локальной системой, если любые два ее члена содержатся в некотором третьем и для каждой пары элементов $g \in G$ и $\sigma \in \Gamma$ найдется пара $(G_\alpha, \Gamma_\alpha) \in \mathfrak{A}$, такая что $g \in G_\alpha$ и $\sigma \in \Gamma_\alpha$.

Иногда приходится рассматривать *«двойные» локальные системы*, т. е. локальные системы из подпар вида $(G_\alpha^\beta, \Gamma_\alpha)$, где подгруппы Γ_α составляют локальную систему в группе Γ и для каждой Γ_α все G_α^β по разным β составляют локальную систему в G.

Естественным путем определяется понятие системы образующих пары. Мы ограничимся здесь лишь случаем, когда область действия G является алгеброй. Пусть (G, Γ) — такая пара, X — подмножество в G, и Y — подмножество в Γ. Пусть еще $\Sigma = \{Y\}$, и H — пересечение всех Σ-допустимых подалгебр в G, содержащих X, т. е. $H = \{X \circ \Sigma\}^\Omega$. Про пару множеств X, Y говорят тогда, что она порождает пару (H, Σ), или составляет систему образующих этой пары. Легко видеть, что все подпары из (G, Γ), обладающие конечными системами образующих (X и Y конечны), составляют в (G, Γ) локальную систему.

Определим еще понятие (*абсолютно*) *свободной Ω-пары*, порожденной парой множеств X, Y. Пусть $\Gamma = \Gamma(Y)$ — свободная группа с множеством свободных образующих Y, и $X \circ \Gamma$ — множество всех формальных выраже-

ний вида $x \circ \sigma$, $x \in X$, $\sigma \in \Gamma$. Для каждого $x \circ \sigma \in X \circ \Gamma$ и каждого $\varphi \in \Gamma$ полагаем $(x \circ \sigma) \circ \varphi = x \circ \sigma\varphi$. Этим, очевидно, задается чистая пара $(X \circ \Gamma, \Gamma)$, которая называется *свободной чистой парой*. Далее, пусть $G = G(X \circ \Gamma, \Omega)$ — абсолютно свободная Ω-алгебра над множеством $X \circ \Gamma$. Ясно, что предыдущая чистая пара индуцирует пару (G, Γ). Это и есть интересующая нас абсолютно свободная пара. Легко понять, что каждая пара, в которой область действия есть Ω-алгебра, является гомоморфным образом некоторой такой пары (G, Γ).

В заключение скажем, что в дальнейшем мы будем употреблять следующую терминологию. Если θ — некоторое абстрактное свойство пар, то через *локально* θ ($L\theta$) будем обозначать свойство пары (G, Γ) обладать локальной системой подпар специального вида (G, Γ_α), обладающих свойством θ. Если же в (G, Γ) имеется (общая) локальная система из θ-подпар вида $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, то такую пару назовем *квази-θ-парой*. И еще: если в (G, Γ) имеется локальная система θ-подпар вида (G_α, Γ), то в таком случае пару (G, Γ) будем называть *относительной θ-парой*.

3. Транзитивные пары. В этом пункте речь пойдет только о чистых парах. Пара (G, Γ) называется *транзитивной* (иными словами, представление Γ относительно G транзитивно), если для любых элементов a, b из G в Γ найдется такой элемент σ, что $a \circ \sigma = b$. Другими словами, пара (G, Γ) транзитивна, если для некоторого $a \in G$ (а следовательно, и для всех $a \in G$) будет $a \circ \Gamma = G$. Если (G, Γ) — транзитивная пара, то область действия G здесь принято еще называть *однородным пространством*.

Для любой пары (G, Γ) ее подпары вида $(a \circ \Gamma, \Gamma)$ являются, очевидно, транзитивными парами. Таким образом, каждая чистая пара расщепляется на транзитивные подпары, и в связи с этим Γ-траектории называются также системами транзитивности. С другой стороны, легко понять, каким путем из транзитивных пар можно составлять произвольные чистые пары.

Пусть, скажем, (G_α, Γ) — некоторый набор транзитивных пар с общей действующей группой Γ. Обозначим дальше через G теоретико-множественную сумму

всех G_α и следующим образом зададим представление Г относительно G. Пусть $a \in G$ и $\sigma \in \Gamma$. Элемент a принадлежит некоторому G_α, и мы полагаем, что $a \circ \sigma$ есть элемент в G_α, определенный исходным представлением Г относительно G_α. Очевидно, что так мы действительно получаем пару (G, Γ), причем подмножества G_α являются здесь Г-траекториями. Все это означает, что изучение произвольных чистых пар сводится к изучению транзитивных пар. Отметим еще следующее очевидное свойство.

3.1. *Гомоморфный образ транзитивной пары также является транзитивной парой.*

Для подпар аналогичное свойство, конечно, не выполняется. Транзитивными парами являются, например, пары вида (G, S_G), где S_G — группа всех подстановок множества G. Такие пары являются даже n-кратно транзитивными при любом натуральном n, не большем мощности множества G. Это означает, что для любых двух последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ из n различных элементов множества G найдется такое преобразование σ действующей группы, что для $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ будет $a_i \circ \sigma = b_i$.

Важным примером транзитивных пар являются *регулярные пары*. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа и $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ — пара, состоящая из множества $\mathfrak{G}$, группы $\mathfrak{G}$ и (правого) регулярного представления группы $\mathfrak{G}$ относительно множества $\mathfrak{G}$, определяемого формулой $x \circ g = xg$, $x, g \in \mathfrak{G}$. Такая пара называется регулярной парой. Транзитивность ее очевидна.

Пусть дальше A — подгруппа в $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{G}/A$ — множество всех правосторонних смежных классов группы $\mathfrak{G}$ по A. Легко видеть, что, полагая $Ax \circ g = Axg$, $x, g \in \mathfrak{G}$, мы зададим представление группы $\mathfrak{G}$ относительно множества $\mathfrak{G}/A$. При этом, очевидно, пара $(\mathfrak{G}/A, \mathfrak{G})$ является естественным гомоморфным образом пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$. Ядром представления группы $\mathfrak{G}$ служит здесь совокупность всех $g \in \mathfrak{G}$, таких, что при любом $x \in \mathfrak{G}$ выполняется равенство $Axg = Ax$. Последнее равносильно условию $xgx^{-1} \in A$, или $g \in x^{-1}Ax$, так что ядро — обозначим его через $\bar{A}$ — совпадает с пересечением всех подгрупп из $\mathfrak{G}$, сопряженных с A. Теперь ясно, что для любого нор

мального делителя $B \subset \mathfrak{G}$, принадлежащего A, мы имеем фактор-пару $(\mathfrak{G}/A, \mathfrak{G}/B)$.

В дальнейшем будет показано, что так получаются все фактор-пары регулярной пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$, а сейчас докажем следующую важную теорему:

3.2. *Если* (G, Γ) — *транзитивная пара и* a — *произвольный элемент в* G, *то пара* (G, Γ) *эквивалентна паре* $(\Gamma/\mathfrak{z}(a), \Gamma)$.

Для доказательства определим отображение μ по следующему правилу. Если $b \in G$, то при некотором $\gamma \in \Gamma$ имеем $b = a \circ \gamma$. Сопоставим теперь элементу b смежный класс $\mathfrak{z}(a)\gamma$: $b^{\mu} = \mathfrak{z}(a)\gamma$. Простая проверка показывает, что такое соответствие взаимно однозначно и не зависит от выбора γ, удовлетворяющего условию $b = a \circ \gamma$. Кроме того, полагаем $\sigma^{\mu} = \sigma$ для всех $\sigma \in \Gamma$. Теперь имеем $(b \circ \sigma)^{\mu} = (a \circ \gamma\sigma)^{\mu} = \mathfrak{z}(a)\gamma\sigma = \mathfrak{z}(a)\gamma \circ \sigma = b^{\mu} \circ \sigma^{\mu}$, что и требовалось.

Теорема эта показывает, что все транзитивные пары с действующей группой Γ с точностью до эквивалентности исчерпываются парами вида $(\Gamma/\Sigma, \Gamma)$, где Σ — произвольная подгруппа в Γ. Легко понять, что здесь же содержатся известные теоретико-групповые факты о порядках классов сопряженных элементов в группах и классов сопряженных подгрупп.

В теореме имеется произвол с выбором элемента a. Если от этого элемента перейти к элементу $b = a \circ \gamma$, то соответствующим Γ-централизатором будет подгруппа $\gamma^{-1}\mathfrak{z}(a)\gamma$. Поэтому для нахождения всех транзитивных представлений группы Γ с точностью до эквивалентности достаточно в каждом классе сопряженных подгрупп группы Γ брать по одному представителю.

Непосредственно проверяется также, что если Σ — подгруппа в Γ, и $\Sigma\gamma$ — элемент в Γ/Σ, то Γ-централизатор этого элемента совпадает с подгруппой $\gamma^{-1}\Sigma\gamma$. Отсюда следует, что соответствие $\Sigma\varphi \leftrightarrow \gamma^{-1}\Sigma\varphi$, $\varphi \in \Gamma$, определяет эквивалентность пар $(\Gamma/\Sigma, \Gamma)$ и $(\Gamma/\gamma^{-1}\Sigma\gamma, \Gamma)$. Действительно, указанное соответствие можно переписать в виде $\Sigma\gamma\varphi' \leftrightarrow \gamma^{-1}\Sigma\gamma\varphi'$, где $\gamma\varphi' = \varphi$.

Отметим дальше следующее предложение:

3.3. *Если* (G, Γ) — *точная транзитивная пара с коммутативной группой* Γ, *то мощности* G *и* Γ *совпадают.*

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что поскольку в транзитивных парах Г-централизаторы всех элементов из G сопряжены между собой, то для коммутативной группы Γ все эти централизаторы совпадают, причем совпадают они с ядром представления Γ относительно G. В случае точного представления такое ядро равно единице. Значит, Г-централизаторы элементов из G совпадают с единицей в Γ. Теперь остается сослаться на эквивалентность пары (G, Γ) и регулярной пары (Γ, Γ). Из этих рассуждений также следует, что для коммутативной группы Γ ее регулярное представление является единственным, с точностью до эквивалентности, точным транзитивным представлением.

Следующая теорема связана с классификацией транзитивных пар с точностью до изоморфизма.

3.4. *Пусть* Γ — *группа*, Σ — *ее подгруппа*, α — *автоморфизм группы* Γ, *и* γ — *произвольный элемент в* Γ. *Тогда отображения* $(\Sigma\varphi)^\mu = \gamma^{-1}\Sigma^\alpha\varphi^\alpha$ (*фактор-множества* Γ/Σ *на фактор-множество* $\Gamma/\gamma^{-1}\Sigma^\alpha\gamma$) *и* $\sigma^\mu = \sigma^\alpha$ (*группы* Γ *на себя*) *определяют изоморфизм пар* $(\Gamma/\Sigma, \Gamma)$ *и* $(\Gamma/\gamma^{-1}\Sigma^\alpha\gamma, \Gamma)$. *Всякий изоморфизм пар* $(\Gamma/\Sigma, \Gamma)$ *и* $(\Gamma/\Sigma', \Gamma)$, *где* Σ, Σ' — *подгруппы в* Γ, *имеет указанный вид.*

Первая часть теоремы проверяется непосредственно. Докажем вторую. Пусть μ — изоморфизм указанных пар. μ определяет также автоморфизм группы Γ. Обозначим его через α, и пусть еще $\Sigma^\mu = \Sigma'\gamma^{-1}$. Теперь для любого $\sigma \in \Sigma$ имеем

$$(\Sigma\sigma)^\mu = \Sigma^\mu = \Sigma'\gamma^{-1} = (\Sigma \circ \sigma)^\mu = \Sigma^\mu \circ \sigma^\mu = \Sigma^\mu\sigma^\alpha = \Sigma'\gamma^{-1}\sigma^\alpha.$$

Отсюда $\gamma\Sigma'\gamma^{-1} = \gamma\Sigma'\gamma^{-1}\sigma^\alpha$ и $\sigma^\alpha \in \gamma\Sigma'\gamma^{-1}$. Последнее равносильно включению $\Sigma' \supset \gamma^{-1}\Sigma^\alpha\gamma$. Пусть, с другой стороны, $\varphi \in \gamma\Sigma'\gamma^{-1}$ и $\varphi = \psi^\alpha$. Тогда $(\Sigma\psi)^\mu = \Sigma^\mu\psi^\alpha = \Sigma'\gamma^{-1}\varphi = \Sigma'\gamma^{-1}$, т. е.

$$\psi \in \Sigma \text{ и } (\gamma\Sigma'\gamma^{-1})^{\alpha^{-1}} \subset \Sigma,\ \gamma\Sigma'\gamma^{-1} \subset \Sigma^\alpha,\ \Sigma' \subset \gamma^{-1}\Sigma^\alpha\gamma.$$

Если дальше φ — произвольный элемент в Γ, то

$$(\Sigma\varphi)^\mu = (\Sigma \circ \varphi)^\mu = \Sigma^\mu \circ \varphi^\mu = \Sigma'\gamma^{-1}\varphi^\alpha = \gamma^{-1}\Sigma^\alpha\gamma\gamma^{-1}\varphi^\alpha = \gamma^{-1}\Sigma^\alpha\varphi^\alpha,$$

что и требовалось.

Приступим теперь к описанию всех конгруэнций множества G относительно транзитивной на нем группы Γ. Пусть ρ — такая конгруэнция, $[a]$ — некоторый ее смеж-

ный класс и Σ — Г-нормализатор этого класса. Ясно, что Σ содержит подгруппу $\mathfrak{z}(a)$. Так как пара $(G/\rho, \Gamma)$ транзитивна, то эта пара эквивалентна паре $(\Gamma/\Sigma, \Gamma)$. Отсюда непосредственно выводится, что все смежные классы конгруэнции ρ имеют вид $a \circ \Sigma\gamma$ по различным $\gamma \in \Gamma$. В самом деле, подгруппа Σ может также рассматриваться как Г-централизатор элемента $[a]$, взятый в представлении Γ относительно G/ρ. Поэтому Σ состоит из тех и только тех $\sigma \in \Gamma$, для которых выполняется $[a \circ \sigma] = [a]$. Отсюда следует, что $a \circ \Sigma = [a]$. Действительно, из $[a \circ \sigma] = [a]$ следует включение $a \circ \Sigma \subset [a]$. С другой стороны, если $a' \in [a]$, то при некотором $\sigma \in \Gamma$ будет $a' = a \circ \sigma$, и ввиду $[a \circ \sigma] = [a]$ имеем $\sigma \in \Sigma$ и $a' \in a \circ \Sigma$. Пусть теперь $[b]$ — произвольный смежный класс конгруэнции ρ и пусть $b = a \circ \gamma$. Тогда

$$[b] = [a \circ \gamma] = [a] \circ \gamma = [a \circ \sigma] \circ \gamma = [a \circ \sigma\gamma], \quad \sigma \in \Sigma,$$

и $a \circ \Sigma\gamma \subset [b]$. Если дальше $b' \in [b]$, то $b' \circ \gamma^{-1} \in [a]$ и $b' \circ \gamma^{-1} = a \circ \sigma$ при некотором $\sigma \in \Sigma$. Отсюда получаем $b' = a \circ \sigma\gamma \in a \circ \Sigma\gamma$. Следовательно, $a \circ \Sigma\gamma = [b]$.

Пусть теперь Σ — произвольная подгруппа в Γ, содержащая $\mathfrak{z}(a)$. Покажем, что подмножества в G вида $a \circ \Sigma\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, определяют конгруэнцию на Г-алгебре G.

Пусть вначале $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и пусть $b \in a \circ \Sigma\gamma_1 \cap a \circ \Sigma\gamma_2$. Тогда при некоторых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ будет $b = a \circ \sigma_1\gamma_1 = a \circ \sigma_2\gamma_2$. Отсюда $\sigma_1\gamma_1 = \varphi\sigma_2\gamma_2$, где $\varphi \in \mathfrak{z}(a)$. Согласно условию должно быть $\varphi \in \Sigma$, и поэтому γ_1 и γ_2 принадлежат одному смежному классу по Σ. Таким образом, $a \circ \Sigma\gamma_1 = a \circ \Sigma\gamma_2$.

Теперь из того, что рассматриваемая пара транзитивна, следует, что множества вида $a \circ \Sigma\gamma$ являются смежными классами некоторой эквивалентности на множестве G.

Допустим дальше, что $b, c \in a \circ \Sigma\gamma$. Тогда при любом $\gamma' \in \Gamma$ элементы $b \circ \gamma'$ и $c \circ \gamma'$ принадлежат $a \circ \Sigma\gamma\gamma'$. Этим доказано, что все классы $a \circ \Sigma\gamma$ составляют конгруэнцию на G. При этом, как легко видеть, Г-нормализатор класса $a \circ \Sigma$ совпадает с подгруппой Σ.

Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями на G и подгруппами из Γ, содержащими централизатор $\mathfrak{z}(a)$. Это соответствие сохраняет отношение включения.

Из приведенного описания конгруэнций вытекает, в частности, отмеченное выше утверждение о том, что парами вида $(\mathfrak{G}/A, \mathfrak{G}/B)$, где A — подгруппа в $\mathfrak{G}$ и B — нормальный делитель, принадлежащий $\bar{A}$, исчерпываются все фактор-пары регулярной пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$.

Отметим также следующее очевидное свойство: если пара (G, Γ) транзитивна, то для каждой конгруэнции на G все смежные классы этой конгруэнции равномощны.

. В заключение приведем одну полезную в комбинаторике формулу. Пусть (G, Γ) — точная чистая пара с конечным множеством G. Обозначим через $\rho_\Gamma = \rho$ эквивалентность на G, определяемую всеми Γ-траекториями множества G, и через $[a]$, $a \in G$, будем обозначать элементы из G/ρ. Условимся еще через $|X|$ обозначать число элементов (порядок) конечного множества X.

Имеет место следующая формула (лемма Пойа):

$$|G/\rho| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} |Z_G(\gamma)|^{*)}.$$

Пусть N — число всевозможных пар вида (a, γ), $a \in G$, $\gamma \in \Gamma$, для которых выполняется: $a \circ \gamma = a$. Это число можно подсчитать двумя способами. С одной стороны, сопоставляя каждому a различные элементы γ из $\mathfrak{z}(a)$, а затем суммируя по всем a, мы получим $N = \sum_{a \in G} |\mathfrak{z}(a)|$.

Аналогично сопоставляя элементам $\gamma \in \Gamma$ различные $a \in Z_G(\gamma)$, а затем суммируя по всем $\gamma \in \Gamma$, получим:

$$N = \sum_{\gamma \in \Gamma} |Z_G(\gamma)|.$$

Но

$$\sum_{a \in G} |\mathfrak{z}(a)| = \sum_{[a] \in G/\rho} \Big(\sum_{x \in [a]} |\mathfrak{z}(x)| \Big).$$

Так как все $\mathfrak{z}(x)$ по $x \in [a]$ состоят из одинакового количества элементов, то $\sum_{x \in [a]} |\mathfrak{z}(x)| = |\mathfrak{z}(a)| \cdot |[a]|$. С другой

---

*) Здесь знак Σ обозначает, конечно, сумму, а не подмножество в Γ. Такое смешение обозначений будет встречаться и в дальнейшем.

стороны, мы знаем, что $|\mathfrak{z}(a)|\cdot|[a]|=|\Gamma|$. Таким образом, получаем:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|Z_G(\gamma)|=|G/\rho|\,|\Gamma|,$$

что и доказывает формулу.

4. Прямые произведения пар и другие конструкции. В этом пункте рассматриваются простейшие операции на парах. В основе этих операций лежат прямые произведения алгебр и групп. Аналогичным образом можно было бы использовать свободные и приведенные свободные произведения и некоторые другие операции. Для конкретных типов областей действия имеются свои специфические конструкции (тензорные произведения и т. д.).

Пусть задан некоторый набор пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, $\alpha\in I$, с однотипными алгебраическими системами G_α; пусть еще G — полное прямое произведение всех G_α и Γ — полное прямое произведение всех групп Γ_α. Для каждой пары элементов $(a_\alpha)\in G$ и $(\sigma_\alpha)\in\Gamma$ полагаем $(a_\alpha)\circ(\sigma_\alpha)=(a_\alpha\circ\sigma_\alpha)$. Понятно, что при этом мы получим представление Γ относительно алгебраической системы G, и возникающая здесь пара (G, Γ) называется *полным прямым произведением* (*суммой*) всех пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Нетрудно заметить, что естественные отображения G на G_α и Γ на Γ_α определяют гомоморфизм пары (G, Γ) на пару $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$.

В дальнейшем нам придется иметь дело и с полным прямым произведением представлений одной группы Γ. Если (G_α, Γ), $\alpha\in I$, — набор пар с общей действующей группой Γ и G — полное прямое произведение всех G_α, то представление Γ относительно G, определяемое формулой $(a_\alpha)\circ\sigma=(a_\alpha\circ\sigma)$, $(a_\alpha)\in G$, $\sigma\in\Gamma$, и называется *полным прямым произведением* заданных представлений группы Γ. Очевидно, что возникающая при этом пара (G, Γ) содержится в полном прямом произведении всех пар (G_α, Γ), и ядро представления Γ относительно G есть пересечение ядер представлений Γ относительно каждой G_α.

В полном прямом произведении (G, Γ) пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, $\alpha\in I$, особо выделяется подпара $(G, \tilde\Gamma)$, в которой группа $\tilde\Gamma$ есть (дискретное) прямое произведение всех Γ_α. Такую подпару назовем *полуполным справа произведением пар*

$(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$. В том случае, когда все G_α — мультиоператорные группы, аналогично можно определить и полуполные слева прямые произведения пар. В этом же случае можно говорить и о дискретном прямом произведении пар. Параллельно суммированию пар, области действия которых — мультиоператорные группы, определяются также и разложения таких пар.

Рассмотрим теперь следующую конструкцию. Пусть задана некоторая чистая пара (I, Γ) и пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая алгебраическая система. Сопоставим каждому элементу $\alpha \in I$ экземпляр $\mathfrak{G}_\alpha$ системы $\mathfrak{G}$, и пусть G — полная прямая сумма (произведение) всех этих $\mathfrak{G}_\alpha$. Элементы из G мы будем трактовать как функции, определенные на множестве I и со значениями в $\mathfrak{G}$. Эти функции будем обозначать через $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$, а через $\bar{a}(\alpha)$ обозначается α-я компонента — значение функции в точке α. В соответствии с определением полной прямой суммы (ср. также определение алгебры отображений $H(I, \mathfrak{G})$ из п. 1.1.6!) операции и отношения в G задаются следующим образом. Если ω — n-арная алгебраическая операция из числа основных операций, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ — элементы в G, то $\bar{a}_1\bar{a}_2\ldots\bar{a}_n\omega$ есть функция, определяемая правилом:

$$(\bar{a}_1\bar{a}_2\ldots\bar{a}_n\omega)(\alpha) = \bar{a}_1(\alpha)\,\bar{a}_2(\alpha)\ldots\bar{a}_n(\alpha)\,\omega.$$

Если P — n-местный предикат, то $P(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = И$, в том и только в том случае, когда при всех α выполняется равенство

$$P(\bar{a}_1(\alpha), \bar{a}_2(\alpha), \ldots, \bar{a}_n(\alpha)) = И.$$

Алгебраическую систему G называют еще *I-й степенью* системы $\mathfrak{G}$ и обозначают через $\mathfrak{G}^I$.

Зададим теперь представление группы Γ относительно алгебраической системы G следующим правилом: если $\sigma \in \Gamma$ и $\bar{a} \in G$, то $\bar{a} \circ \sigma$ есть функция, определяемая равенством

$$(\bar{a} \circ \sigma)(\alpha) = \bar{a}(\alpha \circ \sigma^{-1}).$$

Ясно, что отображение $\bar{a} \to \bar{a} \circ \sigma$ есть подстановка на множестве G, и легко проверяется, что такое отображе-

ние является автоморфизмом системы G. Кроме того, имеем:

$$((\bar{a} \circ \sigma) \circ \varphi)(\alpha) = (\bar{a} \circ \sigma)(\alpha \circ \varphi^{-1}) = \bar{a}(\alpha \circ \varphi^{-1}\sigma^{-1}) =$$
$$= \bar{a}(\alpha \circ (\sigma\varphi)^{-1}) = (\bar{a} \circ \sigma\varphi)(\alpha); \ (\bar{a} \circ \sigma) \circ \varphi = \bar{a} \circ \sigma\varphi,$$

так что действительно получается представление группы Γ относительно G. Если элементы из G рассматривать как последовательности (a_α), то введенное сейчас представление очевидным образом переводится и на этот язык. Понятно также, что если здесь $\mathfrak{G}$ — Ω-группа, то аналогичная конструкция имеет место и с прямой суммой всех $\mathfrak{G}_\alpha$.

Пусть теперь, в частности, $\mathfrak{G}$ — группа. В этом случае паре (G, Γ) отвечает полупрямое произведение «нормального делителя» G и группы Γ. Элементы этого полупрямого произведения изображаются парами $(\bar{a}, \sigma)$, $\bar{a} \in G$, $\sigma \in \Gamma$ и умножаются по правилу: $(\bar{a}, \sigma)(\bar{b}, \varphi) = (\bar{a}(\bar{b} \circ \sigma^{-1}), \sigma\varphi)$ (ср. п. 2.1.1). Указанное полупрямое произведение — обозначим его через $\mathfrak{G} \overset{I}{\sim} \Gamma$ — называется *сплетением* групп, а подгруппа G называется базисной подгруппой сплетения. Такое сплетение называют еще *полным сплетением* в отличие от *дискретного сплетения*, основанного на дискретном прямом произведении групп $\mathfrak{G}_\alpha$.

В определении сплетения групп $\mathfrak{G}$ и Γ здесь участвовало еще множество I, на котором группа Γ действует в качестве группы подстановок. Если, в частности, в качестве I также взять группу Γ и исходить из регулярного представления, то соответствующее сплетение уже зависит только от $\mathfrak{G}$ и Γ. В таком случае оно обозначается еще через $\mathfrak{G} \operatorname{Wr} \Gamma$, если речь идет о полном сплетении, и $\mathfrak{G} \operatorname{wr} \Gamma$ для дискретного сплетения («Wr» от wreath product).

Дальше, следуя работе Л. А. Калужнина и М. Краснера [1], разберем понятие сплетения двух чистых пар. Пусть даны чистые пары (A, Σ) и (B, Φ). Используя приведенную выше конструкцию, мы построим пару (Σ^B, Φ), а по ней сплетение групп $\Gamma = \Sigma \overset{B}{\sim} \Phi$. Зададим дальше действие группы Γ на декартовом произведении $A \times B$. Если $(a, b) \in A \times B$ и $(\bar{\sigma}, \varphi) \in \Gamma$, то полагаем:

$$(a, b) \circ (\bar{\sigma}, \varphi) = (a \circ \bar{\sigma}(b), \ b \circ \varphi).$$

Непосредственная проверка показывает, что при этом задается представление группы Г относительно множества $A \times B$. Полученная здесь пара называется *сплетением пар*. Очевидно также, что подмножества вида $A \times b$, $b \in B$, являются системами импримитивности группы Г. Если исходные пары являются точными, то таким же будет и их сплетение.

Если, в частности, здесь $\Sigma = S_A$, $\Phi = S_B$ и Г — их сплетение, то это сплетение можно рассматривать как подгруппу в группе $S_{A \times B}$. Легко видеть, что указанная подгруппа состоит из всех подстановок γ, действующих по правилу $(a, b)\gamma = (a\gamma_1(b), b\gamma_2)$, где $(a, b) \in A \times B$, $\gamma_1(b)$ — элемент в S_A, зависящий от b, и $\gamma_2 \in S_B$. Обозначим эту подгруппу через $S^0_{A \times B}$. Теперь мы можем еще заметить, что сплетению пар (A, Σ) и (B, Φ) отвечает некоторый гомоморфизм сплетения групп Σ и Φ в группу $S^0_{A \times B}$.

Операция сплетения групп тесно связана с понятием *мономиальной* группы. Приведем соответствующее определение.

Пусть A — некоторая группа, B — множество и $A \times B$ — декартово произведение множеств A и B. В группе $S^0_{A \times B}$ возьмем элементы γ, действующие по правилу $(a, b)\gamma = (a \cdot \bar{a}(b), b\gamma_2)$, где $\bar{a}(b)$ — элемент в A, $a \cdot \bar{a}(b)$ — произведение в A, и γ_2 — некоторая подстановка множества B. Совокупность всех таких γ образует подгруппу в $S^0_{A \times B}$, называемую *полной мономиальной группой* (над группой A и множеством B). Легко видеть, что полная мономиальная группа, рассматриваемая абстрактно, является сплетением групп A и S_B. Если множество B конечно, то такая группа — обозначим ее через Г — допускает также следующее матричное представление. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — все элементы в B, e — единица в A, и $\gamma = (\bar{a}, \gamma_2)$ — элемент в Г. Применяя γ к паре (e, b_i), получим $(e, b_i)\gamma = (\bar{a}(b_i), b_i\gamma_2) = (\bar{a}(b_i), b_j)$.

Сопоставим теперь элементу γ мономиальную матрицу над A, у которой в i-й строке $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на j-м месте стоит элемент $\bar{a}(b_i) = a_{ij}$, а на остальных местах — нули. Прямая проверка показывает, что если при этом исходить из обычного умножения матриц, то таким обра-

зом мы действительно получим изоморфное представление группы Г.

Если, далее, $\mathfrak{G}$ — произвольная группа, то можно говорить об ее мономиальных представлениях как о гомоморфизмах в некоторые мономиальные группы. Если заданы два таких представления f и f' и им отвечают пары $(A \times B, \mathfrak{G})$ и $(A' \times B', \mathfrak{G})$, то такие представления называются *эквивалентными*, если существует обычная эквивалентность μ этих пар, удовлетворяющая следующему дополнительному условию: μ устанавливает изоморфизм между A и A' и взаимно однозначное соответствие между B и B'.

Важным специальным случаем мономиальных представлений являются следующие представления. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, A — ее подгруппа, $\mathfrak{G}/A$ — система правых смежных классов и Г — полная мономиальная группа над группой A и множеством $\mathfrak{G}/A$. Выберем некоторую полную систему B представителей смежных классов из $\mathfrak{G}/A$. С помощью этой системы B мы зададим гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в Г. Делается это следующим образом. Если (a, Ab), $b \in B$, — элемент произведения $A \times \mathfrak{G}/A$, $g \in \mathfrak{G}$, и $bg = a_1 b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, то полагаем $(a, Ab) \circ g = (aa_1, Abg)$. Здесь a_1 можно считать функцией смежного класса Ab, и таким образом, указанное правило сопоставляет каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ некоторый элемент из Г — мономиальную подстановку. Непосредственная проверка показывает, что это отображение является даже изоморфизмом.

Приведем некоторые применения. Пусть A и B — две группы и G — их сплетение, $G = A \operatorname{Wr} B$. Группу G мы можем рассматривать как группу подстановок декартова произведения $A \times B$. Эта группа состоит из подстановок σ, действующих по правилу $(a, b)\sigma = (a \cdot a_1(b), bb_1)$, где $b_1 = b_1(\sigma) \in B$ и $a_1 = a_1(b, \sigma) \in A$.

Допустим далее, что некоторая группа $\mathfrak{G}$ является расширением A с помощью B. Это значит, что в $\mathfrak{G}$ имеется нормальный делитель A', изоморфный A относительно некоторого изоморфизма μ и такой, что $\mathfrak{G}/A' \approx B$. Обозначим $\mathfrak{G}/A' = \overline{\mathfrak{G}}$ и фиксируем некоторый изоморфизм между $\overline{\mathfrak{G}}$ и B, который также обозначим через μ. Через G' обозначим сплетение A' и $\overline{\mathfrak{G}}$, $G' = A' \operatorname{Wr} \overline{\mathfrak{G}}$. Группы

G и G' изоморфны, причем отображение μ индуцирует изоморфизм пар $(A \times B,\ G)$ и $(A' \times \overline{\mathfrak{G}},\ G')$. Только что мы отмечали, что если $g \in \overline{\mathfrak{G}}$, то этому g отвечает подстановка на $A' \times \overline{\mathfrak{G}}$. Нетрудно понять, что эта подстановка в действительности лежит в сплетении G', причем если $g \in A'$, то ему отвечает элемент сплетения $(\bar{g},\ A')$, где $\bar{g}(A'x) = xgx^{-1}$ и x пробегает некоторую систему представителей смежных классов.

Таким образом, доказано, что каждое расширение группы A с помощью группы B можно вложить в сплетение этих групп. Более подробно см. по этому поводу, например, работу Л. А. Калужнина [3]. В этой работе рассматриваются также итерированные сплетения вида

$$G = (\ldots((A_1 \operatorname{Wr} A_2) \operatorname{Wr} A_3) \ldots) \operatorname{Wr} A_n.$$

Элементами такого сплетения являются последовательности

$$(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n),$$

где $\bar{a}_n = a_n \in A_n$, $\bar{a}_{i-1}$ — функция, определяемая на декартовом произведении $A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_n$, со значениями в A_{i-1}. Естественно задается также представление группы G относительно декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Если, далее, $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, обладающая нормальным рядом

$$H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{i-1} \subset H_i \subset \ldots \subset H_n = \mathfrak{G},$$

причем $\bigcap\limits_{x \in \mathfrak{G}} x^{-1}H_0x = E$ и $H_i/H_{i-1} \approx A_i$, то, обобщая предыдущее, можно показать, что такую группу $\mathfrak{G}$ можно вложить в итерированное сплетение G.

Указанные конструкции имеют еще и следующее применение:

Пусть заданы две пары $(\mathfrak{G},\ \Sigma)$ и $(I,\ \Phi)$, причем в первой паре $\mathfrak{G}$ — некоторая алгебраическая система, а вторая пара — чистая. Каждому $\alpha \in I$ сопоставим экземпляр $(\mathfrak{G}_\alpha,\ \Sigma_\alpha)$ пары $(\mathfrak{G},\ \Sigma)$. Полное прямое произведение всех этих $(\mathfrak{G}_\alpha,\ \Sigma_\alpha)$ определяет представление группы Σ^I относительно алгебраической системы $G = \mathfrak{G}^I$. Кроме того, как и раньше, определяется представление группы Φ относительно G. Таким образом, в G дей-

ствуют как Σ^I, так и Φ. С другой стороны, группы Σ^I и Φ порождают сплетение $\Gamma = \Sigma \overset{I}{\sim} \Phi$. Мы покажем теперь, что обе пары (G, Σ^I) и (G, Φ) естественно вкладываются в пару (G, Γ). Действие Γ в G задается следующим образом. Если $\gamma = (\bar{\sigma}, \varphi)$ — элемент в Γ и $\bar{a} \in G$, то полагаем

$$\bar{a} \circ \gamma = (\bar{a} \circ \bar{\sigma}) \circ \varphi.$$

То, что отображение $\bar{a} \to \bar{a} \circ \gamma$ есть автоморфизм, очевидно. Если мы проверим еще тождество $(\bar{a} \circ \gamma) \circ \gamma_1 = \bar{a} \circ (\gamma\gamma_1)$, то все будет сделано. Пусть $\gamma = (\bar{\sigma}, \varphi)$ и $\gamma_1 = (\bar{\sigma}_1, \varphi_1)$. Тогда

$$(\bar{a} \circ \gamma) \circ \gamma_1 = (((\bar{a} \circ \bar{\sigma}) \circ \varphi) \circ \bar{\sigma}_1) \circ \varphi_1;$$
$$\bar{a} \circ (\gamma\gamma_1) = \bar{a} \circ (\bar{\sigma}(\bar{\sigma}_1 \circ \varphi^{-1}), \varphi\varphi_1) = (\bar{a} \circ (\bar{\sigma} \circ (\bar{\sigma}_1 \circ \varphi^{-1}))) \circ \varphi\varphi_1.$$

Переходя к α-компонентам, получим:

$$\begin{aligned}((((\bar{a} \circ \bar{\sigma}) \circ \varphi) \circ \bar{\sigma}_1) \circ \varphi_1)(\alpha) &= (((\bar{a} \circ \bar{\sigma}) \circ \varphi) \circ \bar{\sigma}_1)(\alpha \circ \varphi_1^{-1}) = \\ &= ((\bar{a} \circ \bar{\sigma}) \circ \varphi)(\alpha \circ \varphi_1^{-1}) \circ \bar{\sigma}_1(\alpha \circ \varphi_1^{-1}) = \\ &= (\bar{a} \circ \bar{\sigma})(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1}) \circ \bar{\sigma}_1(\alpha \circ \varphi_1^{-1}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\bar{a} \circ (\bar{\sigma}(\bar{\sigma}_1 \circ \varphi^{-1}))) \circ \varphi\varphi_1)(\alpha) &= \bar{a} \circ (\bar{\sigma}(\bar{\sigma}_1 \circ \varphi^{-1}))(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1}) = \\ &= \bar{a}(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1}) \circ (\bar{\sigma}(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1})\, \bar{\sigma}_1(\alpha \circ \varphi_1^{-1})) = \\ &= (\bar{a}(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1}) \circ \bar{\sigma}(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1})) \circ \bar{\sigma}_1(\alpha \circ \varphi_1^{-1}) = \\ &= (\bar{a} \circ \bar{\sigma})(\alpha \circ \varphi_1^{-1}\varphi^{-1}) \circ \bar{\sigma}_1(\alpha \circ \varphi_1^{-1}).\end{aligned}$$

Отсюда и следует нужное тождество.

Допустим далее, что в рассматривавшейся сейчас паре $(\mathfrak{G}, \Sigma)$ область действия $\mathfrak{G}$ есть Ω-группа. В полной прямой сумме G выделим дискретную прямую сумму Ω-подгрупп $\mathfrak{G}_\alpha$ и обозначим ее через $\tilde{G}$. Ясно, что $\tilde{G}$ — допустимая относительно Γ Ω-подгруппа в G, и, следовательно, мы получаем представление Γ относительно прямой суммы Ω-групп $\mathfrak{G}_\alpha$. При этом выполняется следующее свойство. Для каждого $\alpha \in I$ Ω-подгруппа $\mathfrak{G}_\alpha$ допустима относительно Σ_α, и если φ — элемент в Φ, рассматриваемый также как элемент в Γ, то подпара $(\mathfrak{G}_{\alpha \circ \varphi}, \varphi^{-1}\Sigma_\alpha\varphi)$ совпадает с подпарой $(\mathfrak{G}_{\alpha \circ \varphi}, \Sigma_{\alpha \circ \varphi})$.

Предположим еще, что Σ — подгруппа в некоторой группе Γ', и пусть $I = \Gamma'/\Sigma$ и $\Phi = S_I$. В таком случае разобранным сейчас методом мы можем определить представление относительно $\tilde{G}$ полной мономиальной над Σ

и Γ'/Σ группы. С другой стороны, каждому выбору системы представителей смежных классов отвечает некоторое мономиальное представление группы Γ'. Таким образом, мы приходим к представлению группы Γ' относительно Ω-группы $\tilde{G}$. Это представление продолжает исходное представление Σ относительно $\mathfrak{G}$.

5. Радикалы, связанные с представлениями. Как уже отмечалось, понятие изоморфизма пар позволяет говорить об абстрактных свойствах пар. Абстрактные свойства пар, в которых существенна роль как области действия G, так и действующей группы Γ, называются еще внешними или относительными свойствами, соответственно, действующей группы или области действия. Различные примеры таких внешних свойств будут в дальнейшем рассмотрены, а пока приведем некоторые определения.

Пусть θ — внешнее свойство. Будем говорить, что подсистема $H \subset G$ *обладает свойством* θ (или является θ-подсистемой), если эта подсистема допустима и подпара (H, Γ) является θ-подпарой. Соответственно, подгруппа $\Sigma \subset \Gamma$ называется θ-*подгруппой*, если пара (G, Γ) является θ-парой.

Подобно тому как это делается для абстрактных групп, определяется θ-*радикал* действующей группы Γ. θ-радикал в Γ — это подгруппа в Γ, порожденная всеми ее инвариантными θ-подгруппами, при условии, что эта подгруппа сама является θ-подгруппой. Обозначим этот θ-радикал через $\theta_G(\Gamma)$, или, если область действия фиксирована, через $\theta(\Gamma)$. Подгруппа $\Sigma = \theta(\Gamma)$ обладает следующим свойством:

5.1. *Для любой пары* (G, Φ), *содержащей пару* (G, Γ) *и такой, что* Γ — *нормальный делитель в* Φ, *подгруппа* Σ — *также нормальный делитель в* Φ.

Если $\varphi \in \Phi$, то пары (G, Σ) и $(G \circ \varphi, \varphi^{-1}\Sigma\varphi)$ изоморфны, и, следовательно, подгруппа $\varphi^{-1}\Sigma\varphi$ является θ-подгруппой, причем инвариантной в Γ. Так что $\varphi^{-1}\Sigma\varphi \subset \Sigma$. Отсюда уже следует $\varphi^{-1}\Sigma\varphi = \Sigma$.

Отмеченное свойство подгруппы Σ мы будем называть G-*характеристичностью* (относительной характеристичностью) этой подгруппы. Понятно, что характери-

стическая в обычном смысле подгруппа из Г характеристична и в этом новом смысле.

Можно говорить также и о θ-радикале в области действия. Мы ограничимся здесь двумя случаями. Пусть вначале пара (G, Γ) рассматривается как чистая пара. Будем говорить, что в множестве G имеется θ-радикал, если сумма всех θ-подмножеств из G также является θ-подмножеством. В таком случае это максимальное θ-подмножество называется θ-радикалом в G и обозначается через $\theta_\Gamma(G)$ (или $\theta(G)$, если понятно, о какой группе идет речь).

5.2. *Радикал $\theta(G)$ является относительно характеристическим подмножеством в G.*

Действительно, пусть пара (G, Γ) содержится в паре (G, Φ), причем Γ — нормальный делитель в Φ, и пусть $H=\theta(G)$. Тогда при любом φ из Φ пары (H, Γ) и $(H\circ\varphi, \varphi^{-1}\Gamma\varphi)=(H\circ\varphi, \Gamma)$ изоморфны. Следовательно, $(H\circ\varphi, \Gamma)$ — θ-пара и $H\circ\varphi\subset H$. Но это означает, что H — Φ-допустимое и потому характеристическое подмножество в G.

Теперь — случай пары (G, Γ), в которой область действия есть Ω-группа. В этом случае радикал $\theta(G)$ естественно определить как идеал в G, совпадающий с суммой всех допустимых идеалов, обладающих свойством θ. Мы говорим, что этот радикал существует, если указанная сумма сама обладает свойством θ. Аналогично тому, как это делалось в 5.2, показывается, что $\theta(G)$ есть относительно характеристическая θ-подгруппа в G. Кроме того, так же как и в п. 1.2.6, можно определить верхний θ-радикал в G и соответствующую полупростоту, а также корадикалы.

Некоторые конкретные радикалы будут рассмотрены в этой и следующей главах.

Отметим далее, что для выделения внешних свойств пар (G, Γ), в которых G — алгебра, можно воспользоваться идеей битождеств, обобщающих тождества. В битождествах участвуют символы двух сортов: одни связаны с областью действия, а другие — с действующей группой. Кроме того, наряду с символами операций алгебры и действующей группы используется символ действия $\circ$. Опираясь на такие битождества, можно

определить примитивные классы пар и свободные пары этих классов. (См. по этому поводу Добавление.) Битождества являются частным случаем политождеств (по поводу политождеств в группах см. работу О. Н. Головина [1]; см. также уже упоминавшуюся работу Ф. Хиггинса [3]).

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1. Предварительные замечания. Пусть задана некоторая группа. Для каких алгебраических систем эта группа может служить группой автоморфизмов? Этот вопрос рассматривается в настоящем параграфе. Наиболее сильный из относящихся сюда результатов содержится в теореме 2.1 из следующего пункта, а пока приведем некоторые простейшие соображения.

Пусть Γ — произвольная группа и X — некоторое множество. Как и раньше, через $X \circ \Gamma$ мы обозначаем множество формальных выражений $X \circ \sigma$, $\sigma \in \Gamma$, причем каждый $x \in X$ можно отождествить с $x \circ \varepsilon$, ε — единица в Γ, и тогда можно считать, что X принадлежит $X \circ \Gamma$. Одновременно мы получаем чистую пару $(X \circ \Gamma,\ \Gamma)$. Если, далее, задан некоторый примитивный класс алгебр и G — свободная алгебра этого класса, порожденная свободно множеством $X \circ \Gamma$, то действие Γ в $X \circ \Gamma$ однозначно продолжается до представления Γ автоморфизмами алгебры G. Поэтому, в частности, каждая группа есть группа автоморфизмов некоторой группы, некоторой абелевой группы, некоторого кольца, некоторого коммутативного кольца и т. д. Используя переход от свободного коммутативного кольца к полю отношений, мы заметим также, что каждая группа есть группа автоморфизмов некоторого поля.

Отметим далее, что из рассмотрений п. 4 предыдущего параграфа непосредственно следует, что для любой группы Γ и любой алгебраической системы $\mathfrak{G}$, содержащей более одного элемента, существует точное представление Γ относительно некоторой степени $\mathfrak{G}$. Действительно, мы можем исходить из регулярной пары $(\Gamma,\ \Gamma)$, и тогда Γ обладает точным представлением относительно $G = \mathfrak{G}^{\Gamma}$.

Разберем аналогичный вопрос для приведенных произведений-степеней. Пусть даны алгебраическая система $\mathfrak{G}$ и чистая пара (I, Γ). Допустим еще, что на множестве I задан фильтр D, инвариантный относительно Γ. Последнее означает, что при любых $X \in D$ и $\sigma \in \Gamma$ должно быть $X \circ \sigma \in D$. Пусть, далее, каждому $\alpha \in I$ сопоставлен экземпляр $\mathfrak{G}_\alpha$ системы $\mathfrak{G}$, и допустим, что G есть полное прямое произведение всех $\mathfrak{G}_\alpha$, $\rho = \rho_D$ — конгруэнция, отвечающая фильтру D, и $\tilde{G} = G/\rho$ — соответствующее приведенное произведение. Как и раньше, определяется действие Γ в G. Покажем, что конгруэнция ρ допустима относительно Γ. Возьмем в G два элемента $\bar{a}$ и $\bar{b}$, сравнимые по модулю ρ. При этом $\bar{a} \circ \sigma$ и $\bar{b} \circ \sigma$, $\sigma \in \Gamma$, также сравнимы по модулю ρ. Действительно, если $S = \{\alpha \mid \bar{a}(\alpha) = \bar{b}(\alpha)\} \in D$, то $\{\alpha \mid (\bar{a} \circ \sigma)(\alpha) = (\bar{b} \circ \sigma)(\alpha)\} = S \circ \sigma$, а в силу инвариантности фильтра D имеем $S \circ \sigma \in D$. Это и означает, что $\bar{a} \circ \sigma$ и $\bar{b} \circ \sigma$ сравнимы по модулю ρ. Таким образом, мы можем перейти к фактор-представлению группы Γ относительно основного множества $\tilde{G}$ приведенного произведения. Легко понять, что при этом действие Γ в $\tilde{G}$ сохраняет все операции и предикаты этого приведенного произведения.

Заметим далее, что если $\sigma \in \Gamma$ и множество неподвижных относительно σ элементов из I принадлежит фильтру D, то σ принадлежит ядру представления Γ относительно $\tilde{G}$. Если, в частности, центр $Z_I(\Gamma)$ принадлежит D, то полученное раньше представление оказывается тривиальным.

Допустим сейчас, что алгебраическая система $\mathfrak{G}$ бесконечна. Покажем, что в этом случае элемент σ только тогда принадлежит ядру представления Γ относительно $\tilde{G}$, когда совокупность всех неподвижных относительно σ элементов из I принадлежит D. С этой целью разобьем множество I на траектории циклической подгруппы $\{\sigma\}$. Если $[\alpha]$ — одна из таких траекторий, то ввиду того, что она не более чем счетна и $\mathfrak{G}$ — бесконечное множество, можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами из $[\alpha]$ и элементами некоторого подмножества из $\mathfrak{G}$. Исходя из такого соответствия, сопоставим элементам из $[\alpha]$ элементы из $\mathfrak{G}$. Так мы поступим со всеми $\{\sigma\}$-траекториями из

I. В результате будет выделен в G некоторый элемент $\bar{g}$. Из выбора элемента $\bar{g}$ видно, что множество индексов α, для которых $\bar{g}$ и $\bar{g} \circ \sigma$ имеют одинаковые компоненты, в точности совпадает с множеством неподвижных относительно σ элементов из I. Следовательно, если σ лежит в ядре, то множество неподвижных относительно σ элементов из I принадлежит фильтру.

Из отмеченного свойства, в частности, следует, что если группа Γ действует на множестве I регулярно (без неподвижных точек), то при бесконечном $\mathfrak{G}$ представление Γ относительно $\tilde{G}$ оказывается точным.

Замечание, сделанное в начале этого пункта, показывает еще, что если $\mathfrak{K}$ — некоторый нетривиальный класс алгебраических систем, замкнутый относительно полных прямых произведений, то для любой группы Γ в $\mathfrak{K}$ имеется алгебраическая система, относительно которой Γ обладает точным представлением. Учитывая, с другой стороны, что каждый аксиоматизируемый класс моделей замкнут относительно ультрапроизведений, мы теперь могли бы утверждать следующее: если группа Γ действует регулярно на некотором множестве I, обладающем инвариантным относительно Γ ультрафильтром, то для любого аксиоматизируемого класса моделей $\mathfrak{K}$, содержащего бесконечные модели, в $\mathfrak{K}$ имеется такая модель G, что Γ обладает относительно G точным представлением. К сожалению, это простое соображение не может быть реализовано: как заметил Ю. Л. Ершов, легко проверить, что если группа Γ действует на множестве I, то для каждого инвариантного ультрафильтра на I при любом $\sigma \in \Gamma$ множество всех неподвижных относительно σ точек принадлежит ультрафильтру. Если, в частности, Γ действует регулярно, то на I нет инвариантных ультрафильтров.

Приведем еще одно замечание по поводу отношения равенства в теории моделей, без которого, в частности, нельзя обходиться при рассмотрении аксиом, характеризующих представления групп относительно алгебраических систем.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая система аксиом, включающих равенство ($=$), определяющая класс моделей $\mathfrak{K}$, и пусть еще G — модель из класса $\mathfrak{K}$. Отношение равенства оп-

ределяет на G некоторую эквивалентность ρ, и можно говорить о фактор-модели G/ρ. В общем случае эта фактор-модель может не быть моделью системы аксиом $\mathfrak{M}$. Если, однако, ко всем аксиомам из $\mathfrak{M}$ добавить еще следующие аксиомы:

$$(x_1 = y_1) \mathbin{\&} (x_2 = y_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} (x_n = y_n) \mathbin{\&} P(x_1\ x_2, \ldots, x_n) \to \\ \to P(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

где P пробегает все основные предикатные символы, а x_i и y_i — соответствующие предметы и переменные, — обозначим эту новую систему через $\mathfrak{M}'$, — то легко проверить (см., например, Гильберт—Аккерман [1]), что из того, что G удовлетворяет системе $\mathfrak{M}'$, следует, что этой же системе удовлетворяет и G/ρ.

В дальнейшем всегда будет считаться, что слова «система аксиом $\mathfrak{M}$ с равенством» предполагают совпадение наборов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. В таком случае, переходя к фактор-моделям G/ρ, мы обратим отношение равенства в тождество элементов. В доказательствах теорем нам придется иногда вводить новые предикаты. В связи с этим заметим, что при этом всегда молчаливо будет предполагаться, что добавляются и аксиомы приведенного выше типа, связывающие эти предикаты с равенством.

2. Теорема Мостовского—Эренфойхта. Пусть I — произвольное множество, упорядоченное (линейно) некоторым отношением $<$, (I, Γ) — пара, в которой группа Γ сохраняет порядок на множестве I, и $\mathfrak{K}$ — некоторый класс моделей, определяемый системой аксиом УИП с равенством и обладающий бесконечными моделями. В работе [1] А. Эренфойхт и А. Мостовский доказали следующую интересную теорему:

2.1. *В классе $\mathfrak{K}$ имеется такая модель G, что основное множество G содержит множество I, и существует представление группы Γ относительно модели G, совпадающее с исходным представлением на множестве I. В частности, если Γ действует на I точно, то можно считать, что* $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\ (G)$.

Докажем эту теорему. Пусть $\mathfrak{M}$ — аксиомы, определяющие класс $\mathfrak{K}$, и пусть $\mathfrak{P}$ — множество всех предикат-

ных символов этого класса. Согласно общим рассмотрениям из п. 1.3.4 набору $\mathfrak{M}$ отвечает некоторый набор формул $\widetilde{\mathfrak{M}}$ без кванторов существования и содержащих также символы операций. Множество всех таких операций обозначим через Ω. Набор $\widetilde{\mathfrak{M}}$ является совместным одновременно с набором $\mathfrak{M}$, причем всякая модель набора $\widetilde{\mathfrak{M}}$ является также и моделью набора $\mathfrak{M}$, и наоборот, на всякой модели системы формул $\mathfrak{M}$ можно так определить все операции из Ω, чтобы получилась модель набора формул $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

Обозначим через X_0 все предметные символы, входящие в формулы набора $\mathfrak{M}$, и пусть X — объединение множеств X_0 и I. Через G обозначим свободную Ω-алгебру, порожденную множеством X. Распространим действие группы Γ на множество X, считая, что все элементы из X_0 остаются неподвижными относительно действия группы Γ. В таком случае однозначно определяется действие группы Γ и в G, и мы получаем пару (G, Γ). Наша цель теперь показать, что на множестве G можно так определить все предикаты системы $\mathfrak{P}$, чтобы, с одной стороны, получилась модель, принадлежащая классу $\mathfrak{K}$, а с другой, — все эти предикаты были инвариантны относительно группы Γ.

Рассмотрим следующие три группы формул. К первой группе отнесем все формулы набора $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Во вторую группу мы включаем всевозможные формулы вида $a \neq b$, где (a, b) — пары различных элементов из множества I. Здесь элементы из I рассматриваются также как предметные символы, и мы надеемся, что такая двойственность в отношении этих элементов не вызовет недоразумений. Третья группа формул строится следующим образом.

Пусть P — предикат из $\mathfrak{P}$; допустим, что этот предикат n-местный, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы в G. Эти элементы могут быть выражены однозначно через элементы множества X с помощью некоторых операций системы Ω. Допустим, что при этом используются следующие элементы множества X: $x_1, x_2, \ldots, x_k$. В результате предикат P, связывающий элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, приводит к производному отношению P', уже k-местному, между элементами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, определяемому через $P'(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. К третьей

группе мы отнесем теперь всевозможные формулы вида

$$P'(x_1, x_2, \ldots, x_k) \rightleftarrows P'(x_1 \circ \sigma, x_2 \circ \sigma, \ldots, x_k \circ \sigma).$$

Это действительно формулы рассматриваемого нами языка, так как вместе с каждым $x \in X$ элемент $x \circ \sigma$, $\sigma \in \Gamma$, мы можем рассматривать как предметный символ. Обозначим через $\mathfrak{N}$ систему формул, объединяющую формулы приведенных трех групп.

Формулы набора $\mathfrak{N}$ не содержат кванторов существования, и все символы операций этого набора те же, что и в наборе $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Кроме того, система предметных символов набора $\mathfrak{N}$ исчерпывается множеством X. Поэтому, если будет установлена совместность этого набора, то отсюда будет следовать, что уже на алгебре G можно так определить все предикаты системы $\mathfrak{P}$, чтобы в результате получилась алгебраическая система G, удовлетворяющая всем аксиомам набора $\mathfrak{N}$.

Предположим, что это уже сделано. В таком случае очевидно, что на множестве G будет определена модель системы аксиом $\mathfrak{M}$, т. е. модель из класса $\mathfrak{K}$. Кроме того, нетрудно понять, что формулы третьей группы аксиом обеспечивают инвариантность всех основных предикатов такой модели относительно группы Γ. Ясно также, что после факторизации модели G по отношению равенства возникшая при этом модель G/ρ также удовлетворяет требованиям теоремы.

Таким образом, теорема будет полностью доказана, если мы установим, что система формул $\mathfrak{N}$ совместна.

Для доказательства совместности набора $\mathfrak{N}$ достаточно проверить, что этот набор является локально совместным. Пусть $\mathfrak{N}'$ — некоторая конечная часть набора $\mathfrak{N}$. Разобьем эту часть на три группы: $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$ и $\mathfrak{N}'_3$. Здесь $\mathfrak{N}'_1$ — аксиомы первой группы набора $\mathfrak{N}$, входящие в $\mathfrak{N}'$, и соответственно определяются $\mathfrak{N}'_2$ и $\mathfrak{N}'_3$. Нам удобно будет дальше предположить, что все предметные символы, входящие в формулы набора $\mathfrak{N}'_2$, входят также и в формулы набора $\mathfrak{N}'_3$. Если бы это было не так, то набор $\mathfrak{N}'_3$ можно было бы соответствующим образом пополнить.

Пусть дальше $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$ — все формулы системы $\mathfrak{N}'_3$, и σ_i — элемент из Γ, входящий в формулу $\mathfrak{A}_i$.

Обозначим еще через $M = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ совокупность всех элементов множества I, входящих в качестве предметных символов в левые части формул группы $\mathfrak{N}'_3$, и пусть $M = M_0$, и M_i — это совокупность элементов вида $g \circ \sigma_i$ по всем $g \in M$. Обозначим $M^* = M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_s$.

Согласно условию, среди моделей класса $\mathfrak{K}$ имеются и бесконечные модели. Пусть $\mathfrak{G}$ — одна из таких моделей. Через $\mathfrak{G}(n)$ обозначим множество всех подмножеств из $\mathfrak{G}$, содержащих ровно n различных элементов. Упорядочим еще некоторым произвольным образом множество $\mathfrak{G}$.

Если теперь A и B — два произвольных конечных подмножества в I и $\mathfrak{G}$ соответственно, состоящие из одинакового количества элементов, то существует в точности одно взаимно однозначное соответствие между элементами этих подмножеств, сохраняющее упорядоченность. Такое соответствие назовем *естественным соответствием*, связанным с множествами A и B. Воспользуемся еще следующим, обычным в математической логике, обозначением. Если P — высказывание, то P^ε, $\varepsilon = \pm 1$, обозначает P для $\varepsilon = 1$ и $\sim P$ для $\varepsilon = -1$.

Разобьем теперь множество $\mathfrak{G}(n)$ на 2^s непересекающихся подмножества $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_s}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$, по следующему признаку. Пусть $Y \in \mathfrak{G}(n)$ и пусть $P'_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — левая часть некоторой формулы $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Среди содержащихся здесь x могут быть некоторые элементы множества M. Все эти элементы заменим отвечающими им при естественном соответствии между M и Y элементами из Y. Остальным x также отвечают некоторые элементы модели $\mathfrak{G}$ (при содержательном истолковании набора формул $\widetilde{\mathfrak{M}}$ на модели $\mathfrak{G}$). Таким образом, все аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ превратятся в элементы из $\mathfrak{G}$, и мы получим определенное высказывание, которое условимся обозначать через $P'_i(Y)$. Подмножество Y мы отнесем к $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_s}$, если для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ будет выполняться $P_i^{\varepsilon_i}(Y) = И$. Понятно, что таким образом действительно получается разбиение $\mathfrak{G}(n)$ на 2^s непересекающиеся подсистемы.

Нетрудно проверить, что для некоторого распределения значений ε_i — $\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 \ldots \varepsilon_s^0$ — найдется такое бесконечное подмножество $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$, что $\mathfrak{G}'(n) \subset C_{\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\ldots\varepsilon_s^0}$. До-

казательство этого факта можно найти, например, в работе Ф. Рамсея [1]. Возьмем такое $\mathfrak{G}'$ и еще множество M^*, содержащее ровно m различных элементов. Так как $\mathfrak{G}'$ — бесконечное множество, то в $\mathfrak{G}'$ произвольным образом можно выделить подмножество Y^*, также содержащее ровно m различных элементов. Воспользуемся естественным соответствием между элементами из M^* и Y^* и сопоставим каждому $g \in M^*$ определенный элемент из множества Y^*. При этом все формулы из набора $\mathfrak{N}_3'$ приобретут определенный смысл на модели $\mathfrak{G}$. Покажем, что все эти формулы окажутся истинными на $\mathfrak{G}$. Пусть

$$P_i'(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k) \rightleftarrows P_i'(x_1 \circ \sigma_i,\ x_2 \circ \sigma_i,\ \ldots,\ x_k \circ \sigma_i)$$

одна из таких формул. Обозначим через $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$ и $y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_k'$ элементы в $\mathfrak{G}$, отвечающие аргументам левой и правой частей соответственно. Если некоторый x_j принадлежит множеству X_0, то y_j и y_j' совпадают, а если $x_j \in M \subset I$, то y_j и y_j' принадлежат $Y^* \subset \mathfrak{G}'$. Допустим далее, что $x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_r}$ — это все те аргументы левой части формулы, которые принадлежат подмножеству M. Если через Y обозначить образ множества M в Y^*, то соответствие $x_{i_j} \leftrightarrow y_{i_j}$, очевидно, является также естественным соответствием, связанным с множествами M и Y, так что из условия будем иметь $P_i'^{\varepsilon_i^0}(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k) = И$.

Пусть теперь Y_i — образ множества M_i в Y^*. Понятно, что соответствие $x_{i_j} \circ \sigma \leftrightarrow y_{i_j}'$ является естественным соответствием, связанным с множествами Y_i и M_i. Учитывая дальше, что группа Γ сохраняет порядок на множестве I, мы можем заключить, что соответствие $x_{i_j} \leftrightarrow y_{i_j}$ также является естественным соответствием, связанным уже с множествами M и Y_i. Снова по условию имеем:

$$P_i'^{\varepsilon_i^0}(y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_k') = И.$$

Теперь очевидно, что выполняется формула

$$P_i'(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k) \rightleftarrows P_i'(y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_k').$$

Так будет при любом $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ и, следовательно, выделенное отображение множества M^* в $\mathfrak{G}$

обеспечивает выполнимость на $\mathfrak{G}$ всех формул из $\mathfrak{N}_3'$. Кроме того, на $\mathfrak{G}$ выполнены все формулы набора $\mathfrak{N}_1'$, и ввиду того, что все предметные переменные набора $\mathfrak{N}_2'$ содержатся, по договоренности, в множестве M, все формулы из $\mathfrak{N}_2'$ также оказываются выполненными. Таким образом, доказаны совместность набора $\mathfrak{N}'$ и локальная совместность системы формул $\mathfrak{N}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что в каждом классе $\mathfrak{K}$, обладающем бесконечными моделями, имеются модели с бесконечными, даже непериодическими группами автоморфизмов.

Действительно, пусть Γ — произвольная упорядочиваемая группа и пусть (Γ, Γ) — соответствующая регулярная пара. Тогда правая группа Γ сохраняет порядок на левом множестве Γ. Если теперь G — модель из класса $\mathfrak{K}$, удовлетворяющая условиям теоремы, с множеством Γ в качестве I, то группа всех автоморфизмов модели G содержит, очевидно, подгруппу, изоморфную Γ. Роль группы Γ может исполнять, например, бесконечная циклическая группа.

Теорема Мостовского — Эренфойхта находит различные применения в общей теории моделей. Одним из этих применений является утверждение о том, что для всякой системы аксиом (УИП) арифметики имеется модель с бесконечным числом автоморфизмов. Этот факт существенно дополняет известную теорему Сколема о неполноте арифметики — он означает, что средствами УИП невозможно даже указать такую аксиоматику арифметики, в моделях которой, подобно арифметике, все элементы были бы индивидуализированы.

Нетрудно заметить, что теорема 2.1 неверна без дополнительных предположений относительно группы Γ. Действительно, если, например, $\mathfrak{K}$ — класс упорядоченных групп (этот класс аксиоматизируем), то группы автоморфизмов всех моделей этого класса должны быть группами без кручения.

Рассмотренное здесь доказательство теоремы 2.1 является довольно громоздким, и поэтому было бы интересно поискать упрощения. Как это видно из рассмотрений предыдущего пункта, в различных конкрет-

ных случаях такие упрощения могут быть достигнуты с помощью подходящих приведенных произведений. Приведенные произведения, как нетрудно понять, ничего не дают, например, для класса $\mathfrak{K}$ линейно упорядоченных групп. Однако в этом случае положение удается спасти с помощью так называемых лексикографических произведений.

Попутно заметим здесь, что А. Эренфойхту принадлежат некоторые исследования относительно групп автоморфизмов упорядоченных множеств. В частности, в совместной статье с Чангом (Чанг — Эренфойхт [1]) доказывается, что абелева группа тогда и только тогда является группой автоморфизмов некоторого линейно упорядоченного множества, когда эта группа изоморфна прямому произведению некоторых подгрупп аддитивной группы вещественных чисел.

В списке литературы указаны также некоторые другие работы по группам автоморфизмов упорядоченных множеств.

3. Одна теорема Г. Биркгофа. В работе Г. Биркгофа [2] приводится простая конструкция, из которой вытекает следующая теорема:

3.1. *Каждая группа является группой всех автоморфизмов некоторой алгебры.*

Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная группа и $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ — соответствующая регулярная пара. Каждому элементу $a \in \mathfrak{G}$ сопоставим унарную операцию ω_a по правилу: если $h \in \mathfrak{G}$, то $h\omega_a = ah$. Имеем

$$h\omega_a \circ g = ah \circ g = ahg = a(hg) = (h \circ g)\,\omega_a,$$

т. е. все такие операции ω_a инвариантны относительно действия группы $\mathfrak{G}$. Пусть теперь s — произвольная подстановка на множестве $\mathfrak{G}$, такая, что $(h\omega_a)\,s = (hs)\,\omega_a$ при любых h, $a \in \mathfrak{G}$.

Отмеченное тождество равносильно следующему: $(ah)\,s = a\,(hs)$. Беря теперь в качестве h единицу e группы $\mathfrak{G}$, мы получим $as = a\,(es)$, что означает, что подстановка s действует так же, как элемент $es \in \mathfrak{G}$. Следовательно, s принадлежит проекции группы $\mathfrak{G}$ относительно множества $\mathfrak{G}$, и эта проекция совпадает с группой всех автомор-

физмов алгебры, определяемой всеми операциями ω_a на множестве $\mathfrak{G}$.

Аналогичная конструкция, но уже на языке моделей с двуместными отношениями, имеется также в работе А. Мостовского и А. Эренфойхта, которой был посвящен предыдущий пункт.

Как мы увидим в следующем параграфе (теорема 3.1), для конечных групп имеет место более сильный результат.

Отметим еще, что, как показал Д. Грот [1], каждая группа есть группа всех автоморфизмов некоторого кольца. С другой стороны, в работе [1] Г. Сабидуси показывается, что каждая группа есть группа всех автоморфизмов некоторого графа. Было бы интересно знать, какие еще из известных классов алгебраических систем обладают указанным свойством. (См. также работы Е. Шмидта [1, 2]).

4. Локальные теоремы о представлениях. Предварительно приведем дополнительные замечания о многоосновных моделях. В связи с многоосновными моделями приходится рассматривать обобщенные формулы УИП, в которых переменные, предметные символы и кванторы специализированы, т. е. отнесены к определенным основным множествам. Известные приемы позволяют, однако, свести такие обобщенные формулы к обычным одноосновным формулам. Напомним, как это делается, следуя (дословно) работе А. И. Мальцева [15].

Пусть заданный класс $\mathfrak{K}$ многоосновных моделей имеет основные множества G_α, $\alpha \in I$, и основные предикаты P_β, $\beta \in I'$. Обозначим через $\mathfrak{K}^*$ класс моделей с одним основным множеством G и предикатными символами V_α, P^*_β, $\alpha \in I$, $\beta \in I'$. Здесь все предикаты V_α одноместные, а символы P^*_β того же типа, что и P_β, лишь аргументы в P^*_β относятся все к одному множеству G. Каждой формуле УИП $\mathfrak{A}$, относящейся к классу $\mathfrak{K}$, ставим в соответствие формулу $\mathfrak{A}^*$, связанную с классом $\mathfrak{K}^*$, по следующим правилам:

1. Если $\mathfrak{A}$ не содержит кванторов, то $\mathfrak{A}^*$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой символов P_β символами P^*_β.
2. Если $\mathfrak{A} = (\exists x^\alpha)\,\mathfrak{A}_1$, $\alpha \in I$, то $\mathfrak{A}^* = (\exists x)\,(V_\alpha(x) \,\&\, \mathfrak{A}^*_1)$.
3. Если $\mathfrak{A} = (\forall x^\alpha)\,\mathfrak{A}_1$, $\alpha \in I$, то $\mathfrak{A}^* = (\forall x)\,(V_\alpha(x) \rightarrow \mathfrak{A}^*_1)$.

Имея теперь модель класса $\mathfrak{K}$, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}$, полагаем $G = \bigcup G_\alpha$, $\alpha \in I$, и при этом $V_\alpha(x) = И$ равносильно $x \in G_\alpha$, и

$$P^*_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} P_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ Л, \text{ если } P_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{не определено.} \end{cases} \quad (1)$$

В результате получим одноосновную модель G, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}^*$. Обратно, если G есть модель, связанная с классом $\mathfrak{K}^*$ и удовлетворяющая $\mathfrak{A}^*$, то, обозначая через G_α совокупность элементов $x \in G$, для которых $V_\alpha(x) = И$, и определяя P_β соотношением (1), получим модель, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}$. Чтобы выполнялось соотношение $G = \bigcup G_\alpha$ при конечном множестве I, например $I = (1, 2, \ldots, r)$, следует ввести еще аксиому $(\forall x)(V_1(x) \vee V_2(x) \vee \ldots \vee V_r(x))$.

Поступая так со всеми формулами, определяющими класс многоосновных моделей $\mathfrak{K}$, мы получим новый набор уже одноосновных формул, всякая модель которого позволяет получить из нее модель из класса $\mathfrak{K}$. Этот процесс сведения позволяет также утверждать, что локальная теорема Гёделя—Мальцева, доказанная раньше для одноосновных моделей, справедлива и для многоосновных моделей.

Как уже отмечалось, всякую пару (G, Γ), где G — одноосновная алгебраическая система и Γ — группа, можно рассматривать как двуосновную модель. Однако многоосновные модели нас интересуют еще и в связи со следующим обстоятельством. В классической теории представлений областью действия являются векторные пространства. При исследовании вопроса о существовании представления здесь приходится определять действие на некоторой абелевой группе, подбирая при этом еще подходящее поле. Другими словами, приходится решать вопрос о существовании двуосновной модели, связанной с представлением группы.

В связи с этим фактом полезно также рассматривать представления групп относительно многоосновных моделей — многоосновные представления. При этом действующая группа Γ должна действовать как группа

подстановок на каждом из основных множеств, сохраняя все основные предикаты, в том числе и связывающие элементы из разных основных множеств.

Точность таких многоосновных представлений можно определять по-разному. Мы ограничимся в дальнейшем следующим специальным случаем. Будем считать, что среди основных множеств моделей рассматриваемого класса выделяется одно, называемое *главным основным множеством*. Все остальные основные множества назовем вспомогательными. В таком случае представление будем называть *точным*, если оно точно на главном основном множестве. Имея в виду применения к линейным представлениям, в дальнейшем мы ограничимся еще более специальным случаем, когда на всех вспомогательных множествах группа Г действует тривиально (просто не действует). Только такие многоосновные представления мы и будем рассматривать.

Теперь, наконец, можно сформулировать теорему, ради которой здесь шла речь о многоосновных представлениях.

4.1. *Если $\mathfrak{K}$ — аксиоматизируемый класс многоосновных моделей с выделенными главными основными множествами,* Г — *группа и каждая подгруппа из* Г, *имеющая конечную систему образующих, обладает точным представлением относительно некоторой модели из класса $\mathfrak{K}$, то и вся группа* Г *обладает точным представлением относительно некоторой модели класса $\mathfrak{K}$.*

Доказательство этой теоремы опирается на локальную теорему УИП. Отнесем каждому $\sigma \in \Gamma$ двуместный предикат $A_\sigma(x, y)$, который в содержательном истолковании означает следующее: если G — подходящая модель из класса $\mathfrak{K}$, на которой действует группа Г, то x и y — элементы главного основного множества G_1, а $A_\sigma(x, y) = И$ означает, что выполняется $x \circ \sigma = y$. Рассмотрим теперь следующие группы аксиом — формул УИП.

Через $\mathfrak{M}_1$ обозначим группу аксиом, определяющих класс $\mathfrak{K}$; среди этих аксиом имеются и аксиомы равенства. Заметим, что приводившиеся выше соображения о равенствах легко распространяются и на многоосновной случай. Дальше возьмем группу аксиом $\mathfrak{M}_2$, утверждающих, что для каждого $\sigma \in \Gamma$ отображение $x \to x \circ \sigma$

есть подстановка на главном основном множестве модели. Сюда относятся аксиомы:

1) $\forall x\ \exists y\ A_\sigma(x, y)$,
2) $\forall y\ \exists x\ A_\sigma(x, y)$,
3) $\forall x \forall y \forall z\, [A_\sigma(x, y)\, \&\, A_\sigma(x, z) \to (y = z)]$,
4) $\forall x \forall y \forall z\, [A_\sigma(x, z)\, \&\, A_\sigma(y, z) \to (x = y)]$.

Эти аксиомы следует мыслить выписанными для всех $\sigma \in \Gamma$. Все кванторы (здесь и в следующих группах $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$) отнесены к главному основному множеству.

Группа аксиом $\mathfrak{M}_3$ состоит из аксиом вида

$$\forall x \forall y \forall z\, [A_\sigma(x, y)\, \&\, A_\varphi(y, z) \to A_{\sigma\varphi}(x, z)].$$

Такие аксиомы берутся для всех $\sigma, \varphi \in \Gamma$, и означают они, очевидно, что выполняется соотношение $(x \circ \sigma) \circ \varphi = x \circ \sigma\varphi$.

Следующая группа аксиом $\mathfrak{M}_4$, выполняемых для всех $\sigma \in \Gamma$, отличных от единицы, означает, что рассматриваемое представление является точным:

$$\exists x \exists y\ ((x \neq y)\, \&\, A_\sigma(x, y)).$$

Дальше следуют аксиомы — группа $\mathfrak{M}_5$, — означающие, что элементы из Γ действуют как автоморфизмы модели. Эти аксиомы сопоставляются каждому основному предикату P и каждому $\sigma \in \Gamma$. Если P — n-местный предикат, то соответствующая аксиома имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n\, [A_\sigma(x_1, y_1)\, \&\, A_\sigma(x_2, y_2)\, \& \ldots \\ \ldots \&\, A_\sigma(x_n, y_n) \to (P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightleftarrows P(y_1, y_2, \ldots, y_n))],$$

причем здесь уже аргументы могут принадлежать разным основным множествам, и кванторы соответственно специализированы. Объединение этих пяти групп аксиом обозначим $\mathfrak{M}$. Теперь очевидно следующее.

Если мы имеем точное представление группы Γ относительно некоторой модели G класса $\mathfrak{K}$, то система аксиом $\mathfrak{M}$ совместна. В качестве соответствующей модели следует взять модель G и добавить к основным предикатам все предикаты $A_\sigma(x, y)$, считая, что $A_\sigma(x, y) = И$ означает, что x и y принадлежат главному основному множеству и $x \circ \sigma = y$. При этом условии все формулы набора $\mathfrak{M}$ окажутся истинными на G. Обратно, пусть система $\mathfrak{M}$ совместна и G — соответствующая модель. Тогда на мно-

жествах G определены и истинны все формулы набора $\mathfrak{M}_1$, и следовательно, модель G принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Кроме того, на главном множестве G_1 определены все $A_\sigma(x, y)$, а истинность формул наборов $\mathfrak{M}_i$, $i = 2, 3, 4, 5$, означает, что задано точное представление группы Г относительно G, рассматриваемой как модель из класса $\mathfrak{K}$.

Нам остается установить, что в условиях теоремы набор $\mathfrak{M}$ является совместным, а для этого ввиду теоремы Гёделя — Мальцева достаточно проверить локальную совместность этого набора.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая конечная часть формул набора $\mathfrak{M}$. Понятно, что в записи формул из $\mathfrak{N}$ участвует лишь конечное число элементов группы Г. Пусть $\sum$ — подгруппа в Г, порожденная всеми такими элементами. По условию, подгруппа $\sum$ обладает точным представлением относительно некоторой модели из класса $\mathfrak{K}$, и следовательно, набор $\mathfrak{N}$ оказывается совместным. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{M}$ — локально совместная и поэтому совместная система формул. Теорема доказана.

В четвертой главе будет указано применение этой теоремы к линейным представлениям.

Следующая теорема относится снова к одноосновным моделям.

4.2. *Пусть* Г *— группа,* $\mathfrak{K}$ *— некоторый аксиоматизируемый класс моделей и* G *— некоторая модель этого класса. Пусть еще для любых конечных подмножеств* $X \subset G$ *и* $Y \subset Г$ *в* $\mathfrak{K}$ *имеется модель* H*, содержащая* X *как подмодель, и в* Г *имеется подгруппа* $\sum$*, содержащая* Y*, причем* $\sum$ *обладает точным представлением относительно* H*. Тогда в* $\mathfrak{K}$ *имеется модель* $\tilde{G}$*, содержащая* G *как подмодель и такая, что* Г *обладает относительно* $\tilde{G}$ *точным представлением.*

Для доказательства этой теоремы используется понятие описания модели. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — набор формул УИП, определяющих класс $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$ — система всех основных предикатов, определяемых на моделях из $\mathfrak{K}$, и G — модель этого класса. Элементы из G будем рассматривать также как предметные символы некоторого логического языка. Предикатными символами этого языка будут всевозможные предикаты из $\mathfrak{P}$. Описанием модели G называется набор формул $\mathfrak{N}$, состоящий из всех формул

вида $a \neq b$, где a и b — различные элементы в G, а также из всевозможных формул, получаемых следующим образом: если P — некоторый, скажем n-местный, предикат из $\mathfrak{P}$, то относим к $\mathfrak{N}$ формулу $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если на модели G выполняется $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И$, а если на G имеем $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = Л$, то относим к $\mathfrak{N}$ формулу $\sim P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Обозначим далее через $\mathfrak{M}_1'$ объединение наборов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}$. Ясно, что модель G можно рассматривать также как модель набора формул $\mathfrak{M}_1'$.

Если, с другой стороны, G' — некоторая модель системы формул $\mathfrak{M}_1'$, то в этой модели имеется подмодель, изоморфная модели G. Основным множеством этой подмодели служат все элементы из G', сопоставляемые предметным символам, образованным элементами из G.

Допустим теперь, что для модели G выполняются условия теоремы, и пусть $\mathfrak{M}$ — система формул, составленная из набора $\mathfrak{M}_1'$ и наборов $\mathfrak{M}_i$, $i = 2, 3, 4, 5$, определенных так же, как в доказательстве предыдущей теоремы. Чтобы доказать настоящую теорему, достаточно установить совместность системы формул $\mathfrak{M}$. Будем доказывать ее локальную совместность.

Пусть $\mathfrak{M}'$ — некоторая конечная совокупность аксиом из набора $\mathfrak{M}$. В записи этих аксиом участвуют лишь конечные наборы элементов из G и Γ. Пусть X и Y — эти наборы в G и Γ соответственно. По условиям теоремы этим наборам отвечают подходящие H и $\sum$. Так как H принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и $\sum$ обладает точным представлением относительно H, то на H выполняются все те аксиомы набора $\mathfrak{M}'$, которые не входят в систему $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{N}'$ обозначает совокупность всех остальных аксиом, то различным предметным символам, входящим в эти аксиомы, отвечают различные элементы в H. Совокупность всех таких элементов образует подмодель в H, на которой истинны все формулы системы $\mathfrak{N}'$. Так как в этих формулах нет символов переменных, то набор $\mathfrak{N}'$ выполняется на всей модели H. Итак, система формул $\mathfrak{M}'$ является совместной, и $\mathfrak{M}$ — локально совместная система.

5. Разное. Перечислим здесь некоторые типы задач, связанных с группами автоморфизмов, парами и представлениями. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс моделей и

Г — группа. Рассматривая всемозможные представления группы Г относительно моделей из класса $\mathfrak{K}$, мы получаем класс представлений (или класс пар). В связи с такими классами представлений для различных конкретных классов моделей $\mathfrak{K}$ выделяются следующие общие проблемы:

а) Нахождение способов описания таких классов представлений или их подклассов для некоторых «хороших» $\mathfrak{K}$.

б) Нахождение условий существования полной системы представлений (с теми или иными дополнительными свойствами) группы Г в данном классе моделей. При этом система представлений называется *полной*, если пересечение всех ядер этих представлений совпадает с единицей в Г.

в) Изучение свойств самой группы Г в зависимости от различных классов ее представлений.

Первые две из этих проблем являются основными в классической теории представлений. С третьей связаны, например, различные приложения теории характеров в абстрактной теории групп.

Можно также, в частности, говорить и об обозрении всех представлений группы Г относительно заданной алгебраической системы G. В связи с этой задачей приобретает интерес то обстоятельство, что множество отображений $H(\Gamma, \mathfrak{A}(G))$ (см. п. 1.1.6) есть группа. Представления Г относительно G являются элементами в $H(\Gamma, \mathfrak{A}(G))$, и операции в этой группе позволяют рассматривать произведения представлений и соответствующие разложения представлений.

С этими задачами тесно связаны также следующие типы задач.

г) Дана индивидуальная алгебраическая система и требуется найти группу всех ее автоморфизмов. Здесь важную роль играет вопрос о продолжении автоморфизмов, проблема описания группы автоморфизмов в зависимости от тождественных и определяющих соотношений данной алгебраической системы. Некоторые системы оказываются жесткими — не имеют или почти не имеют автоморфизмов, а в других случаях автоморфизмов очень много. Если группа автоморфизмов достаточно

большая, то имеет смысл изучать ее абстрактные свойства. В некоторых хороших случаях группа всех автоморфизмов может быть полностью охарактеризована простейшими внутренними (абстрактными) свойствами.

д) Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс алгебраических систем и f — операция (абстрактная) на этом классе, сопоставляющая каждому набору систем $G_\alpha \in \mathfrak{K}$, $\alpha \in I$, определенную систему G в $\mathfrak{K}$. Требуется найти группу всех автоморфизмов для G, зная соответствующие группы для компонент G_α, некоторые взаимные свойства этих G_α и свойства операции f.

К этой задаче примыкает проблема рассмотрения различных производных пар.

е) Дана, с другой стороны, группа Γ, и исследуются свойства алгебраических систем, для которых эта группа служит группой автоморфизмов (не обязательно всех). В такой постановке группа Γ дается как абстрактная группа, но можно рассматривать и тот случай, когда дана чистая пара (G, Γ) и исследуются алгебраические системы на G (например, группы, кольца и т. д.), инвариантные относительно Γ.

ж) Изучается строение пар, принадлежащих некоторым специальным классам пар. При этом, как уже отмечалось, большой интерес представляет исследование зависимостей между различными абстрактными свойствами пар, областей действия и действующих групп.

з) Известный интерес представляет исследование связей между свойствами решетки подпар данной пары и свойствами самой пары, свойствами действия. Этот круг задач параллелен известной в теории групп проблематике, связанной со структурными изомор физмами.

и) Большой цикл задач возникает в связи с рассмотрением логических средств задания пар. Так, в частности, интересный цикл вопросов связан с понятием элементарной эквивалентности. Грубо говоря, две алгебраические системы элементарно эквивалентны, если они неразличимы средствами языка УИП. Элементарная эквивалентность далеко не всегда влечет изоморфизм, и поэтому возникает задача выделения случаев, когда изоморфизм систем может быть все же распознан

средствами УИП (разумеется, в терминах основных операций и предикатов). Эти задачи интересны и в применении к рассматриваемым здесь парам.

В теории пар можно ставить также ряд алгоритмических проблем.

С логическими основами связана также теория тождественных соотношений в парах (теория примитивных классов пар).

Различные конкретизации этих задач назывались уже раньше и будут отмечаться в дальнейшем.

§ 3. СООТВЕТСТВИЯ ГАЛУА

1. Соответствия Галуа для пар. В первом параграфе этой главы для любой пары (G, Γ) были определены Γ-централизатор $\mathfrak{z}_\Gamma(H) = \mathfrak{z}(H)$ подмножества $H \subset G$ и G-центр $Z_G(\Sigma)$ подмножества $\Sigma \subset \Gamma$. Элементы G-центра множества Σ называются также инвариантами множества автоморфизмов Σ. С этой точки зрения индивидуальные элементы алгебраической системы — это инварианты группы всех автоморфизмов этой системы.

Указанные функции $\mathfrak{z}$ и Z обладают следующими свойствами:

1) Если $H_1 \subset H_2$, то $\mathfrak{z}(H_1) \supset \mathfrak{z}(H_2)$, и аналогично из $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ следует $Z_G(\Sigma_1) \supset Z_G(\Sigma_2)$;

2) $Z_G(\mathfrak{z}(H)) \supset H$; $\mathfrak{z}(Z_G(\Sigma)) \supset \Sigma$;

3) $\mathfrak{z}(Z_G(\mathfrak{z}(H))) = \mathfrak{z}(H)$;

4) $\mathfrak{z}(H \circ \sigma) = \sigma^{-1}\mathfrak{z}(H)\sigma$ при любом $\sigma \in \Gamma$;

5) $Z_G(\gamma^{-1}\Sigma\gamma) = Z_G(\Sigma) \circ \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Свойства 1) и 2) непосредственно вытекают из определений, а из 2) следуют включения $\mathfrak{z}(Z_G(\mathfrak{z}(H))) \subset \mathfrak{z}(H)$ и $\mathfrak{z}(Z_G(\mathfrak{z}(H))) \supset \mathfrak{z}(H)$ и, значит, свойство 3).

Проверим теперь четвертое свойство. Пусть $h \in H$. Из очевидного соотношения

$$(h \circ \sigma) \circ (\sigma^{-1}\gamma\sigma) = (h \circ \gamma) \circ \sigma$$

можно заметить, что элемент $\sigma^{-1}\gamma\sigma$ в том и только в том случае оставляет неподвижным элемент $h \circ \sigma$, когда γ оставляет на месте h. Этот факт равносилен требуемому равенству. Для проверки последнего свойства возьмем

$\sigma \in \Sigma$, и пусть $a \in G$. Равенство

$$(a \circ \gamma) \circ (\gamma^{-1}\sigma\gamma) = (a \circ \sigma) \circ \gamma$$

означает, что a тогда и только тогда принадлежит $Z_G(\Sigma)$, когда $a \circ \gamma$ содержится в $Z_G(\gamma^{-1}\Sigma\gamma)$. Это равносильно равенству 5).

Отмеченные свойства означают, что функции $\mathfrak{z}$ и Z устанавливают особый тип отношений между подгруппами из Г и подмножествами из G. Отношения такого типа принято называть соответствиями Галуа*).

В случае пар (G, Г), в которых G — алгебраическая система, мы имеем уже соответствие Галуа между подгруппами в Г и подсистемами этой системы.

Соответствие Галуа позволяет определить операции *замыкания* (замыкание Галуа) как в действующей группе, так и в области действия. Делается это следующим образом. Если Σ — подмножество в Г, то полагаем $\bar{\Sigma} = \mathfrak{z}(Z_G(\Sigma))$. Аналогично, если H — подмножество в G, то $\bar{H} = Z_G(\mathfrak{z}(H))$. Из приведенных выше свойств функций $\mathfrak{z}$ и Z непосредственно следует, что $\Sigma \subset \bar{\Sigma}$, $H \subset \bar{H}$, $\bar{\Sigma}$ — подгруппа в Г, $\bar{H}$ — подсистема в G, $\bar{\bar{\Sigma}} = \bar{\Sigma}$. $\bar{\bar{H}} = \bar{H}$. Кроме того, если Σ — нормальный делитель в Г, то $Z_G(\Sigma)$ — допустимая подсистема в G, а для всякой допустимой подсистемы $H \subset G$ подгруппа $\mathfrak{z}_\Gamma(H)$ является нормальным делителем в Г. Следовательно, замыкание нормального делителя из Г также является нормальным делителем, и замыкание допустимой подсистемы в G есть допустимая подсистема. Непосредственно получается и следующее утверждение: всякая замкнутая подсистема $H \subset G$ допустима относительно нормализатора подгруппы $\mathfrak{z}_\Gamma(H)$, и этот нормализатор совпадает с совокупностью всех $\gamma \in \Gamma$, для которых $H \circ \gamma = H$.

Ясно, что соответствие Галуа является взаимно однозначным для замкнутых подгрупп в Г и замкнутых подсистем в G.

---

*) В действительности это только одна из разновидностей соответствий Галуа. В дальнейшем будут приводиться и другие типы соответствий Галуа. Самое общее определение соответствий Галуа см., например, в книге А. Г. Куроша [4].

Соответствия Галуа играют, как известно, решающую роль в классической теории Галуа. В этой теории областью действия является поле, а действующая группа состоит из всех автоморфизмов этого поля, оставляющих неподвижными элементы некоторого подполя. При этом рассматривается случай, когда все подполя, содержащие это подполе, а также все подгруппы группы автоморфизмов замкнуты.

Теория Галуа полей обобщалась в различных направлениях, и, в частности, многочисленные исследования посвящены теории Галуа тел, колец, линейных алгебр, дифференциальных полей и т. д. Имеется также небольшое число работ, посвященных теории Галуа общих алгебраических систем (см., например, работу М. Краснера [1] и заметку А. Адама [1]; сюда же примыкает статья Ф. Маутнера [1]).

2. Продолжение представлений. Шкала Бурбаки. Следуя Н. Бурбаки, через $\mathfrak{P}(G)$ будем обозначать множество всех подмножеств множества G. Если задано представление группы Γ относительно множества G (чистая пара (G, Γ)), то это представление естественно продолжается до представления Γ относительно $\mathfrak{P}(G)$: если H — элемент в $\mathfrak{P}(G)$ и $\sigma \in \Gamma$, то $H \circ \sigma$ — это элемент в $\mathfrak{P}(G)$, совпадающий с множеством всех $h \circ \sigma$, $h \in H$. Другой вид продолжения представлений, который нас здесь будет интересовать, — это прямая сумма (произведение) представлений группы Γ относительно нескольких множеств G_i, $i \in I$. При этом, как мы знаем, получается представление Γ относительно декартова произведения всех этих G_i.

Сделаем несколько замечаний по поводу пары $(\mathfrak{P}(G), \Gamma)$. Множество $\mathfrak{P}(G)$ можно рассматривать как булеву алгебру относительно теоретико-множественных операций. При этом в случае бесконечного G будем рассматривать и произвольные бесконечные операции пересечения и объединения. Все эти операции сохраняются группой Γ.

Непосредственно из определений следует, что для любой подгруппы $\Sigma \subset \Gamma$ $\mathfrak{P}(G)$-центр $Z(\Sigma)$ — это в точности все Σ-допустимые подмножества из G. Так как

все эти Σ-допустимые подмножества в G образуют подалгебру относительно теоретико-множественных операций, то мы, таким образом, приходим к соответствию Галуа между подалгебрами в $\mathfrak{P}(G)$ и подгруппами группы Γ. Отметим еще, что Γ-*нормализатор* совокупности $[X]$ подмножеств из G есть Γ-централизатор $[X]$, рассматриваемого как подмножество в $\mathfrak{P}(G)$, взятый относительно пары $(\mathfrak{P}(G), \Gamma)$.

Докажем теперь следующую теорему (ср. Г. Биркгоф [3]):

2.1. *Если* Γ — *группа всех подстановок множества* G, *то всякая подалгебра* $\mathfrak{F}$ *из* $\mathfrak{P}(G)$ *полностью определяется своим* Γ-*централизатором.*

Если X — элемент в $\mathfrak{F}$, то и дополнение $G \setminus X$ также принадлежит $\mathfrak{F}$, и поэтому множество G покрывается подмножествами, являющимися элементами в $\mathfrak{F}$. Для каждого $g \in G$ через X_g обозначим пересечение всех $X \in \mathfrak{F}$, содержащих этот g. X_g также принадлежит $\mathfrak{F}$, и, как легко видеть, все эти X_g составляют разбиение множества G на непересекающиеся классы. Обозначим такое разбиение через $\rho(\mathfrak{F}) = \rho$. Понятно, что подмножество $X \subset G$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда оно является объединением классов разбиения ρ. Это, в частности, означает, что подалгебры в $\mathfrak{P}(G)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с различными разбиениями множества G.

Γ-централизатор разбиения ρ совпадает, очевидно, с Γ-централизатором подалгебры $\mathfrak{F}$. Обозначим этот Γ-централизатор через Σ. Ясно, что Σ совпадает с пересечением всех Γ-нормализаторов смежных классов из ρ, если здесь исходить снова из пары (G, Γ). Нетрудно также заметить, что классы разбиения $\rho(\mathfrak{F})$ — это в точности Σ-траектории всех элементов из G. Этот факт является следствием того, что Γ содержит все подстановки множества G. Всякое допустимое относительно Σ подмножество в G есть сумма таких траекторий и поэтому является элементом в $\mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ совпадает с центром $Z_{\mathfrak{P}(G)}(\Sigma)$, что и требовалось.

Отметим еще, что соответствие Галуа между подалгебрами булевой алгебры и подгруппами группы ее

автоморфизмов находит важные приложения в теории релейно-контактных схем и теории кодирования. Обзор некоторых из относящихся сюда результатов содержится в статье Г. Н. Поварова [1].

Пусть дальше $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — некоторый набор множеств, которые будем называть *базисными*. Исходя из этих базисных множеств, с помощью операций взятия множества всех подмножеств и декартовых произведений мы получаем новый набор множеств. Поступая аналогично с этим новым набором и продолжая этот процесс, мы будем получать множества *шкалы Бурбаки*.

Очевидно, что если заданы представления группы Г относительно всех базисных множеств, то эти представления шаг за шагом могут быть продолжены на все множества шкалы Бурбаки. Согласно Н. Бурбаки задание на базисных множествах $G_1, G_2, \ldots, G_n$ математических структур равносильно выделению подходящих элементов некоторых множеств шкалы Бурбаки. Так, например, задание n-местного предиката на множестве G равносильно выделению некоторого подмножества в декартовом произведении $G^n = G \times G \times \ldots \times G$ n экземпляров множества G. Действительно, если P — n-местный предикат, заданный на G, то ему отвечает подмножество M_P в G^n, состоящее из всех точек $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G^n$, для которых выполняется $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = И$. Если, с другой стороны, M — подмножество в G^n, то оно определяет n-местный предикат P по правилу $P(a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n) = \boldsymbol{И}$ в том и только в том случае, когда точка $\bar{a}$ принадлежит M. Указанное соответствие является взаимно однозначным. Подмножество M_P есть элемент в множестве $\mathfrak{P}(G^n)$, принадлежащем шкале с базисом G.

Посмотрим теперь, что при таком соответствии будет означать инвариантность предиката относительно элемента $\sigma \in Г$. Пусть P — n-местный предикат на G, и M_P — отвечающее ему подмножество в G^n. Тогда, очевидно, равносильны следующие два условия:

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rightleftarrows P(a_1 \circ \sigma, a_2 \circ \sigma, \ldots, a_n \circ \sigma)$$

и

$$\bar{a} \in M_P \rightleftarrows \bar{a} \circ \sigma \in M_P.$$

Равносильность этих условий означает, что предикат P тогда и только тогда инвариантен относительно σ, когда M_P — σ- и σ^{-1}-допустимое подмножество в G^n.

Пусть дальше A и B — два множества, на которых действует группа Γ, и $H(A, B)$ — множество всех отображений множества A в множество B. Каждому элементу $u \in H(A, B)$ отвечает подмножество $C_u \subset A \times B$. C_u состоит из пар (a, b), в которых a пробегает все A и $b = au$. Группа Γ действует также и в $\mathfrak{P}(A \times B)$, и для каждого $\sigma \in \Gamma$ множество $C_u \circ \sigma$ также определяет некоторый элемент $v \in H(A, B)$. Теперь мы можем говорить и о действии группы Γ в $H(A, B)$, считая, что $u \circ \sigma = v$. Легко видеть, что этот элемент $u \circ \sigma$ может быть определен и следующим правилом:

$$a(u \circ \sigma) = ((a\sigma^{-1})u)\sigma, \quad a \in A.$$

Если, в частности, на множестве B группа Γ действует тождественно, то $a(u \circ \sigma) = (a \circ \sigma^{-1})u$. Такое представление группы Γ на множестве $H(A, B)$ находит различные приложения, в частности, в анализе, где оно используется для классификации функций (по их симметриям).

Если, далее, A и B — алгебраические системы и если задано представление группы Γ относительно каждой из этих систем, то для любого гомоморфизма u системы A в B отображение $u \circ \sigma$, $\sigma \in \Gamma$, также, очевидно, является гомоморфизмом A в B.

Как мы знаем (ср. пп. 1.1.6 и 2.1.4), если множество B есть алгебраическая система, то $H(A, B)$ можно рассматривать как однотипную с B алгебраическую систему. Легко проверить, что если группа Γ сохраняет все отношения и предикаты в B, в частности, действует в B тождественно, то определенное выше действие Γ в $H(A, B)$ также сохраняет все отношения и предикаты.

3. Еще о соответствиях Галуа. Пусть задана некоторая чистая пара (G, Γ) и пусть P — n-местный предикат, определенный на множестве G. Через Γ_P обозначим совокупность всех элементов из Γ, сохраняющих этот предикат. Γ_P — подгруппа в Γ, совпадающая

с Г-нормализатором подмножества $M_P \subset G^n$, отвечающего предикату P. Мы можем еще сказать, что элементы Γ_P — это симметрии множества M_P, связанные с группой Г.

Пусть дальше на множестве G определена некоторая модель $\langle G, \mathfrak{P}\rangle$. Сопоставим этой модели подгруппу $\Gamma_{\mathfrak{P}} \subset \Gamma$, совпадающую с пересечением всех Γ_P, $P \in \mathfrak{P}$. Понятно, что если группа Г совпадает с группой всех подстановок множества G, то в таком случае $\Gamma_{\mathfrak{P}}$ — группа всех автоморфизмов модели $\langle G, \mathfrak{P}\rangle$.

Если, с другой стороны, Σ — некоторая подгруппа в Г, то ей отвечает определенная модель на множестве G, состоящая из всех предикатов, заданных на этом множестве и инвариантных относительно всех элементов из Σ.

Таким образом, мы приходим к связям типа соответствий Галуа. Эти связи между алгебраическими системами и группами изучались в нескольких работах; наиболее подробная из них—работа М. И. Краснера [1]. Рассмотрим некоторые из относящихся сюда вопросов.

Вначале заметим, что, используя представление предикатов в виде подмножеств декартовых степеней основного множества G, нетрудно охарактеризовать все отношения на множестве G, инвариантные относительно некоторой подгруппы $\Sigma \subset \Gamma$.

В самом деле, чтобы найти все n-местные предикаты, инвариантные относительно подгруппы Σ, нужно, исходя из пары (G^n, Γ), взять в G^n решетку всех Σ-допустимых подмножеств; как мы знаем, базисом такой решетки служат всевозможные Σ-траектории элементов из G^n. Поступая так для каждого $n = 1, 2, \ldots$, мы найдем все Σ-инвариантные отношения.

Труднее выделяются Σ-инвариантные отношения, являющиеся операциями на множестве G. Покажем, как это может быть сделано.

Допустим вначале, что нужно найти n-арные операции на G, инвариантные относительно некоторого $\sigma \in \Gamma$. С этой целью разобьем все множество G^n на $\{\sigma\}$-траектории своих элементов. Пусть $\bar{a} \circ \{\sigma\}$ — одна из таких траекторий. Рассмотрим два случая. Если эта траектория бесконечна, то сопоставим $\bar{a}$ произвольный элемент $g \in G$, а элементу $\bar{a} \circ \sigma^{\pm k}$ отнесем $g \circ \sigma^{\pm k}$. Поскольку все

элементы из $\bar{a} \circ \{\sigma\}$ при этом берутся только по одному разу, мы получаем однозначное отображение элементов из $\bar{a} \circ \{\sigma\}$ в G. Пусть теперь $\bar{a} \circ \{\sigma\}$ состоит из конечного числа элементов. Тогда найдется такое первое $n > 0$, что $\bar{a} \circ \sigma^n = \bar{a}$ и элементы $\bar{a}$, $\bar{a} \circ \sigma, \ldots, \bar{a} \circ \sigma^{n-1}$ исчерпывают всю траекторию и все они различны. Пусть дальше g — произвольный элемент в G, для которого при некотором m, являющемся делителем n, выполняется $g \circ \sigma^m = g$. Снова сопоставляем $\bar{a} \to g$ и $\bar{a} \circ \sigma^k \to g \circ \sigma^k$, $k < n$. Такое отображение является однозначным. Аналогичным образом поступая со всеми $\{\sigma\}$-траекториями элементов из G^n, мы зададим однозначное отображение множества G^n в множество G, т. е. определим на G некоторую (n-арную) операцию ω. Непосредственно проверяется, что такая операция инвариантна относительно σ. Очевидно также, что указанным приемом получаются все инвариантные относительно σ n-арные алгебраические операции на множестве G. Для нахождения всех σ-инвариантных операций остается варьировать n. Если теперь $\Omega(\sigma)$ обозначает множество всех инвариантных относительно σ операций на G, то пересечение всех этих $\Omega(\sigma)$ по всем $\sigma \in \Sigma$ дает все множество Σ-инвариантных операций.

Естественно также ставить вопрос о нахождении отношений и операций, инвариантных относительно некоторой группы и удовлетворяющих некоторым условиям, например аксиомам группы, кольца и т. д. В таком виде эта задача уже становится значительно сложнее.

Обратим еще внимание на следующее обстоятельство.

В первой главе отмечалось, что с помощью операций математической логики из одних предикатов можно получать другие, производные предикаты. Точно так же через суперпозиции можно строить производные операции. Легко заметить, что если при этом исходные предикаты или операции Σ-инвариантны, то и соответствующие производные операции и предикаты Σ-инвариантны. Здесь только нужна следующая оговорка. В образовании производных предикатов и операций могут участвовать некоторые фиксированные элементы из G. В связи с этим, чтобы сохранить нужную инвариантность, необходимо допустить, чтобы все эти выделенные элементы

оставались неподвижными относительно действия элементов из Σ.

Доказательство инвариантности производных операций и предикатов можно получить непосредственно, но можно также воспользоваться следующими соображениями. Если предикатам сопоставлять подходящие подмножества декартовых произведений, то логическим операциям над предикатами будут отвечать некоторые теоретико-множественные операции, а эти операции над Σ-допустимыми подмножествами снова приводят к Σ-допустимым подмножествам.

Таким образом, мы видим, что множество всех Σ-инвариантных отношений над G замкнуто относительно логических операций, а совокупность всех алгебраических операций, инвариантных относительно Σ, замкнута относительно суперпозиций.

Если множество G конечно, то для такого случая, используя формулу, приведенную в конце п. 1.3, можно подсчитать общее число различных Σ-инвариантных n-местных отношений на G, где Σ — произвольная, действующая на множестве G группа. (Сравни в связи с этим работы Р. Л. Дейвиса [1] и М. Харисона [1]).

Введем дальше следующее определение.

Пусть (G, Γ) — некоторая чистая пара. В соответствии с п. 1 этого параграфа подгруппу $\Sigma \subset \Gamma$ назовем замкнутой, если $\Sigma = \Gamma_{\mathfrak{P}}$, где $\mathfrak{P}$ — совокупность всех инвариантных относительно Σ предикатов на множестве G. Понятно, что замкнутость Σ означает также существование такой системы предикатов $\mathfrak{P}$, что $\Sigma = \Gamma_{\mathfrak{P}}$. Если, в частности, $\Gamma = S_G$ — группа всех подстановок множества G, то, очевидно, замкнутые подгруппы в Γ — это такие подгруппы, которые являются группами всех автоморфизмов некоторых моделей, определенных на G.

Покажем, что если G — бесконечное множество, то не каждая подгруппа из S_G замкнута. В самом деле, пусть, например, S_G^{ω} — подгруппа в S_G, состоящая из всех подстановок, перемещающих лишь конечное число элементов множества G. Легко видеть, что при любом натуральном n S_G^{ω}-траектории в множестве G^n совпадают

с S_G-траекториями этого множества. Это означает, что замыкание подгруппы S_G^ω совпадает со всей группой S_G.

Следующая теорема показывает, что для конечных групп подстановок положение иное.

3.1. *Если* (G, Γ) — *точная пара с конечной группой* Γ, *то все подгруппы из* Γ *замкнуты.*

Для каждого конечного подмножества X_α из G обозначим $\overline{X}_\alpha = X_\alpha \circ \Gamma$ и $\mathfrak{z}_\alpha = \mathfrak{z}_\Gamma(\overline{X}_\alpha)$. Понятно, что $\overline{X}_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ влечет $\mathfrak{z}_\beta \subset \mathfrak{z}_\alpha$, и пересечение всех $\mathfrak{z}_\alpha$ совпадает с единицей в Γ (так как Γ действует точно). Но поскольку Γ — конечная группа, то пересечение всех $\mathfrak{z}_\alpha$ есть пересечение некоторой конечной совокупности таких подгрупп. Следовательно, в G найдется такое конечное допустимое подмножество H, что индуцированное представление группы Γ относительно H является точным.

Пусть одно из таких подмножеств H содержит n элементов. Для каждой подгруппы $\Sigma \subset \Gamma$ мы построим n-местный предикат P на G такой, что $\Gamma_P = \Sigma$. Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — элемент в G^n, в котором компоненты a_i пробегают все множество H. В множестве G^n возьмем траекторию $\bar{a} \circ \Sigma$. Покажем, что Γ-нормализатор этой траектории совпадает с Σ.

Пусть γ — такой элемент в Γ, что $\bar{a} \circ \Sigma\gamma = \bar{a} \circ \Sigma$. Это значит, что в подгруппе Σ найдется элемент σ, для которого выполняется равенство $\bar{a} \circ \gamma = \bar{a} \circ \sigma$. Элемент $\bar{a}$ выбран таким образом, что последнее равенство означает, что γ и σ действуют одинаково в подмножестве H. Имея в виду, что представление Γ относительно H является точным, мы можем заключить, что γ и σ совпадают, и следовательно, $\gamma \in \Sigma$.

Теперь ясно, что если, исходя из подмножества $\bar{a} \circ \Sigma \subset G^n$, определить n-местный предикат P на G, то получим $\Sigma = \Gamma_P$, что и требовалось.

Из этой теоремы, в частности, следует, что при любом натуральном n каждая подгруппа симметрической группы S_n является группой всех автоморфизмов некоторой модели порядка n.

Заметим далее, что если допустить к рассмотрению еще и бесконечно местные предикаты, то рассуждениями, аналогичными предыдущим, можно показать, что для

любой точной пары (G, Γ) каждая подгруппа из Γ оказывается замкнутой (М. Краснер [1]).

Приведем в заключение следующую теорему Пойа (доказательство см. в книге Г. Биркгофа [3]). Если (G, Γ) — некоторая чистая пара, то, как мы знаем, ей отвечает пара $(\mathfrak{P}(G), \Gamma)$. Теорема утверждает, что если G — конечное множество и Γ — группа всех его подстановок, то проекция Γ относительно алгебры $\mathfrak{P}(G)$ совпадает с группой всех автоморфизмов этой алгебры. Кроме того, всякая операция на $\mathfrak{P}(G)$, инвариантная относительно Γ, является производной от обычных теоретико-множественных операций.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ВНЕШНИЕ СВОЙСТВА И РАДИКАЛЫ

1. Один способ образования внешних свойств. Мы начнем с рассмотрения чистых пар. Пусть θ — абстрактное теоретико-групповое свойство. Действующую группу Γ назовем *$\tilde{\theta}$-группой*, если для любой Γ-траектории $A \subset G$ группа $\Gamma/\mathfrak{z}_\Gamma(A)$ является θ-группой. Легко видеть, что подгруппа $\mathfrak{z}_\Gamma(A)$ совпадает с подгруппой $\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a) = \bigcap\limits_{\sigma \in \Gamma} \sigma^{-1}\mathfrak{z}_\Gamma(a)\sigma$ при любом $a \in A$. Это означает, что свойство $\tilde{\theta}$ равносильно тому, что для каждого элемента $a \in G$ фактор-группа $\Gamma/\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a)$ является θ-группой.

Из определения свойства θ непосредственно следует, что если $\tilde{\theta}$-пара (G, Γ) является точной, то группа Γ является подпрямым произведением θ-групп. Верно и следующее обратное утверждение.

1.1. *Если абстрактная группа* Γ *является подпрямым произведением* θ-*групп, то существует точная пара* (G, Γ), *обладающая свойством* $\tilde{\theta}$.

Пусть Σ_α, $\alpha \in I$, — некоторая система таких нормальных делителей в Γ, что Γ/Σ_α — θ-группы и пересечение всех Σ_α совпадает с единицей группы Γ. Для каждого Σ_α через G_α обозначим фактор-множество Γ/Σ_α, и пусть (G_α, Γ) — соответствующая фактор-пара регулярной пары (Γ, Γ). Возьмем теперь теоретико-множественную сумму всех G_α, обозначим ее через G и в соответствии с п. 1.3 определим пару (G, Γ). При этом все G_α — это Γ-траек-

тории множества G, и, кроме того, для каждого G_α имеем $\mathfrak{z}_\Gamma(G_\alpha)=\Sigma_\alpha$. Отсюда следует, что пара (G, Γ) является точной $\tilde{\theta}$-парой.

Пусть теперь (G, Γ) — произвольная чистая пара и θ — абстрактное теоретико-групповое свойство. Элемент $a\in G$ назовем *θ-элементом*, если $\Gamma/\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a)$ — θ-группа. Понятно, что если a — θ-элемент, то каждый элемент Γ-траектории, проходящей через a, также является θ-элементом, и, следовательно, совокупность всех θ-элементов из G является допустимым подмножеством. Это подмножество совпадает с радикалом $\tilde{\theta}_\Gamma(G)$.

Пусть снова (G, Γ) — некоторая чистая пара. Рассматривая здесь множество G как Γ-алгебру, возьмем в этой алгебре локальную систему подалгебр G_α, имеющих конечные системы образующих. Мы получим систему подпар (G_α, Γ), где множества G_α являются суммами конечного числа Γ-траекторий. Будем говорить, что пара (G, Γ) обладает свойством $\tilde{\tilde{\theta}}$ (относительно θ), если для любого G_α группа $\Gamma/\mathfrak{z}_\Gamma(G_\alpha)$ является θ-группой. Имеет место следующее утверждение:

1.2. *Если абстрактный класс θ-групп замкнут относительно конечных подпрямых произведений, то свойства пар $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\tilde{\theta}}$ совпадают.*

В самом деле, пусть пара (G, Γ) обладает свойством $\tilde{\theta}$ и пусть G_α — сумма Γ-траекторий $a_1\circ\Gamma$, $a_2\circ\Gamma$, ..., $a_n\circ\Gamma$. Понятно, что $\mathfrak{z}_\Gamma(G_\alpha)=\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a_1)\cap\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a_2)\cap\ldots\cap\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a_n)$. Так как все $\Gamma/\bar{\mathfrak{z}}_\Gamma(a_i)$ — θ-группы, то из условий утверждения по теореме о подпрямых произведениях заключаем, что фактор-группа $\Gamma/\mathfrak{z}_\Gamma(G_\alpha)$ также является θ-группой, и, следовательно, пара (G, Γ) является $\tilde{\tilde{\theta}}$-парой. Обратное очевидно.

В соответствии с принятым ранее условием будем говорить, что пара (G, Γ) обладает свойством $L\tilde{\theta}$ (или группа Γ является *локально $\tilde{\theta}$-группой*), если каждая подгруппа с конечным числом образующих из Γ обладает свойством $\tilde{\theta}$. Свойство $L\tilde{\theta}$ является радикальным свойством относительно областей действия. Чтобы убедиться в этом, введем вначале следующее определение.

Элемент $a\in G$ назовем *локально θ-элементом* (*$L\theta$-элементом*), если этот элемент является θ-элементом отно-

сительно каждой подгруппы $\Sigma \subset \Gamma$, имеющей конечное число образующих.

Покажем, что если a — $L\theta$-элемент, то и вся Γ-траектория, проходящая через a, состоит из $L\theta$-элементов. Пусть $\gamma \in \Gamma$, $b = a \circ \gamma$, и пусть Σ — произвольная подгруппа с конечным числом образующих в Γ. Подгруппа $\gamma\Sigma\gamma^{-1} = \Sigma'$ также имеет конечное число образующих. Обозначим $S' = a \circ \Sigma'$ и $S = b \circ \Sigma$. Очевидно, $S = S' \circ \gamma$. По условию, $\Sigma'/\mathfrak{z}_{\Sigma'}(S')$ — θ-группа. Так как пары (S', Σ') и $(S, \Sigma) = (S' \circ \gamma, \gamma^{-1}\Sigma'\gamma)$ изоморфны, то и $\Sigma/\mathfrak{z}_{\Sigma}(S)$ — θ-группа. Но это и означает, что b — $L\theta$-элемент.

Таким образом, множество всех $L\theta$-элементов из G является допустимым подмножеством. Обозначим это подмножество через H. Пара (H, Γ) такова, что каждый элемент из H является $L\theta$-элементом. Это, конечно, равносильно тому, что эта пара является $L\tilde{\theta}$-парой. С другой стороны, если H' — некоторое $L\tilde{\theta}$-подмножество в G, то каждый элемент из H' является $L\theta$-элементом, и поэтому $H' \subset H$. Таким образом, $H = L\tilde{\theta}(G)$.

Из приведенного выше замечания об отношениях между свойствами $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\tilde{\theta}}$ непосредственно получаем еще следующее утверждение:

1.3. *Если класс θ-групп замкнут относительно гомоморфизмов, взятия подгрупп и относительно конечных прямых произведений, то пара (G, Γ) тогда и только тогда является $L\tilde{\theta}$-парой, когда для любой ее подпары (H, Σ), имеющей конечную систему образующих, фактор-группа $\Sigma/\mathfrak{z}_{\Sigma}(H)$ является θ-группой.*

Для свойства θ, удовлетворяющего приведенным сейчас условиям, очевидны также следующие утверждения.

Если группа Γ является локально θ-группой (т. е. обладает локальной системой из θ-подгрупп), то для любой пары (G, Γ) выполняется свойство $L\tilde{\theta}$. Если регулярная пара (Γ, Γ) является $L\tilde{\theta}$-парой, то сама группа Γ является локально θ-группой. В общем же случае действующая $L\tilde{\theta}$-группа может не быть локально θ-группой.

Допустим теперь, что в паре (G, Γ) область действия G является алгеброй и группа Γ сохраняет все операции

этой алгебры. Покажем, что для свойства θ, удовлетворяющего условиям предложения 1.3, соответствующая чистая пара (G, Γ) в том и только в том случае будет $L\tilde{\theta}$-парой, когда в паре (G, Γ) имеется локальная система подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ таких, что проекция группы Γ_α относительно G_α является θ-группой.

Пусть вначале чистая пара (G, Γ) является $L\tilde{\theta}$-парой и пусть X и Y — конечные подмножества соответственно в G и Γ. Обозначим $\Sigma = \{Y\}$, $\bar{X} = X \circ \Sigma$, и $H = \{\bar{X}\}$ — подалгебра в G, порожденная множеством $\bar{X}$. Мы знаем (см. 1.2), что проекция Σ относительно $\bar{X}$ является θ-группой (эта проекция изоморфна фактор-группе $\Sigma/\mathfrak{z}_\Sigma(\bar{X})$). С другой стороны, очевидно, что Σ-централизаторы $\bar{X}$ и $H = \{\bar{X}\}$ совпадают, и значит, $\Sigma/\mathfrak{z}_\Sigma(H)$ — θ-группа. Следовательно, проекция Σ относительно H является θ-группой. Но пары вида (H, Σ) составляют локальную систему в паре (G, Γ), и следовательно, в одну сторону утверждение доказано. В другую — оно очевидно.

Для свойства θ, удовлетворяющего отмеченным условиям, докажем еще следующее утверждение:

1.4. *Если (G, Γ) — пара, в которой G — алгебра, то $L\tilde{\theta}$-радикал в G является подалгеброй в G.*

Пусть H — $L\tilde{\theta}$-радикал в G, ω — n-арная операция, принадлежащая множеству основных операций, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы в H, и $b = a_1 a_2 \ldots a_n \omega$. Нужно показать, что элемент b также принадлежит H, т. е. что этот элемент является $L\tilde{\theta}$-элементом. Пусть Σ — подгруппа в Γ с конечным числом образующих и A — минимальное Σ-допустимое подмножество, содержащее элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. A содержится в H, и фактор-группа $\Sigma/\mathfrak{z}_\Sigma(A)$ является θ-группой. Обозначим через B Σ-траекторию $b \circ \Sigma$ и покажем, что $\mathfrak{z}_\Sigma(A) \subset \mathfrak{z}_\Sigma(B)$. Пусть $c \in B$, $c = b \circ \sigma$, $\sigma \in \Sigma$, и $\varphi \in \mathfrak{z}_\Sigma(A)$. Тогда имеем: $b \circ \sigma = (a_1 \circ \sigma) \ldots (a_n \circ \sigma)\,\omega$ и $b \circ \sigma\varphi = c \circ \varphi = (a_1 \circ \sigma\varphi) \ldots (a_n \circ \sigma\varphi)\,\omega$. Так как $\varphi \in \mathfrak{z}_\Sigma(A)$ и все $a_i \circ \sigma$ принадлежат A, то получаем $a_i \circ \sigma\varphi = a_i \circ \sigma$. Следовательно, $c \circ \varphi = b \circ \sigma = c$ и $\varphi \in \mathfrak{z}_\Sigma(B)$. Так как гомоморфный образ θ-группы снова θ-группа, то отсюда следует, что $\Sigma/\mathfrak{z}_\Sigma(B)$ есть θ-группа.

Этим доказано, что элемент b является $L\tilde{\theta}$-элементом и H — подалгебра в G. Напомним, что эта подалгебра Г-характеристична.

2. Радикалы действующей группы, связанные с отмеченными свойствами. В этом пункте всегда будет предполагаться, что класс θ-групп замкнут относительно операций указанных выше трех типов. Нас будут интересовать условия существования $L\tilde{\theta}$-радикала в действующей группе. Пусть M означает свойство группы быть нетеровой. Известно (см. также § 5.2), что во всякой абстрактной группе имеется локально нетеров радикал. С другой стороны, радикал $L\tilde{M}$ в действующей группе существует не всегда — соответствующий пример будет приведен ниже. Если же ограничиться рассмотрением пар, уже обладающих свойством $L\tilde{M}$, то, как мы сейчас увидим, для таких пар многие известные абстрактные теоретико-групповые свойства θ приводят к хорошим $L\tilde{\theta}$-радикалам действующей группы.

Пусть свойство θ, кроме перечисленных ранее условий, удовлетворяет еще следующим требованиям: полное прямое произведение изоморфных θ-групп также является θ-группой и в произвольной M-группе любые две инвариантные θ-подгруппы порождают θ-подгруппу. Примерами таких свойств служат, в частности, разрешимость и нильпотентность. Для каждого такого θ справедлива следующая теорема.

2.1. *Если чистая пара* (G, Γ) *является* $L\tilde{M}$*-парой, то в группе* Γ *существует* $L\tilde{\theta}$*-радикал.*

С помощью леммы Цорна можно заключить, что в группе Γ каждая ее инвариантная $L\tilde{\theta}$-подгруппа содержится в некоторой максимальной инвариантной $L\tilde{\theta}$-подгруппе. Поэтому остается доказать, что все такие максимальные инвариантные $L\tilde{\theta}$-подгруппы совпадают. Следовательно, теорема будет доказана, когда мы покажем, что если (G, Γ) — чистая пара, обладающая свойством $L\tilde{M}$, Γ_1 и Γ_2 — нормальные делители в Γ, являющиеся $L\tilde{\theta}$-группами, то и произведение $\Gamma_1\Gamma_2$ также $L\tilde{\theta}$-группа.

Пусть (H, Σ) — подпара в $(G, \Gamma_1\Gamma_2)$, имеющая конечное число образующих. Покажем, что проекция Σ относи-

тельно H является θ-группой. Возьмем в Σ некоторое конечное множество образующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Все эти элементы могут быть представлены в виде $\sigma_i = \sigma_{i1} \cdot \sigma_{i2}$, где $\sigma_{i1} \in \Gamma_1$, $\sigma_{i2} \in \Gamma_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть, далее, $\tilde{\Sigma}$ — подгруппа, порожденная всеми σ_{i1} и σ_{i2}, и пусть $\Sigma_1 = \Gamma_1 \cap \tilde{\Sigma}$, $\Sigma_2 = \Gamma_2 \cap \tilde{\Sigma}$. Подгруппа $\tilde{\Sigma}$ порождается своими нормальными делителями Σ_1 и Σ_2. Мы не можем, однако, утверждать, что Σ_1 и Σ_2, так же как и $\tilde{\Sigma}$, имеют конечные системы образующих. Обозначим $\tilde{H} = H \circ \tilde{\Sigma}$. Так как $\Sigma \subset \tilde{\Sigma}$, то пара $(\tilde{H}, \tilde{\Sigma})$ имеет конечную порождающую систему.

Наша ближайшая задача — показать, что проекция $\tilde{\Sigma}$ относительно $\tilde{H}$ является θ-группой.

Обозначим через Σ', Σ_1' и Σ_2' проекции относительно $\tilde{H}$ подгрупп $\tilde{\Sigma}$, Σ_1 и Σ_2 соответственно. Так как Σ' — нетерова группа, то Σ_1' и Σ_2' имеют конечные системы образующих. Возьмем в Σ_1 и Σ_2 конечные системы элементов Y_1 и Y_2, такие, что их образы в Σ' порождают, соответственно, Σ_1' и Σ_2'. Обозначим еще $\Phi_1 = \{Y_1\}$, $\Phi_2 = \{Y_2\}$, $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}$. Пусть, далее, X — конечное подмножество в H, такое, что $X \circ \tilde{\Sigma} = \tilde{H}$. Тогда $X \circ \Phi$ также совпадает с $\tilde{H}$ и, кроме того, $X \circ \Phi_1 = X \circ \Sigma_1$, $X \circ \Phi_2 = X \circ \Sigma_2$, $(X \circ \Phi_1) \circ \Phi_2 = (X \circ \Phi_2) \circ \Phi_1 = \tilde{H}$.

Рассмотрим подпару $(X \circ \Phi_1, \Phi_1) = (X \circ \Sigma_1, \Phi_1)$. Так как $\Phi_1 \subset \Gamma_1$, то проекция Φ_1 относительно $X \circ \Sigma_1$ является θ-группой. Легко видеть, что проекция Σ_1 относительно $X \circ \Sigma_1$ совпадает с проекцией Φ_1 относительно $X \circ \Sigma_1$. Следовательно, проекция Σ_1 относительно $X \circ \Sigma_1$ является θ-группой. Нужно показать, что проекция Σ_1 относительно $\tilde{H}$ является θ-группой.

Множество $\tilde{H}$ покрывается различными множествами вида $(X \circ \Sigma_1) \circ \sigma$ по разным σ из Σ_2. Так как Σ_1 — нормальный делитель в $\tilde{\Sigma}$, то все множества $(X \circ \Sigma_1) \circ \sigma$ допустимы относительно Σ_1 и все пары $((X \circ \Sigma_1) \circ \sigma, \Sigma_1)$ между собой изоморфны. Если $\mathfrak{z}$ — ядро представления Σ_1 относительно $X \circ \Sigma_1$, то ядром представления Σ_1 относительно $(X \circ \Sigma_1) \circ \sigma$ служит $\sigma^{-1}\mathfrak{z}\sigma$. Все фактор-группы $\Sigma_1/\sigma^{-1}\mathfrak{z}\sigma$ являются изоморфными между собой θ-группами. Если $\bar{\mathfrak{z}}$ — пересечение всех таких ядер, то согласно условию, наложенному на свойство θ, группа $\Sigma_1/\bar{\mathfrak{z}}$ также является θ-группой. Но $\bar{\mathfrak{z}}$ совпадает с ядром представ-

ления Σ_1 относительно $\tilde{H}$, и следовательно, проекция Σ_1 относительно $\tilde{H}$ является θ-группой.

Используя подгруппу Φ_2, точно так же мы заключаем, что Σ_2' является θ-группой. Так как Σ_1' и Σ_2' — инвариантные в Σ' θ-подгруппы, то порожденная ими группа Σ' также является θ-группой. Этим доказано, что проекция $\tilde{\Sigma}$ относительно $\tilde{H}$ является θ-группой. Отсюда очевидно, что и $\Sigma/\mathfrak{z}_\Sigma(H)$ — θ-группа, и теорема доказана.

В следующей теореме относительно θ вместо условий предыдущей теоремы будет предполагаться, что всякая θ-группа конечна и группа, порожденная двумя θ-подгруппами, из которых одна инвариантна, есть снова θ-группа. При этих условиях имеет место следующее утверждение:

2.2. *Если чистая пара* (G, Γ) *обладает свойством* $L\tilde{M}$, *то в группе* Γ *имеется* $L\tilde{\theta}$*-радикал и этот радикал совпадает с пересечением всех максимальных* $L\tilde{\theta}$*-подгрупп из* Γ.

Для доказательства этой теоремы мы можем воспользоваться обозначениями доказательства предыдущей теоремы. Сейчас только Γ_2 уже не обязательно является нормальным делителем, и следовательно, Σ_2 не обязательно нормальный делитель в $\tilde{\Sigma}$.

Рассматривая пару $(X \circ \Phi_1, \Phi_1)$, мы можем отметить, что $X \circ \Phi_1$ состоит лишь из конечного числа элементов. Переходя к паре $(X \circ \{\Phi_1, \Phi_2\}, \Phi_2)$, заключаем, что и $(X \circ \Phi_1) \circ \Phi_2 = \tilde{H}$ — конечное множество. Отсюда следует, что Σ_1' и Σ_2' — θ-группы. Но тогда и Σ' — θ-группа. Следовательно, $\Gamma_1\Gamma_2$ — $L\tilde{\theta}$-группа.

Ясно, что каждая $L\tilde{\theta}$-подгруппа из Γ содержится в некоторой максимальной подгруппе с таким же свойством. Так как свойство $L\tilde{\theta}$ является абстрактным свойством пар, то подгруппы, сопряженные с $L\tilde{\theta}$-подгруппами из Γ, также являются $L\tilde{\theta}$-подгруппами. Это означает, что пересечение всех максимальных $L\tilde{\theta}$-подгрупп из Γ является инвариантной $L\tilde{\theta}$-подгруппой. Согласно доказанному выше это пересечение содержит все инвариантные $L\tilde{\theta}$-подгруппы из Γ, и значит, оно совпадает с радикалом $L\tilde{\theta}(\Gamma)$. Теорема доказана.

Теорема эта применима к таким свойствам θ, как конечность, к свойству группы быть конечной и разрешимой, конечной π-группой (для некоторого множества простых чисел π) и т. д.

3. Почти периодичность и относительная конечность. Пусть (G, Γ) чистая пара и σ — элемент в Γ. Обозначим через $\rho(\sigma)$ разбиение множества G на траектории циклической подгруппы $\{\sigma\}$. Каждая такая траектория либо конечна, либо счетна. Если некоторая траектория X конечна, скажем, состоит из n элементов, то ее элементы можно расположить в таком порядке $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы выполнялось следующее свойство цикличности: $a_i \circ \sigma = a_{i+1}$, $i < n$, $a_n \circ \sigma = a_1$. Если же X — бесконечная траектория, то выделяем следующее упорядочение: $\ldots, a_{-n}, a_{-(n-1)}, \ldots$ $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots, a_i \circ \sigma = a_{i+1}$. Понятно, что мы здесь имеем то, что обычно называется разбиением на циклы.

В том случае, когда элемент σ обладает как конечными, так и бесконечными циклами, этот элемент называется *смешанным* элементом, если же все циклы у σ бесконечны, то такой σ называется *чистым*. Другой крайний случай — это когда все циклы конечны. Такой элемент σ называется *почти периодическим* элементом. Можно еще сказать, что почти периодический элемент — это такой σ, что при любом $g \in G$ найдется подходящий показатель $n = n(g, \sigma)$, при котором выполняется $g \circ \sigma^n = g$. Если порядки всех циклов элемента σ ограничены в совокупности, или, что то же, показатель n можно выбрать общим для всех g: $n = n(\sigma)$, то такой σ, в случае точного представления, оказывается элементом конечного порядка с абстрактной точки зрения. Так как элементы конечного порядка иногда еще называют периодическими элементами, то нам уже приходится говорить здесь о почти периодических элементах.

Пусть, далее, π — некоторое множество простых чисел. Натуральное число n называется π-числом, если все его простые делители принадлежат множеству π. Элемент $\sigma \in \Gamma$ называется *π-элементом*, если длины всех его циклов конечны и являются π-числами. Это условие равносильно тому, что для любого g найдется π-число

$n=n(g,\sigma)$ такое, что $g\circ\sigma^n=g$. Частным случаем π-элементов являются *p-элементы* — множество π состоит из одного простого числа p. Легко видеть, что π-элементы — это такие $\sigma\in\Gamma$, для которых циклическая подгруппа $\{\sigma\}$ является $\tilde{\theta}$-группой, где θ — свойство группы быть конечной π-группой.

Группа Γ называется *относительно периодической группой*, если каждый ее элемент является почти периодическим элементом. Γ называется *относительной π-группой*, если все ее элементы π-элементы.

Приведем далее следующие определения. Пусть θ — свойство группы быть конечной. Тогда действующие $\tilde{\theta}$ и $L\tilde{\theta}$-группы будут называться соответственно *относительно конечными и локально относительно конечными группами*. Всякая локально относительно конечная группа является также и относительно периодической группой. Обратное утверждение неверно — достаточно взять известный пример П. С. Новикова (см. также пример Е. С. Голода, п. 5.4.3), решающий отрицательно проблему Бернсайда, и воспользоваться регулярным представлением.

Пусть еще через θ обозначено свойство группы быть конечной π-группой. Очевидно, что $L\tilde{\theta}$-группа — это локально относительно конечная группа, являющаяся одновременно и относительной π-группой.

Отметим теперь следующее свойство почти периодических элементов действующей группы: если σ такой элемент, то для любого подмножества $H\subset G$ включение $H\circ\sigma\subset H$ влечет равенство $H\circ\sigma=H$.

Действительно, включение $H\circ\sigma\subset H$ влечет включение $H\circ\sigma^n\subset H\circ\sigma$ при $n>1$. Если теперь $h\in H$ и $h\circ\sigma^n=h$, то $h\in H\circ\sigma^n\subset H\circ\sigma$, так что $H\subset H\circ\sigma$.

Пусть, далее, μ — некоторая бесконечная мощность. Элемент $\sigma\in\Gamma$ назовем μ-ограниченным, если он перемещает менее μ элементов из G. $\aleph_0$-ограниченные элементы, т. е. элементы σ, перемещающие лишь конечное число элементов из G, будем еще коротко называть *ограниченными элементами*.

Очевидно, что в случае точной пары ограниченные элементы являются также элементами конечного порядка.

Докажем теперь следующее предложение:

3.1. *Совокупность всех μ-ограниченных элементов действующей группы* Γ *при любом бесконечном* μ, *не большем мощности множества* G, *является* (*относительно характеристической*) *подгруппой в* Γ.

Для произвольного элемента $\sigma \in \Gamma$ через G_σ условимся обозначать совокупность всех элементов из G, перемещаемых действующим элементом σ: $G_\sigma = G \setminus Z_G(\sigma)$. Очевидны соотношения:

1) $G_{\sigma^{-1}} = G_\sigma$, 2) $G_{\sigma\varphi} \subset G_\sigma \cup G_\varphi$.

Из этих соотношений непосредственно следует, что указанные в условии предложения совокупности являются подгруппами в Γ. Относительная характеристичность этих подгрупп доказывается повторением уже применявшихся в аналогичной ситуации рассуждений. Пусть, например, Σ — подгруппа в Γ, состоящая из всех μ-ограниченных элементов, и пусть пара (G, Γ) содержится в паре (G, Φ), причем Γ — нормальный делитель в Φ. Возьмем в Φ произвольный элемент φ. В силу изоморфизма пар (G, Σ) и $(G, \varphi^{-1}\Sigma\varphi)$, каждый элемент из подгруппы $\varphi^{-1}\Sigma\varphi$ является μ-ограниченным элементом. Отсюда следует включение $\varphi^{-1}\Sigma\varphi \subset \Sigma$, доказывающее инвариантность Σ в Φ.

4. Относительная нильпотентность и относительная разрешимость. Если в качестве абстрактных теоретико-групповых свойств θ взять нильпотентность и разрешимость, то соответствующие $\bar{\theta}$-группы будут называться *относительно нильпотентными* и *относительно разрешимыми* группами. Соответственно определяются *локально относительно нильпотентные* и *локально относительно разрешимые* действующие группы. Сейчас будут рассмотрены некоторые свойства таких групп.

Прежде всего покажем, что

4.1. *При любом множестве простых чисел* π *совокупность всех* π-*элементов локально относительно нильпотентной действующей группы есть* (*относительно характеристическая*) *подгруппа. Эта подгруппа локально относительно конечна.*

Пусть (G, Γ) — чистая пара с локально относительно нильпотентной действующей группой Γ и пусть $Y =$

$=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — конечное множество элементов из Γ, являющихся π-элементами. Утверждение, о котором сейчас идет речь, будет доказано, если мы покажем, что подгруппа Σ, порожденная множеством Y, является относительно конечной π-группой. По условию, Σ — относительно нильпотентная группа. Возьмем в G произвольное конечное множество элементов X, и пусть $H=\overset{*}{X}\circ\Sigma$ и $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_\Sigma(H)$. Фактор-группа $\Sigma/\mathfrak{z}$ нильпотентна, и следовательно, для подгрупп из Σ, содержащих $\mathfrak{z}$, выполняется нормализаторное условие. Дальше будем исходить из пары (H, Σ), и все относительные свойства будем относить к множеству H. Обозначим через θ свойство группы быть конечной π-группой. Циклическая подгруппа $\{\sigma_1\}$ является, очевидно, $\tilde{\theta}$-группой, а следовательно, и $L\tilde{\theta}$-группой. Пусть Σ' — одна из максимальных $L\tilde{\theta}$-подгрупп в Σ, содержащих подгруппу $\{\sigma_1\}$. Так как ядро $\mathfrak{z}$ есть также $L\tilde{\theta}$-подгруппа, и даже инвариантная, то по теореме 2.2 (локально относительно нильпотентная группа Γ является $L\widetilde{M}$ группой!) $\mathfrak{z}$ принадлежит Σ'. Применим теперь обычные в абстрактной теории групп рассуждения. Пусть N — нормализатор подгруппы Σ' в Σ. По той же теореме 2.2 Σ' содержит все π-элементы из N и потому является относительно характеристической подгруппой в N. Но тогда подгруппа N должна совпадать со своим нормализатором в Σ. Ввиду нормализаторного условия это возможно лишь в том случае, когда $N=\Sigma$. Поэтому Σ' — нормальный делитель в Σ. При этом условии Σ' содержит все множество Y и, значит, совпадает с Σ. Таким образом, Σ — $L\tilde{\theta}$-группа, а вследствие наличия конечной системы образующих эта группа является $\tilde{\theta}$-группой. Это означает, что фактор-группа $\Sigma/\mathfrak{z}$ является конечной π-группой. Так будет для любого конечного подмножества X из G, и следовательно, предложение доказано.

Мы видим, в частности, что в относительно локально нильпотентной действующей группе «хорошо» выделяется относительно периодическая часть.

Из определения относительно нильпотентной действующей группы Γ следует, что если такая группа действует точно, то она аппроксимируется нильпотент-

ными группами и поэтому обладает убывающим центральным рядом (длины не более первого предельного порядкового числа ω). Отсюда следует согласно известной локальной теореме о группах с центральными системами (А. Г. Курош [3]), что точно действующая локально относительно нильпотентная группа обладает центральной системой.

Аналогично показывается, что точно действующая локально относительно разрешимая группа обладает разрешимой инвариантной системой.

Обозначим дальше через M_1 свойство группы быть нетеровой и разрешимой. (Такие группы называются еще S-группами Гирша или полициклическими.) Имеет место следующее предложение:

4.2. *Если действующая группа* Γ *является относительно периодической* $L\widetilde{M}_1$*-группой, то такая группа и локально относительно конечна.*

Пусть (G, Γ) — чистая пара, в которой группа Γ является относительно периодической $L\widetilde{M}_1$-группой. Возьмем в (G, Γ) подпару (H, Σ), обладающую конечной системой образующих, и пусть $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_\Sigma(H)$. Фактор-группа $\Sigma/\mathfrak{z}$ является разрешимой с условием максимальности, и следовательно, существует конечный нормальный ряд вида

$$\mathfrak{z} = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \cdots \subset \Sigma_i \subset \Sigma_{i+1} \subset \cdots \subset \Sigma_n = \Sigma,$$

где $\Sigma_{i+1} = \{\Sigma_i, \sigma_i\}$, $\sigma_i \in \Sigma$.

Подгруппа $\mathfrak{z}$ является локально относительно (все «относительно» будут сейчас по отношению к H) конечной группой. Пусть уже установлено, что Σ_i — локально относительно конечная группа. Так как циклическая погруппа $\{\sigma_i\}$ также локально относительно конечна, то по теореме 2.2 и подгруппа Σ_{i+1} является локально относительно конечной. Так, по индукции мы докажем, что в паре (H, Σ) группа Σ локально относительно конечна. Так как эта пара обладает конечной системой образующих, то $\Sigma/\mathfrak{z}$ — конечная группа. Отсюда уже следует, что в паре (G, Γ) группа Γ локально относительно конечна.

Приведенная теорема аналогична известной в теории групп теореме о локальной конечности периодических

локально разрешимых групп. Дополнительное предположение в ней о локальной (относительной) нетеровости является, по-видимому, существенным.

В заключение пункта напомним, что согласно теореме 2.1, если действующая группа Γ является локально относительно нетеровой группой ($L\widetilde{M}$-группой), то в такой группе имеются как локально относительно нильпотентный, так и локально относительно разрешимый радикалы.

5. Пример. В работе [5] В. Г. Вилянцер рассмотрел следующий пример.

Пусть $G=(a_{n,m,k})$ — множество символов, причем индексы n, m, k принимают такие значения: n пробегает все натуральные числа; $m=0, 1, 2, \ldots, n$ для каждого n; k пробегает полную систему вычетов по модулю 2^m. Везде в дальнейшем сравнение чисел будет подразумеваться по модулю 2^m.

Зададим подстановки φ и ψ множества G следующим образом. Для нечетного n полагаем:

$$a^{\varphi}_{n,m,k}=\begin{cases} a_{n,\,m+1,\,1} & (k\equiv 0,\ m<n),\\ a_{n,\,m-1,\,0} & (k\equiv 1,\ m>0),\\ a_{n+1,\,0,\,0} & (k\equiv 0,\ m=n),\\ a_{n,\,m,\,k} & (k\not\equiv 0,\ k\not\equiv 1),\end{cases}$$

$$a^{\psi}_{n,m,k}=\begin{cases} a_{n,\,m,\,k+1} & (m>0),\\ a_{n-1,\,n-1,\,0} & (m=0,\ n>1),\\ a_{1,\,0,\,0} & (m=0,\ n=1).\end{cases}$$

Для четного n, φ и ψ меняются ролями.

Обозначим $\Gamma=\{\varphi, \psi\}$, и пусть Φ и Ψ — минимальные инвариантные подгруппы группы Γ, содержащие соответственно элементы φ и ψ. Можно показать, что Φ и Ψ — локально относительно конечные группы подстановок. Мы не будем делать соответствующие выкладки и отошлем читателя к указанной работе В. Г. Вилянцера. С другой стороны, легко заметить, что, например, подстановка $\psi\varphi$ не является почти периодической.

Из этого примера вытекает, что произведение двух локально относительно конечных инвариантных подгрупп

группы подстановок не всегда является локально относительно конечной группой. Ввиду теоремы 2.1 аналогичное заключение можно сделать и по поводу свойства $L\widetilde{M}$. Действительно, группы Ф и Ψ являются $L\widetilde{M}$-группами, а Г этим свойством не обладает: если бы группа Г была $L\widetilde{M}$-группой, то она была бы также и локально относительно конечной группой.

Аналогичными методами можно также показать, что такие свойства, как локальная относительная нильпотентность и локальная относительная разрешимость, не являются радикальными свойствами для произвольных действующих групп.

6. Ограниченность и алгебраичность. Эти понятия вводятся для пар, в которых область действия G является алгеброй относительно некоторой системы операций Ω. Только такие пары мы здесь и будем рассматривать.

Пусть (G, Γ) — пара, Y — подмножество в Г, и Σ — подгруппа, порожденная этим подмножеством. Подмножество Y называется *ограниченным*, если при любом $g \in G$ подалгебра $\{g \circ \Sigma\}$ имеет конечное число образующих. Легко видеть, что отсюда уже следует, что при любом конечном подмножестве $X \subset G$ подалгебра $\{X \circ \Sigma\}$ имеет также конечное число образующих. Ограниченный элемент будем еще называть (*внешне*) *алгебраическим элементом*.

В соответствии с этим пара (G, Γ) называется *локально ограниченной*, если любое конечное подмножество из Г является ограниченным, и *алгебраической*, если каждый элемент из группы Г является алгебраическим элементом.

Нетрудно понять, что пара (G, Γ) тогда и только тогда является локально ограниченной, когда для любой ее подпары (H, Σ), имеющей конечную систему образующих, подалгебра H также имеет конечную систему образующих.

Будем также говорить, что представление группы Г относительно алгебры G является локально ограниченным или алгебраическим, если такова соответствующая пара.

Отметим некоторые факты, связанные с этими понятиями.

Прежде всего, заметим, что если группа Γ локально относительно конечна, то пара (G, Γ) является, очевидно, локально ограниченной парой.

Докажем дальше следующую теорему:

6.1. *Если пара* (G, Γ) *является* $L\widetilde{M}$*-парой и алгебра* G *локально нетерова, то в группе* Γ *имеется локально ограниченный радикал, и этот радикал совпадает с пересечением всех максимальных локально ограниченных подгрупп из* Γ.

Достаточно показать, что если в рассматриваемой ситуации Γ_1 и Γ_2 — две локально ограниченные подгруппы в Γ, причем одна из них, скажем Γ_1, — нормальный делитель, то и произведение $\Gamma_1\Gamma_2$ — локально ограниченная группа.

Пусть (H, Σ) — подпара в $(G, \Gamma_1\Gamma_2)$, имеющая конечную систему образующих. Нужно показать, что подалгебра H также обладает конечной системой образующих. Пусть элементы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ порождают подгруппу Σ, и пусть $\sigma_i = \sigma_{i1}\sigma_{i2}$, где $\sigma_{i1} \in \Gamma_1$, $\sigma_{i2} \in \Gamma_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим, как и в доказательстве теоремы 2.1, через $\tilde{\Sigma}$ подгруппу, порожденную всеми этими σ_{i1} и σ_{i2}; пусть $\Sigma_1 = \tilde{\Sigma} \cap \Gamma_1$, $\Sigma_2 = \tilde{\Sigma} \cap \Gamma_2$. Кроме того, обозначим через $\tilde{H}$ подалгебру, порожденную множеством $H \circ \tilde{\Sigma}$. Проекция $\tilde{\Sigma}$ относительно $\tilde{H}$ является здесь нетеровой группой. Пусть Σ', Σ_1' и Σ_2' — проекции относительно $\tilde{H}$ подгрупп $\tilde{\Sigma}$, Σ_1 и Σ_2 соответственно. Так как Σ' — нетерова группа, то группы Σ_1' и Σ_2' имеют конечные системы образующих. Дальше мы продолжаем следовать обозначениям упоминавшейся теоремы. Y_1 и Y_2 — это такие конечные подмножества в Σ_1 и Σ_2 соответственно, что их образы в Σ' порождают Σ_1' и Σ_2'.

$$\Phi_1 = \{Y_1\},\ \Phi_2 = \{Y_2\},\ \Phi = \{\Phi_1, \Phi_2\}.$$

Пусть еще X — конечное подмножество в H такое, что множество $X \circ \tilde{\Sigma}$ порождает всю подалгебру $\tilde{H}$. Множество $X \circ \Phi$ также порождает подалгебру $\tilde{H}$, и кроме того,

$$\{X \circ \Phi_1\} = \{X \circ \Sigma_1\}, \{X \circ \Phi_2\} = \{X \circ \Sigma_2\}, \{\{X \circ \Phi_1\} \circ \Phi_2\} = \tilde{H}.$$

Рассмотрим подпару $(\{X \circ \Phi_1\}, \Phi_1)$. Так как $\Phi_1 \subset \Gamma_1$, то подалгебра $\{X \circ \Phi_1\}$ обладает конечной системой образующих. Пусть X' — такая система образующих. Легко видеть, что подмножество $X' \circ \Phi_2$ порождает всю подалгебру $\tilde{H}$. Так как Φ_2 — подгруппа в Γ_2, имеющая конечную систему образующих, то ясно, что подалгебра $\tilde{H}$ имеет конечную систему образующих. Ввиду того, что G — локально нетерова алгебра, отсюда следует, что и H — подалгебра с конечным числом образующих.

Опираясь на эту теорему, докажем еще такое предложение:

6.2. *Пусть в паре* (G, Γ) *алгебра* G *является локально нетеровой, а группа* Γ *локально относительно нильпотентна. Тогда множество всех алгебраических элементов из* Γ *совпадает с локально ограниченным радикалом этой группы.*

Для доказательства этого предложения достаточно показать, что если $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — конечное множество алгебраических элементов в Γ, то подгруппа Σ, порожденная этим множеством, является локально ограниченной. Пусть X — конечное подмножество в G, и H — подалгебра, порожденная множеством $X \circ \Sigma$. Нужно показать, что в H имеется конечная система образующих.

Будем исходить из пары (H, Σ). Здесь подгруппа, порожденная ядром представления и элементом σ_1, является локально ограниченной. Пусть Σ' — некоторая максимальная локально ограниченная подгруппа в Σ, содержащая ядро из σ_1. Из предыдущей теоремы, подобно тому как это делалось в теореме 4.1, получаем, что Σ' совпадает с Σ, и следовательно, в H имеется конечная система образующих.

Предложение 6.2 интересно сопоставить со следующим утверждением, примыкающим также к теореме 2.1, если отнести ее к свойству «локальная относительная нильпотентность».

6.3. *Если пара* (G, Γ) *локально ограничена, то в* Γ *имеется локально относительно нильпотентный радикал.*

Пусть условие теоремы для пары (G, Γ) выполняется и пусть Σ_1 и Σ_2 — локально относительно ниль-

потентные нормальные делители в Г. Допустим еще, что Φ — подгруппа с конечным числом образующих в $\Sigma_1\Sigma_2$ и

$$\Phi = \{\Phi \cap \Sigma_1, \Phi \cap \Sigma_2\}.$$

Рассмотрим произвольную конечно порожденную подпару (G_α, Φ) с действующей группой Φ. По условию, G_α имеет конечную систему образующих. Пусть, далее, Φ_0 — подгруппа с конечным числом образующих в $\Phi \cap \Sigma_1$. Так как в G_α имеется конечная система образующих, то подпара (G_α, Φ_0) является конечно порожденной, и следовательно, проекция Φ_0 относительно G_α есть нильпотентная группа. Но тогда проекция $\Phi \cap \Sigma_1$ относительно G_α локально нильпотентна. То же самое верно и для $\Phi \cap \Sigma_2$. Так как произведение локально нильпотентных нормальных делителей — снова такой же нормальный делитель, то теперь ясно, что проекция Φ относительно G_α является локально нильпотентной группой. Так как Φ имеет конечное число образующих, то эта проекция нильпотентна. Этим доказано, что $\Sigma_1\Sigma_2$ — локально относительно нильпотентная группа, что и требовалось.

Приведем теперь одно замечание о локально ограниченном радикале в области действия. Пусть дана пара (G, Γ) и a — элемент в G. Этот элемент назовем *локально ограниченным*, если для любой подгруппы Σ из Γ, обладающей конечной системой образующих, подалгебра, порожденная множеством $a \circ \Sigma$, имеет конечную систему образующих. Легко видеть, что множество H всех локально ограниченных элементов из G является Γ-характеристическим подмножеством. Покажем, что если G — локально нетерова алгебра, то H — подалгебра в G.

Пусть ω — некоторая n-арная операция алгебры G, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — элементы в H, $b = a_1a_2 \ldots a_n\omega$, и Σ — подгруппа в Γ, имеющая конечную систему образующих. Подалгебра, порожденная множеством $b \circ \Sigma$, содержится в подалгебре A, порожденной всеми $a_i \circ \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Так как A имеет конечное число образующих, то и $\{b \circ \Sigma\}$ имеет конечное число образующих.

Ясно, что пара (H, Γ) является локально ограниченной парой.

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ Ω-ПОЛУГРУПП

1. Представления Ω-полугрупп и обобщенные модули. Как известно, в классической теории представлений, где рассматриваются представления относительно векторных пространств, представления групп целесообразно связывать с представлениями колец или линейных алгебр. Точно так же в общем случае представления групп относительно универсальных алгебр естественно связывать с рассмотрением Ω-полугрупп и их представлений. Ω-полугруппы (мультиоператорные полугруппы) были определены в первой главе в связи с рассмотрением системы всех квазиэндоморфизмов алгебры. Здесь мы определим понятие представления Ω-полугруппы относительно Ω-алгебры и рассмотрим простейшие факты, связанные с этим понятием.

Пусть G — Ω-алгебра и K — некоторая Ω-полугруппа. Представлением K относительно G называется всякий гомоморфизм K в Ω-полугруппу $H(G)$ всех преобразований алгебры G. Задание представления K относительно G равносильно заданию действия K в G (обозначим его, как и раньше, через $\circ$), такого, что выполняются следующие условия:

$$1.\ (g \circ \sigma) \circ \varphi = g \circ \sigma\varphi,$$

$$2.\ g \circ (\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \omega) = (g \circ \varphi_1)(g \circ \varphi_2) \ldots (g \circ \varphi_n) \omega$$

при всех $g \in G$, $\sigma, \varphi \in K$, $\omega \in \Omega$ и соответствующих наборах аргументов $\varphi_i \in K$.

Такую пару (G, K) вместе с заданным представлением будем называть *Ω-модулем* (или *обобщенным модулем*). Параллельно тому, как это делалось для пар, по обычной схеме определяются *гомоморфизмы*, *изоморфизмы и эквивалентности Ω-модулей*, а также *подмодули и фактор-модули Ω-модулей*. Так, например, подмодуль состоит из пары (H, L), где H — подалгебра в G, допустимая относительно Ω-подполугруппы L из K, и индуцированного представления L относительно H. Такое определение подмодуля отличается от общепринятого — обычно подмодуль есть пара вида (H, K), где K — вся

Ω-полугруппа. Соответственно можно говорить и о действиях с обобщенными модулями, в частности о полной прямой сумме представлений Ω-полугруппы. Примером представления Ω-полугруппы служит регулярное представление: если K — Ω-полугруппа, то формулой $u \circ v = uv$, $u, v \in K$, задается регулярное представление Ω-полугруппы K относительно Ω-алгебры K.

Если задан Ω-модуль (G, K), то элемент $u \in K$ называется *строго дистрибутивным*, если u — дистрибутивный элемент и действует в G как эндоморфизм. Совокупность всех строго дистрибутивных элементов из K образует подполугруппу в $D(K)$. Обозначим ее через $D^*(K)$. Представление K относительно G называется *строгим*, если подполугруппа $D^*(K)$ порождает все K. И вообще, Ω-подполугруппа L в K называется *строгой*, если она порождается некоторым множеством строго дистрибутивных элементов. Легко понять, что строгая Ω-подполугруппа порождается некоторым множеством строго дистрибутивных элементов с помощью одних лишь операций из системы Ω.

В регулярном представлении полугруппы $D(K)$ и $D^*(K)$ совпадают, и потому, если исходить из Ω-полугруппы с дистрибутивным базисом, то регулярное представление такой Ω-полугруппы является строгим.

В определении Ω-модуля (G, K) мы еще будем допускать, что если в K имеется единица ε по умножению, то эта единица действует в G как тождественное преобразование.

Каждое представление K относительно G определяет конгруэнцию ρ Ω-полугруппы K: для любых u и v из K $u\rho v$ означает, что при любом $g \in G$ выполняется равенство $g \circ u = g \circ v$. Такая конгруэнция называется *конгруэнцией заданного представления.* В случае точного представления конгруэнция этого представления является тривиальной, и гомоморфизм, определяющий представление, является изоморфизмом между K и некоторой Ω-подполугруппой в $H(G)$.

Отметим далее, что если ρ — конгруэнция Ω-алгебры K, инвариантная относительно умножений справа на элементы из K, — такую конгруэнцию будем называть правой конгруэнцией Ω-полугруппы K, — то регулярное

представление K индуцирует фактор-представление K относительно фактор-алгебры K/ρ.

Пусть теперь (G, K) — некоторый Ω-модуль, g — элемент в G, и $g \circ K$ — совокупность всех элементов из G вида $g \circ u$, $u \in K$.

Непосредственно из определения следует, что $g \circ K$ всегда является K-допустимой подалгеброй в G и что отображение $u \to g \circ u$ является гомоморфизмом Ω-алгебры K на подалгебру $g \circ K$. Пусть $\rho(g)$ — конгруэнция, отвечающая такому гомоморфизму. Конгруэнция $\rho(g)$ является правой конгруэнцией Ω-полугруппы K; это утверждение равносильно тому, что из $g \circ u = g \circ v$ следует $g \circ uw = g \circ vw$. Таким образом, можно говорить о фактор-модуле $(K/\rho(g), K)$. Сопоставим теперь каждому элементу $g \circ u$ из $g \circ K$ смежный класс конгруэнции $\rho(g)$: $g \circ u \to [u]$. Такое соответствие является изоморфизмом Ω-алгебр $g \circ K$ и $K/\rho(g)$. Кроме того, если это соответствие обозначить через μ, мы получим:

$$((g \circ u) \circ v)^{\mu} = (g \circ uv)^{\mu} = [uv] = [u] \circ v = (g \circ u)^{\mu} \circ v,$$

т. е. Ω-модули $(g \circ K, K)$ и $(K/\rho(g), K)$ эквивалентны.

Таким образом мы получили теорему, аналогичную теореме 1.3.2.

Заметим здесь еще, что в Ω-модуле $(g \circ K, K)$ каждый дистрибутивный элемент из K является также и строго дистрибутивным элементом.

Если представление K относительно G является точным, то, очевидно, пересечение конгруэнций $\rho(g)$ по всем g является тривиальной конгруэнцией Ω-алгебры K, так что в этом случае алгебра K может рассматриваться как подпрямая сумма некоторых подалгебр из G, и всякое тождественное соотношение, имеющее место в G, выполняется и в K. Впрочем этот факт уже отмечался для Ω-полугруппы всех квазиэндоморфизмов алгебры.

Назовем еще *централизатором* строгого модуля (G, K) Ω-подполугруппу в Ω-полугруппе $H'(G)$ всех квазиэндоморфизмов алгебры G, порожденную всеми эндоморфизмами этой алгебры, перестановочными с элементами из K. Не все элементы этого централизатора перестановочны с элементами из K. Легко, однако,

проверить, что каждый эндоморфизм алгебры G, принадлежащий централизатору модуля, перестановочен с элементами из K.

Пусть φ — такой эндоморфизм и $\varphi=\psi_1\psi_2\ldots\psi_k\omega$, где все ψ_i перестановочны с элементами из K, ω — некоторая суперпозиция операций из Ω. Пусть еще $g\in G$ и $u\in K$. Рассматривая вначале случай, когда u действует в G как эндоморфизм, имеем:

$$\begin{aligned}(g\circ u)\varphi &= (g\circ u)\psi_1\psi_2\ldots\psi_k\omega =\\ &= ((g\circ u)\psi_1)((g\circ u)\psi_2)\ldots(g\circ u)\psi_k)\omega =\\ &= ((g\psi_1)\circ u)((g\psi_2)\circ u)\ldots((g\psi_k)\circ u)\omega =\\ &= ((g\psi_1)(g\psi_2)\ldots(g\psi_k)\omega)\circ u = (g(\psi_1\psi_2\ldots\psi_k\omega))\circ u = g\varphi\circ u.\end{aligned}$$

Пусть теперь $u=v_1v_2\ldots v_l\omega'$, где v_i действуют в G как эндоморфизмы и ω' — суперпозиция операций из Ω. Тогда

$$\begin{aligned}(g\circ u)\varphi &= ((g\circ v_1)(g\circ v_2)\ldots(g\circ v_l)\omega')\varphi =\\ &= ((g\circ v_1)\varphi(g\circ v_2)\varphi\ldots(g\circ v_l)\varphi)\omega' =\\ &= ((g\varphi)\circ v_1)((g\varphi)\circ v_2)\ldots((g\varphi)\circ v_l)\omega' =\\ &= g\varphi\circ(v_1v_2\ldots v_l\omega') = g\varphi\circ u.\end{aligned}$$

Этим утверждение доказано.

2. Полугрупповые (групповые) Ω-полугруппы. Названные здесь объекты играют роль, аналогичную роли групповых колец. Приведем определения. Пусть Γ — некоторая полугруппа и Φ — абсолютно свободная Ω-алгебра с порождающим множеством Γ. Определим в Φ еще и умножение.

Если в Ω имеются нульарные операции, то этим операциям отвечают специальные символы 0_α, 0_β, ..., которые рассматриваются также как элементы в Φ. Для каждого такого 0_α и для любых $u\in\Gamma$ и $a\in\Phi$ полагаем $0_\alpha u=0_\alpha$, $a0_\alpha=0_\alpha$. Пусть дальше $u\in\Gamma$ и $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — элементы из Γ или символы нульарных операций и пусть ω — n-арная операция из Ω, $n\geqslant 1$. Положим $u_1u_2\ldots u_n\omega\cdot u=(u_1u)(u_2u)\ldots(u_nu)\omega$. Если дальше $a=b_1b_2\ldots b_n\omega$ и все b_iu уже определены, то считаем, что $au=(b_1u)\ldots(b_nu)\omega$. Так будут определены произведения au при любых $a\in\Phi$ и $u\in\Gamma$. Аналогично определяем произведение $a(u_1u_2\ldots u_n)\omega=(au_1)(au_2)\ldots(au_n)\omega$, и если $b=c_1c_2\ldots c_n\omega$ и все ac_i уже определены, то $ab=(ac_1)(ac_2)\ldots(ac_n)\omega$.

Мы получим правило умножения любых элементов из Φ. При этом по определению операции выполняется левая дистрибутивность, и все элементы из Γ являются дистрибутивными элементами. Проверим ассоциативность умножения.

Так как Γ — полугруппа, то ассоциативное правило выполняется для любых троек элементов из Φ, лежащих в Γ. Непосредственно проверяется, что ассоциативность имеет место также для любых троек из множества Γ′, получающегося присоединением к Γ всех отмеченных элементов — символов нульарных операций. Например, если u, $v \in \Gamma$, то

$$(u0_\alpha)v = 0_\alpha v = 0_\alpha; \quad u(0_\alpha v) = u0_\alpha = 0_\alpha;$$
$$(0_\alpha 0_\beta)0_\gamma = 0_\beta 0_\gamma = 0_\gamma; \quad 0_\alpha(0_\beta 0_\gamma) = 0_\alpha 0_\gamma = 0_\gamma,$$

и аналогично во всех остальных случаях. Вообще же легко понять, что при этом произведение трех элементов из Γ′, среди которых имеются отмеченные элементы, совпадает с самым правым из этих отмеченных элементов.

Пусть дальше ω — n-арная операция, принадлежащая Ω, $n \geqslant 1$, $a = b_1 b_2 \ldots b_n\omega$, $b_i \in \Phi$, и пусть для всех этих b_i и любых элементов u, $v \in \Gamma'$ уже установлено, что $b_i(uv) = (b_i u)v$. Тогда имеем:

$$(au)v = (b_1 b_2 \ldots b_n\omega \cdot u)v = (b_1 u)(b_2 u)\ldots(b_n u)\omega \cdot v =$$
$$= ((b_1 u)v)((b_2 u)v)\ldots((b_n u)v)\omega =$$
$$= (b_1(uv))(b_2(uv))\ldots(b_n(uv))\omega = a(uv).$$

Отсюда по индукции получаем, что при любых $a \in \Phi$, u, $v \in \Gamma'$ выполняется $(au)v = a(uv)$.

Теперь допустим, что $b = c_1 c_2 \ldots c_n\omega$ и для всех этих c_i и любых $a \in \Phi$ и $u \in \Gamma'$ выполняется $a(c_i u) = (ac_i)u$. При этом условии получаем:

$$(ab)u = (a \cdot c_1 c_2 \ldots c_n\omega)u = (ac_1)(ac_2)\ldots(ac_n)\omega \cdot u =$$
$$= ((ac_1)u)((ac_2)u)\ldots((ac_n)u)\omega = (a(c_1 u))(a(c_2 u))\ldots(a(c_n u))\omega =$$
$$= a \cdot (c_1 u)(c_2 u)\ldots(c_n u)\omega = a(bu),$$

и, следовательно, при любых a, $b \in \Phi$ и $u \in \Gamma'$ имеем равенство $(ab)u = a(bu)$.

Пусть, наконец, $c = d_1 d_2 \ldots d_n \omega$ и для всех d_i и любых $a, b \in \Phi$ выполняется равенство $(ab) d_i = a(bd_i)$. Тогда

$$(ab) c = (ab)(d_1 d_2 \ldots d_n \omega) = ((ab) d_1)((ab) d_2) \ldots ((ab) d_n) \omega = \\ = (a (bd_1))(a (bd_2)) \ldots (a (bd_n)) \omega = \\ = a \cdot (bd_1)(bd_2) \ldots (bd_n) \omega = a (bc),$$

и поэтому для всех троек $a, b, c \in \Phi$ будет $(ab) c = a (bc)$.

Таким образом, Φ становится Ω-полугруппой, причем с дистрибутивным базисом. Это и есть *полугрупповая Ω-полугруппа*. Если Γ — группа, то мы имеем *групповую Ω-полугруппу*.

Допустим теперь, что задано представление группы Γ относительно Ω-алгебры G, и пусть Φ — соответствующая групповая Ω-полугруппа. Покажем, что представление Γ относительно G можно продолжить до представления Φ относительно G. Полагая для любого $g \in G$ и каждого символа нульарной операции 0_α $g \circ 0_\alpha = e_\alpha$, где e_α — соответствующий отмеченный элемент в G, мы зададим действие на G всех элементов из Γ'. Если дальше $a = b_1 b_2 \ldots b_n \omega$ и все $g \circ b_i$ уже определены, то считаем $g \circ a = (g \circ b_1)(g \circ b_2) \ldots (g \circ b_n) \omega$. Понятно, что так индуктивно будут определены все $g \circ a$, $g \in G$, $a \in \Phi$. Точно такими же рассуждениями, как проверялась ассоциативность в Φ, устанавливается, что $(g \circ a) \circ b = g \circ ab$ при всех $g \in G$, $a, b \in \Phi$. Второе условие, определяющее представление Ω-полугруппы, выполняется здесь согласно определению действия элементов из Φ в G, так что мы действительно имеем представление Ω-полугруппы Φ относительно G. Элементы из Γ будут при этом строго дистрибутивными элементами и само представление является строгим.

Укажем одно важное применение приведенного факта. Представление группы Γ относительно алгебры G называется *циклическим*, если в G имеется такой элемент g, что подалгебра, порожденная множеством $g \circ \Gamma$, совпадает со всей алгеброй G. Соответственно представление Ω-полугруппы K относительно G называется *циклическим*, если при некотором $g \in G$ выполняется равенство $g \circ K = G$. Легко видеть, что представление группы Γ относительно G тогда и только тогда является циклическим, когда представление групповой Ω-полугруппы Φ относительно G является циклическим.

Все циклические представления группы Γ, с точностью до эквивалентности, могут быть построены на материале самой группы Γ. Действительно, пусть задано некоторое циклическое представление Γ относительно Ω-алгебры. Продолжим это представление до представления соответствующей групповой Ω-полугруппы Φ. Так как $G = g \circ \Phi$, $g \in G$, то для некоторой правой конгруэнции ρ представление Φ относительно алгебры G эквивалентно представлению Φ относительно Φ/ρ. Ясно теперь, что при этом и представление Γ относительно G эквивалентно представлению Γ относительно Φ/ρ.

Таким образом, с помощью Ω-полугруппы Φ можно найти все циклические представления группы Γ.

Отсюда, в частности, вытекает, что имеет смысл говорить о множестве всех циклических представлений заданной группы Γ относительно Ω-алгебр (с фиксированным Ω).

Предположим дальше, что имеется в виду изучать представления групп относительно алгебр, принадлежащих некоторому примитивному классу Ω-алгебр $\mathfrak{K}$. В таком случае вместо абсолютно свободной алгебры Φ естественно исходить из свободной в заданном классе $\mathfrak{K}$ Ω-алгебры.

Пусть Φ — определенная выше групповая Ω-полугруппа группы Γ и пусть ρ — конгруэнция Ω-алгебры Φ, отвечающая тождествам класса $\mathfrak{K}$. Согласно п. 1.1.6 ρ является также конгруэнцией Ω-полугруппы Φ. Таким образом, мы получаем Ω-полугруппу Φ/ρ, причем можно считать, что группа Γ содержится также и в Φ/ρ; более того, она содержится в $D(\Phi/\rho)$. Такую Ω-полугруппу будем называть *приведенной (в данном классе) групповой Ω-полугруппой*. Легко видеть, что классическое понятие групповой алгебры может рассматриваться как частный случай таких приведенных групповых Ω-полугрупп.

Если теперь задано представление Φ относительно алгебры G, принадлежащей классу $\mathfrak{K}$, то конгруэнция ρ принадлежит, очевидно, конгруэнции данного представления. Это значит, что если для смежного класса $[u] \in \Phi/\rho$ и $g \in G$ положить $g \circ [u] = g \circ u$, то так определенное действие не будет зависеть от выбора представителей в смежных классах, и мы получим представление

Ω-полугруппы Φ/ρ относительно G, являющееся гомоморфным образом представления Φ относительно G. Кроме того, если здесь Γ рассматривать как группу, лежащую в Φ/ρ, то полученное представление Φ/ρ относительно G является продолжением представления группы Γ.

В заключение этого пункта мы заметим, что, хотя здесь в качестве области действия G выступала алгебра, некоторые утверждения могут быть распространены и на тот случай, когда G — общая алгебраическая система, включающая также и отношения.

3. Мультиоператорные почти кольца и представления относительно Ω-групп. Рассмотрение представлений групп относительно мультиоператорных групп естественно связывать с представлениями Ω-почти колец. Определение представления Ω-почти кольца относительно Ω-группы есть частный случай общего определения представления Ω-полугруппы. Но в этом специальном случае появляется новая возможность — вместо конгруэнций можно рассматривать соответствующие ядра. Так, конгруэнции представления отвечает ядро представления, состоящее из всех тех u из действующего Ω-почти кольца, которые переводят каждый $g \in G$ в нуль Ω-группы G.

Всюду дальше в определение представления Ω-почти кольца относительно Ω-группы мы включаем еще следующее требование: нуль области действия является неподвижным элементом относительно элементов действующего Ω-почти кольца. Легко проверить, что это условие автоматически выполняется для строгих представлений. В связи с отмеченным условием мы добавим еще одно требование и в определение Ω-почти кольца: будем считать всегда, что если 0 — нуль Ω-почти кольца K, то при любом $u \in K$ должно быть $0u = 0$. В Ω-квазикольцах это условие всегда выполняется, и кроме того, в Ω-почти кольцах всегда $u0 = 0$.

Назовем дальше *правым идеалом* Ω-почти кольца K такое его подмножество H, что H есть идеал Ω-группы K и при любых $h \in H$ и v, $u \in K$ выполняется условие $(h + v)u - vu \in H$. Если H — правый идеал в K, то, как нетрудно понять, при любых $h \in H$ и $u \in K$ элемент hu также принадлежит H. Обратное утверждение выпол-

няется, если дополнительно предположить, что K есть Ω-квазикольцо. Доказательство этого факта содержится в приводимых ниже выкладках, относящихся к аналогичному свойству допустимого идеала. Напоминаем, что H — левый идеал в K, если H — идеал Ω-группы K и левый идеал полугруппы K. Если H — двусторонний идеал в K (левый и правый), то H — идеал Ω-почти кольца K (см. п. 1.2.2).

Легко понять, что ядра, отвечающие конгруэнциям $\rho(g)$, — обозначим их через K_g, — являются правыми идеалами действующего Ω-почти кольца. Это следует из соответствующих рассмотрений, относящихся к представлениям Ω-полугрупп, но легко сделать и непосредственную проверку.

Понятие группового Ω-почти кольца может быть получено в качестве частного случая определения групповой Ω-полугруппы. Однако удобнее сделать это непосредственно, исходя из конструкции свободной мультиоператорной группы, введенной А. Г. Курошем в его статье [7]. Для случая, когда область действия также группа, это было проведено в статье Б. И. Плоткина [18]. В общем случае Ω-групп нужно над группой Г взять свободную Ω-группу и определить еще там умножение так же, как это делалось в предыдущем пункте.

Определим еще понятие *допустимого идеала* области действия.

Пусть задано представление Ω-почти кольца K относительно Ω-группы G. Допустимые идеалы в G — это такие идеалы A, для которых исходное представление индуцирует представление K относительно фактор-группы G/A. Легко видеть, что идеал A тогда и только тогда является допустимым идеалом, когда при любых $a \in A$, $g \in G$ и $u \in K$ выполняется условие $(a+g) \circ u - g \circ u \in A$.

Очевидно, что допустимый идеал является также и допустимым подмножеством. Покажем, что если представление K относительно G является строгим и идеал A является допустимым подмножеством, то этот идеал является также и допустимым идеалом. Для строгого представления каждый элемент $u \in A$ представим в виде $u = u_1 u_2 \ldots u_n \omega$, где все элементы u_i строго дистрибутивны и ω — некоторая операция, производная по

отношению к основным операциям. Учитывая дальше, что A — идеал в G, имеем:

$$(a+g)\circ u-g\circ u=(a+g)\circ(u_1u_2\ldots u_n\omega)-g\circ u=$$
$$=((a+g)\circ u_1)((a+g)\circ u_2)\ldots((a+g)\circ u_n)\omega-g\circ u=$$
$$=(a\circ u_1+g\circ u_1)(a\circ u_2+g\circ u_2)\ldots(a\circ u_n+g\circ u_n)\omega-$$
$$-g\circ u=a'+g\circ u-g\circ u=a'\in A.$$

Следовательно, A — допустимый идеал. Заметим еще, что допустимые идеалы регулярного представления Ω-почти кольца K — это правые идеалы в K.

Сделаем еще одно замечание по поводу случая, когда в Ω-почти кольце K имеется единица по умножению. Мы считаем, что эта единица действует тождественно в G. Покажем, что если это условие не предполагать, но считать, что единица ε действует в G как нормальный эндоморфизм, то общий случай сводится к рассматриваемому нами.

Вначале отметим, что эндоморфизм φ Ω-группы G называется *нормальным*, если: 1) для любых a и b из G выполняется равенство $(-b+a+b)\varphi=-b+a\varphi+b$ и 2) для любой n-арной операции $\omega\in\Omega$ и соответствующих наборов аргументов .

$$(-b_1b_2\ldots b_n\omega+(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)\omega)\varphi=$$
$$=-b_1b_2\ldots b_n\omega+(a_1\varphi+b_1)(a_2\varphi+b_2)\ldots(a_n\varphi+b_n)\omega.$$

Если Ω-группа G абелева, то, очевидно, каждый ее эндоморфизм является нормальным.

Пусть φ — нормальный эндоморфизм и A_φ — совокупность всех $a\in G$, для которых $a\varphi=0$, и B_φ — множество всех $b\in G$, для которых $b\varphi=b$. A_φ и B_φ — идеалы в G. Для A_φ это очевидно, так как A_φ является ядром гомоморфизма φ. Ясно, что B_φ — Ω-подгруппа. Если теперь $b\in B_\varphi$ и $g\in G$, то

$$(-g+b+g)\varphi=-g+b\varphi+g=-g+b+g,$$

и значит, B_φ — нормальный делитель аддитивной группы.

Пусть ω — n-арная операция в Ω, и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B_\varphi$. Тогда

$$(-g_1g_2\ldots g_n\omega + (b_1+g_1)(b_2+g_2)\ldots(b_n+g_n)\omega)\varphi =$$
$$= -g_1g_2\ldots g_n\omega + (b_1\varphi+g_1)(b_2\varphi+g_2)\ldots(b_n\varphi+g_n)\omega =$$
$$= -g_1g_2\ldots g_n\omega + (b_1+g_1)(b_2+g_2)\ldots(b_n+g_n)\omega.$$

Это означает, что B_φ — идеал. Понятно, что идеалы A_φ и B_φ пересекаются только по нулю.

Имеет место следующее предложение:

3.1 (разложение Пирса). *Если ε действует как нормальный эндоморфизм, то G есть прямая сумма: $G = A_\varepsilon + B_\varepsilon$.*

Действительно, пусть $g \in G$. Тогда $g = (g - g\varepsilon) + g\varepsilon$, $g - g\varepsilon \in A_\varepsilon$, $g\varepsilon \in B_\varepsilon$, что и требовалось.

Если еще учесть, что нуль в G является неподвижным элементом относительно всех $u \in K$, то очевидно также, что для любых $a \in A_\varepsilon$ и $u \in K$ элемент $a \circ u$ есть нуль в G, так что все сводится к действию K в B_ε, а ε действует здесь тождественно.

4. Еще об ограниченности и алгебраичности. Везде в этом пункте будет рассматриваться строгий Ω-модуль (G, K), т. е. такой, что представление K относительно Ω-алгебры G является строгим. Представление K относительно G называется *локально ограниченным*, если для любого $g \in G$ и всякой строгой Ω-подполугруппы $S \subset K$, имеющей конечное число образующих, подалгебра $g \circ S$ также имеет конечное число образующих. Заметим здесь, что если в строгой Ω-подполугруппе S имеется конечное число образующих, то в ней имеется также и конечное число строго дистрибутивных образующих.

Если представление K относительно G является локально ограниченным, то для любого конечного подмножества $X \subset G$ и любой строгой Ω-подполугруппы $S \subset K$, имеющей конечное число образующих, подалгебра, порожденная множеством $X \circ S$, также имеет конечное число образующих и S-допустима.

Подалгебра $\{X \circ S\}^\Omega$ порождается подалгебрами $x \circ S$, $x \in X$, и, следовательно, она имеет конечное число образующих. Эта подалгебра допустима, очевидно, относительно всех строго дистрибутивных элементов из S,

так как эти элементы действуют в G как эндоморфизмы. Учитывая, что S порождается строго дистрибутивными элементами, мы теперь заключаем, что $\{X \circ S\}^{\Omega}$ допустима относительно S.

Из этого замечания следует, что *в локально ограниченном модуле* (G, K) *имеется локальная система из подмодулей* (G_α, K_α) *таких, что все подалгебры* G_α *имеют конечное число образующих.*

Назовем дальше Ω-полугруппу K *локально ограниченной*, если она обладает дистрибутивным базисом и регулярное представление K является локально ограниченным. Нетрудно видеть, что это определение равносильно следующему: для каждой строгой Ω-подполугруппы S из K, имеющей конечное число образующих, Ω-алгебра S также обладает конечным числом образующих.

Легко доказывается следующее предложение:

4.1. *Если Ω-полугруппа K является локально ограниченной, то всякое строгое представление K относительно Ω-алгебры G также является локально ограниченным.*

Пусть в строгом Ω-модуле (G, K) Ω-полугруппа K локально ограничена и пусть S — строгая подполугруппа в K, обладающая конечной системой образующих, и g — элемент в G. Подалгебра $g \circ S$ является гомоморфным образом Ω-алгебры S, и следовательно, вместе с S эта подалгебра обладает конечной системой образующих. Это и означает, что рассматриваемый модуль локально ограничен.

Нам понадобится дальше следующее определение. Пусть (G, Γ) — некоторая пара и (G, K) — Ω-модуль с общей областью действия G. Допустим еще, что $\Gamma \subset K$, все элементы из Γ являются дистрибутивными элементами в K и представление K относительно G является продолжением заданного представления группы Γ. В таком случае условимся говорить, что пара (G, Γ) *принадлежит* модулю (G, K). Если, сверх того, элементы из Γ порождают все K, то будем говорить, что Ω-модуль (G, K) порождается парой (G, Γ).

Имеет место такое предложение:

4.2. *Если пара (G, Γ) порождает Ω-модуль (G, K), то эта пара является локально ограниченной, если (G, K) —*

локально ограниченный модуль. Если алгебра G является, сверх того, локально нетеровой, то верно и обратное: локальная ограниченность пары (G, Γ) влечет локальную ограниченность модуля (G, K).

Пусть Σ — подгруппа в Γ с конечным числом образующих. S — Ω-подполугруппа в K, порожденная множеством Σ. Для каждого $g \in G$ подалгебра, порожденная множеством $g \circ \Sigma$, совпадает с подалгеброй $g \circ S$. Следовательно, если (G, K) — локально ограниченный модуль, то в $\{g \circ \Sigma\}$ имеется конечное число образующих и (G, Γ) — локально ограниченная пара.

С другой стороны, каждая строгая Ω-подполугруппа $S' \subset K$ содержится в некоторой Ω-подполугруппе S отмеченного типа. Поэтому, если (G, Γ) — локально ограниченная пара и алгебра G локально нетерова, то вместе с $g \circ S$ подалгебра $g \circ S'$ имеет конечное число образующих, т. е. Ω-модуль (G, K) локально ограничен.

Пусть дальше K — некоторая Ω-полугруппа и Γ — группа, лежащая в полугруппе $D(K)$. Рассмотрим некоторые свойства группы Γ, связанные с этим ее вложением. Такие свойства подгрупп из Γ, как ограниченность, локальная ограниченность и алгебраичность, будем связывать с регулярным представлением Γ относительно Ω-алгебры K. Напомним еще, что через X^{Ω}, $X \subset K$, обозначается Ω-оболочка подмножества X, т. е. Ω-подалгебра в K, порожденная подмножеством X. Легко видеть, что ограниченность подгруппы $\Sigma \subset \Gamma$ равносильна тому, что Σ^{Ω} есть Ω-алгебра с конечным числом образующих, а локальная ограниченность Σ означает, что подгруппы из Σ с конечным числом образующих ограничены. Понятно также, что если задано некоторое представление K относительно Ω-алгебры G, индуцирующее пару (G, Γ), то из локальной ограниченности Σ в K вытекает, что Σ действует и в G как локально ограниченная группа. Поэтому локальную ограниченность относительно K, внутреннюю локальную ограниченность, можно было бы называть сильной локальной ограниченностью.

Докажем следующую лемму:

4.3. *Если Ω-алгебра K локально нетерова, то произведение инвариантной локально ограниченной подгруппы*

$\Phi_1 \subset K$ *и локально ограниченной подгруппы* Φ_2 *также является локально ограниченной подгруппой в* Γ.

Рассмотрим вначале случай, когда Φ_1 и Φ_2 ограничены. В этом случае в Φ_1 и Φ_2 найдутся такие конечные подмножества соответственно X и Y, что $X^\Omega = \Phi_1^\Omega$ и $Y^\Omega = \Phi_2^\Omega$. Можно также считать, что X и Y содержат единицу группы Γ. В этом случае произведение множеств XY содержит как X, так и Y. Обозначим через S Ω-оболочку множества XY. Эта оболочка имеет конечное число образующих и содержит алгебры Φ_1^Ω и Φ_2^Ω. Покажем, что S содержит произведение $\Phi_1\Phi_2$. Каждый элемент из $\Phi_1\Phi_2$ имеет вид $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, $\varphi_2 \in \Phi_2$. Но φ_1 и φ_2 выражаются с помощью операций из Ω через элементы из X и Y соответственно, так что $\varphi_1\varphi_2$ аналогично выражается через элементы из XY, и следовательно, $\Phi_1\Phi_2 \subset S$.

Отсюда, очевидно, вытекает равенство $(\Phi_1\Phi_2)^\Omega = S$, что и требовалось.

Переходим к общему случаю. Пусть Φ_1 и Φ_2 локально ограничены и пусть Σ_2 — подгруппа с конечным числом образующих в Φ_2. Так как эта подгруппа ограничена, то в ней найдется конечное подмножество Y такое, что $Y^\Omega = \Sigma_2^\Omega$. Пусть дальше X — произвольное конечное подмножество в Φ_1, содержащее вместе с каждым своим элементом и обратный к нему. Обозначим через Z множество всех элементов вида $\sigma_2^{-1}\sigma\sigma_2$, $\sigma \in X$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$. Это множество принадлежит Ω-оболочке конечного множества YXY. Используя теперь тот факт, что Ω-алгебра K локально нетерова, мы заключаем, что в Z найдется такое конечное подмножество Z_0, что $Z_0^\Omega = Z^\Omega$. Пусть Σ_1 — подгруппа в Φ_1, порожденная множеством Z, и Σ_0 — подгруппа, порожденная элементами из Z_0. Ясно, что $\Sigma_0^\Omega = \Sigma_1^\Omega$, и следовательно, Σ_1 ограничена. Так как подгруппа Σ_1 инвариантна относительно Σ_2, то и $\Sigma_1\Sigma_2$ — ограниченная подгруппа. Если теперь Σ — некоторая подгруппа с конечным числом образующих в $\Phi_1\Phi_2$, то эта Σ содержится в некоторой подгруппе $\Sigma_1\Sigma_2$ рассмотренного выше типа. Так как $\Sigma^\Omega \subset (\Sigma_1\Sigma_2)^\Omega$, то вместе с $(\Sigma_1\Sigma_2)^\Omega$ алгебра Σ^Ω (снова нужна локальная нетеровость K!) имеет конечное число образующих. Лемма доказана.

Из этой леммы непосредственно получаем следующую теорему:

4.4. *Если Ω-алгебра K локально нетерова, то в группе* Γ *имеется локально ограниченный радикал. Этот радикал совпадает с пересечением всех максимальных локально ограниченных подгрупп из* Γ.

Приведем еще одну теорему, легко доказываемую с помощью только что рассмотренной леммы. Эта теорема для подгрупп линейных алгебр была найдена А. Е. Залесским [1].

4.5. *Пусть Ω-алгебра K локально нетерова и группа* Γ *является RN^*-группой. В этом случае* Γ *тогда и только тогда локально ограниченная группа, когда она является алгебраической группой.*

Напомним, что RN^*-группа — это группа, обладающая возрастающим нормальным рядом с абелевыми факторами. В одну сторону утверждение очевидно. Пусть теперь группа Γ — алгебраическая RN^*-группа. В такой группе имеется возрастающий нормальный ряд с циклическими факторами. Пусть ряд

$$E = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_\alpha \subset \Gamma_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \Gamma_\mu = \Gamma$$

обладает этим свойством. Воспользуемся индукцией.

Первый член Γ_1 как циклическая подгруппа алгебраической группы Γ является ограниченной группой. Допустим сразу, что для всех $\alpha < \mu$ уже установлено, что Γ_α — локально ограниченная подгруппа. Случай предельного μ очевиден. Допустим, что существует $\mu - 1$. Так как вся группа $\Gamma = \Gamma_\mu$ порождается инвариантной подгруппой $\Gamma_{\mu-1}$, являющейся локально ограниченной, и некоторой циклической подгруппой, ограниченной ввиду алгебраичности группы Γ, то по лемме группа Γ локально ограничена, что и требовалось.

Эта теорема может также рассматриваться как аналог теоретико-групповой теоремы о локальной конечности периодической RN^*-группы.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ ГРУПП

§ 1. ПРИВОДИМОСТЬ И НЕПРИВОДИМОСТЬ

1. Приводимость. Важным понятием, связанным с представлениями относительно мультиоператорных групп, является понятие приводимости представления. Если (G, Γ) — некоторая пара и H — допустимый идеал в G, то ему отвечают две «меньшие» пары — подпара (H, Γ) и фактор-пара $(G/H, \Gamma)$. Эти новые пары дают некоторую информацию об исходной паре, а в отдельных случаях даже полностью ее определяют.

В идеале H и в фактор-Ω-группе G/H в свою очередь могут быть свои идеалы, которые позволяют дальше «приводить» представление группы Γ. И вообще, если в G задана некоторая нормальная система Γ-допустимых Ω-подгрупп $[G_\alpha]$, то каждому скачку этой системы G_α, $G_{\alpha+1}$ отвечает пара $(G_{\alpha+1}/G_\alpha, \Gamma)$. Совокупность всех таких пар определяет систему *фактор-представлений, связанных с данной нормальной системой*.

Как и в общей теории Ω-групп, одним из основных принципов классификации представлений относительно мультиоператорных групп является классификация, основанная на рассмотрении свойств имеющихся в области действия G нормальных систем допустимых Ω-групп и связанных с этими системами фактор-представлений группы Γ. Если в Ω-группе G к системе основных операций добавить еще унарные операторы, связанные с действием элементов из Γ, то мы получим новую мультиоператорную группу — Ω, Γ-группу. Понятно, что нормальные системы Γ-допустимых Ω-подгрупп в G — это нормальные системы в Ω, Γ-группе G. Ко всем таким нормальным системам применима, следовательно, классификация, приводившаяся п. 1.2.4. В частности, можно говорить о композиционной системе Γ-допустимых Ω-под-

групп. Особую роль с точки зрения теории представлений играют при этом теоремы типа теоремы Жордана—Гельдера. Такие теоремы указывают условия, при которых фактор-представления, связанные с различными нормальными рядами с точностью до эквивалентности представлений, определяются однозначно. Все эти теоремы выводятся непосредственно из соответствующих теорем теории мультиоператорных групп.

В п. 1.2.5 были определены разрешимые и центральные системы мультиоператорных групп. В случае, когда на Ω-группе G действует еще представление некоторой группы Γ, естественно рассматривать разрешимые и центральные системы в G из допустимых Ω-подгрупп. Это — в точности разрешимые или центральные системы Ω,Γ-группы G. По аналогии с теорией групп пару (G, Γ) естественно называть *RN-парой* (или соответственно *Z-парой*), если в G имеется разрешимая (или соответственно центральная) система из допустимых Ω-подгрупп. Аналогично определяются *RN^*-пары*, *ZA-пары* и т. д. Имеет место также следующая локальная теорема, параллельная известным теоремам теории групп:

1.1. *Если пара (G, Γ) обладает локальной системой из RN-(Z-) подпар, то такая пара сама является RN-(Z-) парой.*

Доказательство этой теоремы мы приведем одновременно с доказательством другой локальной теоремы, которую сейчас сформулируем.

Пусть A и B — две Γ-допустимые Ω-подгруппы в G, причем A — идеал в B. Будем говорить, что фактор-группа B/A является *Γ-композиционным фактором Ω-группы G*, если в этой фактор-группе нет нетривиальных нормальных систем из Γ-допустимых членов. Таких композиционных факторов в G имеется достаточно много — ими, в частности, являются все факторы композиционных систем Ω,Γ-группы G. Пару (G, Γ) назовем *$\overline{RN}$-парой*, если все Γ-композиционные факторы в G являются абелевыми Ω-группами. $\overline{RN}$-пары являются, очевидно, также и RN-парами: если (G, Γ) — $\overline{RN}$-пара, то всякая композиционная нормальная система из допустимых Ω-подгрупп в G является разрешимой системой

Справедлива следующая теорема:

1.2. *Всякая пара* (G, Γ), *обладающая локальной системой из* $\overline{RN}$*-подпар, также является* $\overline{RN}$*-парой.*

Вначале представим свойство Ω,Γ-группы G обладать разрешимой нормальной системой на языке узкого исчисления предикатов. В качестве основного множества M модели мы берем, следуя методу Мальцева из статьи [2], множество индексов членов подходящей нормальной системы, а предикаты, определенные на этом множестве, — это отношение порядка и еще набор одноместных предикатов вида $A_g(\alpha)$ по всем элементам g из G. Содержательно $A_g(\alpha)$ означает, что элемент g принадлежит члену нормальной системы H_α, имеющему индекс α. Набор аксиом $\mathfrak{N}$ состоит из нескольких групп. Прежде всего это — аксиомы порядка, утверждающие, что M — упорядоченное множество, содержащее минимальный элемент α_0 и максимальный элемент α_1. К этим аксиомам добавляем аксиому $(\forall\alpha)\, A_0(\alpha)$ (0 — нуль группы G) и группу аксиом $\sim A_g(\alpha_0)$, $A_g(\alpha_1)$ по всем g из G, отличным от нуля. Следующая группа аксиом:

$$(\forall\alpha)\,(\forall\beta)\,((\alpha<\beta)\ \&\ A_g(\alpha)\rightarrow A_g(\beta))$$

по всем $g\in G$.

Дальше идет серия аксиом вида

$$(\forall\alpha)\,[A_{a_1}(\alpha)\ \&\ A_{a_2}(\alpha)\ \&\ldots\&\ A_{a_n}(\alpha)\rightarrow A_{a_1a_2\ldots a_n\omega}(\alpha)],$$

где ω — n-арная операция из Ω, или операция аддитивной группы, и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — всевозможные последовательности из n элементов группы G; здесь ω пробегает всевозможные операции набора Ω. Перечисленные группы аксиом означают, что $H_0=0$, $H_{\alpha_1}=G$, что из $\alpha<\beta$ следует $H_\alpha\subset H_\beta$ и что все $H_\alpha=\{g\mid A_g(\alpha)=И\}$ являются Ω-подгруппами в G. Дальше добавляем группу аксиом вида $(\forall\alpha)\,[A_g(\alpha)\rightarrow A_{g\circ\sigma}(\alpha)]$, $g\in G$, $\sigma\in\Gamma$, означающую, что все H_α — допустимые Ω-подгруппы.

Чтобы записать следующую группу аксиом, введем вспомогательные производные предикаты $P_{(g_1, g_2, \ldots, g_n)}(\alpha)$, означающие содержательно, что хотя бы один из перечисленных в индексах элементов из G не принадлежит H_α. Легко записать явные выражения для каждого такого

предиката через основные предикаты. Теперь соберем аксиомы:

$$(\exists\alpha)\,(P_{(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n,\,b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n)}(\alpha)\,\&\,A_{[a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n;\,b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n;\,\omega]}(\alpha)),$$
$$(\exists\alpha)\,(P_{(a,\,b)}(\alpha)\,\&\,A_{[a,\,b]}(\alpha))$$

по всем $\omega \in \Omega$ и соответствующим наборам элементов из G. Эти аксиомы означают, очевидно, что если взять пополнение системы Ω-подгрупп H_α, то получится нормальная разрешимая система. Все перечисленные группы аксиом и составляют систему аксиом $\mathfrak{N}$. Заметим здесь, что если аксиомы последней группы заменить следующими аксиомами:

$$(\exists\alpha)\,(P_{(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n)}(\alpha)\,\&\,A_{[a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n;\,b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n;\,\omega]}(\alpha)),$$
$$(\exists\alpha)\,(\sim A_a(\alpha)\,\&\,A_{[a,\,b]}(\alpha)),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; a и b также пробегают все элементы из G, то получится система — обозначим ее через $\mathfrak{N}_1$, — утверждающая, что в результате пополнения мы придем к центральной системе Γ-допустимых Ω-подгрупп в G.

Теперь уже легко доказать, что если пара (G, Γ) обладает локальной системой из RN-(Z-)подпар, то и вся пара (G, Γ) является RN-(Z-)парой. Рассмотрим, например, случай RN. Пусть $\mathfrak{N}'$ — некоторая конечная подсистема аксиом набора $\mathfrak{N}$. Так как в наборе $\mathfrak{N}'$ участвует лишь конечное число элементов из G и Γ, то найдется такая локальная RN-пара $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, что G_α содержит все элементы из G, участвующие в аксиомах набора $\mathfrak{N}'$, и Γ_α содержит аналогичные элементы из Γ. На паре $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, таким образом, реализуются все формулы из $\mathfrak{N}'$, и этот набор оказывается совместным. Но это значит, что набор $\mathfrak{N}$ — локально совместный и, следовательно, совместный набор формул. Совместность набора $\mathfrak{N}$ означает, что пара (G, Γ) является RN-парой. Аналогично разбирается свойство Z.

Продолжаем доказывать теорему. Пусть A и B — две допустимые Ω-подгруппы в G, причем A — идеал в B. Покажем, что при условиях теоремы пара $(B/A, \Gamma)$ является RN-парой. Достаточно установить, что в этой паре имеется локальная система из RN-подпар. Пусть $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ — локальные подпары в (G, Γ), являющиеся

$\overline{RN}$-парами. Обозначим $\overline{G}_\alpha = (G_\alpha \cap B) + A/A$. Все пары $(\overline{G}_\alpha, \Gamma_\alpha)$ составляют локальную систему в $(B/A, \Gamma)$, причем каждый раз Ω, Γ_α-группа $\overline{G}_\alpha$ изоморфна Ω, Γ_α-фактор-группе $G_\alpha \cap B/G_\alpha \cap A$. По определению $\overline{RN}$-пары, всякая композиционная нормальная система Ω, Γ_α-группы $G_\alpha \cap B/G_\alpha \cap A$ является разрешимой системой. Поэтому пара $(\overline{G}_\alpha, \Gamma_\alpha)$ является RN-парой, и в $(B/A, \Gamma)$ имеется локальная система из RN-подпар. Этим доказано, что в Ω, Γ-группе B/A имеется разрешимая нормальная система. Если же B/A — композиционный фактор, то такая система должна состоять лишь из нуля и самой группы B/A. В этом случае B/A — абелева Ω-группа. Теорема доказана.

Непосредственными следствиями этой теоремы, а также теоремы 1.1 являются следующие утверждения:

1.3. *Если (G, Γ) — локально ограниченная пара и Ω-группа G локально разрешима, то эта пара является $\overline{RN}$-парой. Если при этом G локально нильпотентна, то (G, Γ) является Z-парой.*

Действительно, так как пара (G, Γ) локально ограничена, то в ней имеется локальная система из подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ таких, что все G_α имеют конечное число образующих. Если G локально разрешима, то G_α — разрешимая Ω-группа. Так как убывающий ряд коммутантов в G_α состоит из характеристических Ω-подгрупп, то пара $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ является RN-парой, а из конечности разрешимого ряда в G_α следует даже, что эта пара есть $\overline{RN}$-пара. В случае локально нильпотентной Ω-группы G в G_α следует брать нижний центральный ряд и дальше рассуждать аналогично.

Нам понадобится еще одно локальное свойство. Приведем определение.

Будем говорить, что пара (G, Γ) является *правильной парой*, если для любых двух допустимых Ω-подгрупп A и B из G из того, что A является максимальной допустимой Ω-подгруппой в B, следует, что A — идеал в B.

Это определение аналогично определению $\tilde{N}$-свойства Р. Бера в теории групп. Понятно, что для абелевой Ω-группы G пары (G, Γ) являются всегда правиль-

ными. То же самое верно и для нильпотентной G. В самом деле, пусть G — нильпотентная Ω-группа и пусть A и B — допустимые Ω-подгруппы в G, причем A максимальна в B. B — также нильпотентная Ω-группа, и члены нижнего центрального ряда в B являются допустимыми Ω-подгруппами. Пусть B^{k+1} — первый из таких членов, лежащих в A. Ясно, что $[A, B^k] \subset B^{k+1} \subset A$, и кроме того, $\{A, B^k\} = B$. Отсюда уже легко вывести, что A — идеал в B. Действительно, пусть $A + H = B$ и $[A, H] \subset \subset A$. Имеем:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)\,\omega &= \\ &= (a_1 + (a_1' + h_1))(a_2 + (a_2' + h_2))\ldots(a_n + (a_n' + h_n))\,\omega = \\ &= a + h_1 h_2 \ldots h_n \omega = a' + a_1' a_2' \ldots a_n' \omega + h_1 h_2 \ldots h_n \omega = \\ &= a' + a'' + (a_1' + h_1)(a_2' + h_2)\ldots(a_n' + h_n)\,\omega = \\ &= a''' + b_1 b_2 \ldots b_n \omega,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь докажем следующую локальную теорему, обобщающую одну теорему Р. Бера:

1.4. *Всякая квазиправильная пара является также правильной парой.*

Пусть пара (G, Γ) является квазиправильной парой (в (G, Γ) имеется локальная система из правильных подпар) и пусть A и B — допустимые Ω-подгруппы в G, причем A — максимальная допустимая Ω-подгруппа в B. Нужно показать, что A — идеал в B. Допустим, что это не так. В таком случае, как легко заметить, найдутся Ω-подгруппа $B^0 \subset B$ с конечным числом образующих, не лежащая в A, и Ω-подгруппа $A^0 \subset B^0 \cap A$ с конечным числом образующих, такие, что идеал $\bar{A}^0$, порожденный A^0 в B^0, не принадлежит A. Пусть b — элемент в $\bar{A}^0$, не лежащий в A, и пусть C — Ω-подгруппа, порожденная множеством $b \circ \Gamma$. По условию, Ω-подгруппы A и C порождают B. Обозначим через C^0 Ω-подгруппу в C, порожденную множеством $b \circ \Gamma^0$, где Γ^0 — некоторая подгруппа в Γ с конечным числом образующих. Всевозможные Ω-подгруппы вида $\{A, C^0\}$ составляют локальную систему в B, и следовательно, в A найдется такая Ω-подгруппа с конечным числом образующих A^{00}, а в Γ найдется такая Γ^0, что B^0 принадлежит подгруппе $\{A^{00}, C^0\}$.

Пусть теперь $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ — такая правильная локальная подпара в (G, Γ), что G_α содержит подгруппы с конечным числом образующих A^{00} и B^0, и $\Gamma^0 \subset \Gamma_\alpha$. Обозначим $V = G_\alpha \cap A$. Очевидно, что V — Γ_α-допустимая подгруппа, содержащая A^0 и A^{00} и не содержащая B^0 и C^0. Пусть дальше W — некоторая максимальная Γ_α-допустимая Ω-подгруппа в G_α среди содержащих V и не содержащих элемент b. Такая подгруппа, очевидно, существует. Пусть еще C^α обозначает Ω-подгруппу, порожденную множеством $b \circ \Gamma_\alpha$. Ясно, что $C^0 \subset C^\alpha$ и что подгруппа W является максимальной Γ_α-допустимой Ω-подгруппой в Γ_α-допустимой подгруппе $\{W, C^\alpha\}$. Следовательно, W — идеал в $\{W, C^\alpha\}$. Так как $B^0 \subset \{W, C^\alpha\}$ и $A^0 \subset W$, то $\bar{A}^0 \subset W$. Но тогда и $C^\alpha \subset W$, что неверно. Мы пришли к противоречию, означающему, что A — идеал в B.

В качестве применения этой теоремы отметим следующий факт:

1.5. *Если пара* (G, Γ) *является локально ограниченной и* Ω*-группа* G *локально нильпотентна, то такая пара правильна.*

Действительно, из локальной ограниченности пары (G, Γ) с локально нильпотентной G вытекает, что в ней имеется локальная система из таких подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, что все G_α нильпотентны. Дальше ссылаемся на локальную теорему и соответствующее свойство нильпотентной области действия.

Значение правильных пар объясняется, в частности, следующим их свойством:

1.6. *Если* (G, Γ) — *правильная пара, то каждая допустимая* Ω*-подгруппа в* G *является членом некоторой нормальной системы* Ω, Γ*-группы* G.

В самом деле, каждую такую подгруппу можно включить в некоторую полную неуплотняемую систему допустимых Ω-подгрупп. Такая система в случае правильной пары оказывается всегда нормальной системой.

Приведем теперь некоторые замечания, относящиеся к представлениям Ω-почти колец. Если (G, K) — обобщенный модуль, в котором K — Ω-почти кольцо, то Ω-группу G можно рассматривать как мультиоператорную Ω, K-группу лишь в том случае, когда нуль группы G является неподвижным элементом относительно дей-

ствия K. *Напомним, что это условие мы включили раньше в определение обобщенных модулей над Ω-группами.*

Следует еще уточнить понятие *K-композиционного фактора* в G: B/A является таким фактором, если A и B — Ω,K-допустимы, A — идеал Ω,K-группы B и в Ω,K-группе B/A нет нетривиальных нормальных систем.

Заметим здесь, что идеал Ω,K-группы G — это то же самое, что и определенный в предыдущем параграфе K-допустимый идеал Ω-группы G.

Так как, согласно договоренности для обобщенного модуля (G, K), группу G можно рассматривать как Ω,K-группу, то имеют смысл такие понятия, как Z-модуль, RN- и $\overline{RN}$-модуль, правильный модуль. Приведенные выше локальные теоремы для свойств Z, RN и $\overline{RN}$ при незначительных изменениях в доказательствах остаются справедливыми и для модулей.

Что касается применений этих теорем к локально ограниченному случаю с локально разрешимой или локально нильпотентной Ω-группой G, то соответствующие утверждения проходят лишь для строгих модулей. Связано это с тем, что для строгих модулей члены убывающего ряда коммутантов и нижнего центрального ряда области действия являются допустимыми идеалами, а в общем случае это не так. Отметим еще, что в доказательствах соответствующие локальные подмодули каждый раз нужно также выбирать строгими. Такой выбор, очевидно, возможен.

На строгие обобщенные модули непосредственно переносятся также и локальная теорема о правильных модулях и следствие из этой теоремы. Сформулируем отдельно это следствие.

1.7. *Если строгий модуль (G, K) локально ограничен, G — локально нильпотентная Ω-группа, то такой модуль является правильным.*

2. Неприводимость. В случае неабелевой Ω-группы G мы вынуждены рассматривать несколько различных типов неприводимых представлений. Это прежде всего

сильная неприводимость — отсутствие в G собственных допустимых (относительно действующего в G Ω-почти кольца или действующей группы) Ω-подгрупп. Можно также говорить о неприводимости в смысле отсутствия собственных допустимых идеалов или нетривиальных возрастающих нормальных рядов Ω, Γ-(K-) группы G. Имея в виду тот факт, что всякая мультиоператорная группа обладает композиционными нормальными системами, представляется наиболее естественным выделить в качестве основного типа неприводимости представления *неприводимость в смысле отсутствия в G нетривиальных допустимых нормальных систем*, т. е. нормальных систем Ω,Γ-(K-)группы G. Понятно, что это равносильно абсолютной простоте соответствующей мультиоператорной группы, определенной в § 1.2. Именно такого типа неприводимость мы и будем называть *неприводимостью представления*. Эта неприводимость является также отрицанием той приводимости, которой был посвящен предыдущий пункт. Если задано представление группы Γ относительно Ω-группы G, и $[H_\alpha]$ — некоторая композиционная нормальная система Ω,Γ-группы G, то скачкам этой системы отвечают неприводимые представления группы Γ. Аналогично обстоит дело и для представлений Ω-почти колец. Из определения Γ-(или K-)композиционного фактора в области действия G непосредственно следует, что индуцированные представления относительно таких факторов неприводимы. Введем еще следующее определение.

Представление группы (Ω-почти кольца) относительно Ω-группы G назовем *нормальным*, если для всякого композиционного фактора B/A в G соответствующее представление относительно этого фактора является сильно неприводимым.

Ясно, что если для пары (модуля) выполняется свойство $\overline{RN}$, то соответствующее представление является нормальным представлением. По этим соображениям, в частности, свойству $\overline{RN}$ и придается здесь особое значение. Легко также видеть, что правильные представления являются нормальными представлениями. Действительно, пусть задано представление группы или

Ω-почти кольца относительно Ω-группы G и пусть B/A — некоторый композиционный фактор в G. Если допустить, что в Ω-группе B/A имеется собственная допустимая Ω подгруппа, то, как мы уже знаем (теорема 1.6), в B/A имеется и нетривиальная допустимая нормальная система. Последнее противоречит неприводимости представления относительно B/A, так что это представление должно быть сильно неприводимым, а исходное представление является нормальным.

Всякое нетривиальное сильно неприводимое представление является, очевидно, циклическим, и поэтому к таким представлениям применимы замечания об их обозрении из п. 2.5.1. Еще одно свойство сильно неприводимых представлений содержится в следующем предложении, обобщающем классическую лемму Шура.

2.1. *Пусть (G, K) и $(\overline{G}, \overline{K})$ — два сильно неприводимых обобщенных модуля и пусть μ — гомоморфизм первого из них во второй. Тогда, если соответствие μ: $K \to \overline{K}$ является изоморфизмом и G^{μ} не совпадает с нулем в $\overline{G}$, то отображение μ является изоморфизмом данных модулей.*

Доказательство этого предложения дословно повторяет известные рассуждения. Прежде всего, замечаем, что G^{μ} является $\overline{K}$-допустимой Ω-подгруппой в $\overline{G}$. Действительно, пусть $g^{\mu} \in G^{\mu}$, $\overline{u} \in \overline{K}$ и $\overline{u} = u^{\mu}$, $u \in K$. Тогда $g^{\mu} \circ \overline{u} = g^{\mu} \circ u^{\mu} = (g \circ u)^{\mu} \in G^{\mu}$. Следовательно, $G^{\mu} = \overline{G}$. Пусть H — ядро гомоморфизма μ: $G \to \overline{G}$. Покажем, что H K-допустимо. Пусть $h \in H$ и $u \in K$. Имеем $(h \circ u)^{\mu} = h^{\mu} \circ u^{\mu} = 0 \circ u^{\mu} = 0$. Теперь ясно, что ядро H совпадает с нулем в G, и μ — изоморфизм модулей.

Точно такое же утверждение имеет место, очевидно, и для сильно неприводимых представлений групп.

Приведенная обобщенная лемма Шура позволяет, как и в классическом случае, сделать следующий вывод о централизаторе сильно неприводимого модуля: если (G, K) — сильно неприводимый модуль, то каждый эндоморфизм Ω-группы G, принадлежащий централизатору этого модуля, является автоморфизмом.

В самом деле, каждый эндоморфизм φ Ω-группы G, принадлежащий централизатору модуля, задает гомо-

морфизм модуля (G, K) на его подмодуль (G^{φ}, K); остается применить лемму Шура.

3. Радикал представления. Определим *радикалы представлений* групп и Ω-почти колец относительно Ω-групп. Пусть задано представление группы Γ относительно Ω-группы G. *Радикалом* этого представления называется пересечение ядер индуцированных представлений Γ относительно всех Γ-композиционных факторов Ω-группы G. Этот радикал обозначим $\alpha_G(\Gamma)$. $\alpha_G(\Gamma)$ — это, конечно, не радикал в том смысле, как это понималось нами раньше. Однако, как мы увидим, в ряде случаев радикал представления оказывается «настоящим» радикалом. Из определения следует, что фактор-группа $\Gamma/\alpha_G(\Gamma)$ изоморфна подпрямому произведению групп, обладающих точным неприводимым представлением в композиционных факторах из G. Легко видеть, что $\alpha_G(\Gamma)$ есть относительно характеристическая подгруппа в Γ.

Приведем теперь несколько определений, играющих важную роль при рассмотрении свойств этого радикала.

Пусть (G, Γ) — некоторая пара. Нормальная система в G, состоящая из Γ-допустимых подгрупп, называется *стабильной относительно группы* Γ, если во всех факторах этой системы элементы из Γ действуют как тождественные автоморфизмы. Группа Γ называется *стабильной* (относительно G), если в G имеется возрастающий нормальный ряд, стабильный относительно Γ. Γ называется *слабо стабильной*, если в G имеется стабильная относительно Γ нормальная система.

Очевидно, что для произвольной пары (G, Γ) каждая композиционная нормальная система Γ-допустимых Ω-подгрупп в G стабильна относительно радикала $\alpha_G(\Gamma)$, так что $\alpha_G(\Gamma)$ является слабо стабильной группой.

Покажем теперь, что если в G имеется возрастающий нормальный ряд из Γ-допустимых подгрупп, стабильный относительно некоторой подгруппы Σ из Γ, то эта подгруппа Σ принадлежит радикалу представления.

Пусть A и B — две Γ-допустимые Ω-подгруппы в G, причем A — идеал в B. Если $[H_\alpha]$ — ряд, удовлетворяющий условиям, то ряд, составленный из подгрупп вида $(H_\alpha \cap B) + A/A$, после удаления повторений станет,

очевидно, возрастающим нормальным рядом в B/A из Г-допустимых подгрупп и стабильным относительно Σ. Если теперь B/A — композиционный фактор, то такой ряд должен быть тривиальным, и Σ действует тождественно в B/A. Значит, Σ принадлежит радикалу $\alpha_G(\Gamma)$.

Если $[H_\alpha]$ — некоторая нормальная система Ω, Г-группы G, то Г-*централизатором* этой системы называется нормальный делитель в Г, совпадающий с совокупностью всех элементов из Г, индуцирующих тождественные автоморфизмы во всех факторах этой системы. Из отмеченного выше свойства легко вытекает следующее утверждение:

3.1. *Если в G имеется возрастающий нормальный допустимый ряд, во всех факторах которого* Г *действует неприводимо, то* Г-*централизатор этого ряда совпадает с радикалом* $\alpha_G(\Gamma)$.

Действительно, если Σ — такой Г-централизатор, то мы уже знаем, что $\Sigma \subset \alpha_G(\Gamma)$. С другой стороны, согласно определению радикала имеем и обратное включение.

В этом случае $\alpha_G(\Gamma)$ оказывается стабильной группой. Понятно, что такая ситуация имеет место, если в G выполняется условие минимальности для Г-допустимых Ω-подгрупп. В дальнейшем (седьмая глава) будет показано, что в случае точного представления из стабильности действующей группы вытекает, что такая группа обладает центральной системой, а если имеется конечный стабильный ряд, то действующая группа нильпотентна. Поэтому, если в G выполняется условие минимальности для допустимых Ω-подгрупп и представление является точным, то $\alpha_G(\Gamma)$ обладает центральной системой, а если еще выполняется и условие максимальности или Г — конечная группа, то радикал представления нильпотентен.

В связи со сказанным отметим здесь следующий нерешенный вопрос: будет ли радикал $\alpha_G(\Gamma)$ в случае конечной группы Г и точного представления всегда нильпотентной группой?

Приведем еще следующее простое предложение:

3.2. *Если* (G, Γ) — *пара и в G задан некоторый возрастающий нормальный ряд допустимых Ω-групп* H_i,

то радикал $\alpha_G(\Gamma)$ *есть пересечение всех* $\alpha_{H_{i+1}/H_i}(\Gamma)$ *по всем факторам этого ряда.*

С одной стороны, очевидно, что $\alpha_G(\Gamma)$ принадлежит указанному пересечению. Пусть теперь B/A — некоторый Г-композиционный фактор в G. Легко видеть, что в заданном нормальном ряде найдется такой скачок H_i, H_{i+1}, что $H_i \cap B \subset A$ и $A + (H_{i+1} \cap B) = B$. Рассматривая все эти группы как Ω,Γ-группы, имеем:

$$B/A = A + (H_{i+1} \cap B)/A \approx (H_{i+1} \cap B)/(H_{i+1} \cap A).$$

Так как $B \cap H_i \subset A \cap H_{i+1}$, то ясно, что Ω,Γ-группа B/A изоморфна некоторому композиционному фактору Ω,Γ-группы H_{i+1}/H_i. Отсюда следует, что каждый элемент из $\alpha_{H_{i+1}/H_i}(\Gamma)$ действует тождественно в B/A. Теперь уже ясно, что элементы пересечения всех таких α-радикалов действуют тождественно во всех Г-композиционных факторах в G, и мы имеем обратное включение.

Точно так же, как был определен радикал представления группы, определяется и *радикал представления Ω-почти кольца*. Радикал $\alpha_G(K)$ представления Ω-почти кольца K относительно Ω-группы G — это пересечение ядер представления K относительно всех K-композиционных факторов в G. Так же как и раньше, замечаем, что $K/\alpha_G(K)$ является подпрямой суммой Ω-почти колец, обладающих точными неприводимыми представлениями. Если пара (G, Γ) порождает модуль (G, K), то между их радикалами представлений имеется простая связь:

$$(\varepsilon + \alpha_G(K)) \cap \Gamma = \alpha_G(\Gamma).$$

Здесь ε — единица в Г, и $\varepsilon + X$ — множество всех элементов вида $\varepsilon + x$, $x \in X$. Формула эта проверяется непосредственно. Так как Г порождает K, то всякий Г-композиционный фактор будет, очевидно, и K-композиционным, и наоборот. Пусть B/A — такой фактор в G и $\sigma \in \alpha_G(\Gamma)$. Для любого $\bar{g} \in B/A$ имеем $\bar{g} \circ \sigma = \bar{g}$, $\bar{g} \circ (-\varepsilon + \sigma) = -\bar{g} + \bar{g} = \bar{0}$ и $-\varepsilon + \sigma = u \in \alpha_G(K)$. Отсюда $\sigma = \varepsilon + u$, и тем самым доказано включение $\alpha_G(\Gamma) \subset \Gamma \cap (\varepsilon + \alpha_G(K))$. Аналогично проверяется обратное вклю-

чение: если $u \in \alpha_G(K)$, то $\bar{g} \circ u = \bar{0}$, $\bar{g} \circ (\varepsilon + u) = \bar{g}$. Следовательно, если $\varepsilon + u = \sigma$ принадлежит Γ, то этот элемент принадлежит также и $\alpha_G(\Gamma)$.

Дальше мы рассмотрим некоторые свойства радикала $\alpha_G(K)$. Этот радикал определен аналогично радикалу Джекобсона в теории колец. Помимо того, что здесь рассматривается более общая ситуация, отличие состоит еще в том, что при определении $\alpha_G(K)$ мы исходим не из всех неприводимых Ω-модулей, связанных с K, а лишь из модулей, полученных за счет композиционных факторов Ω-группы G.

При рассмотрении свойств радикала $\alpha_G(K)$ мы ограничимся нормальными представлениями, т. е. такими представлениями, для которых соответствующий модуль является нормальным.

3.3. *Покажем, что в таком случае радикал $\alpha_G(K)$ является пересечением некоторых максимальных правых идеалов из K.*

Пусть B/A — K-композиционный фактор в G и $B/A = \mathfrak{G}$. Так как модуль $(\mathfrak{G}, K)$ сильно неприводим, то для каждого $g \in \mathfrak{G}$ такого, что $g \circ K \neq 0$, модуль $(\mathfrak{G}, K)$ эквивалентен фактор-модулю $(K/K_g, K)$, где K_g — это множество всех таких $u \in K$, что $g \circ u = 0$. Все эти K_g являются, следовательно, более чем максимальными правыми идеалами в K; они являются также и максимальными допустимыми относительно умножений справа Ω-подгруппами в K. Наше утверждение теперь вытекает из того, что ядро представления K относительно $\mathfrak{G}$ совпадает с пересечением правых идеалов K_g по всем $g \in \mathfrak{G}$.

Как обычно, через $L:K$ обозначается правое частное, т. е. совокупность всех таких $u \in K$, что при любом v из K произведение vu принадлежит подмножеству L. Ядро представления K относительно $\mathfrak{G}$ совпадает также, очевидно, с частным $K_g:K$, так что дополнительно можно заметить, что все частные $K_g:K$ совпадают между собой и совпадают с пересечением всех этих K_g.

Докажем теперь следующую теорему:

3.4. *Пусть (G, K) — нормальный модуль и пусть L — допустимая относительно умножений справа Ω-под-*

группа в K. Тогда, если каждый элемент из L является внешним нильэлементом, то L принадлежит радикалу $\alpha_G(K)$.

Здесь под внешним нильэлементом понимается такой элемент $u \in K$, что для каждого $g \in G$ при некотором $n = n(g)$ имеет место равенство $g \circ u^n = 0$. Для доказательства теоремы возьмем некоторый композиционный фактор $B/A = \mathfrak{G}$ в G и будем показывать, что в рассматриваемом случае L принадлежит ядру представления K относительно $\mathfrak{G}$. Пусть $\bar{g} \in \mathfrak{G}$, и допустим, что $\bar{g} \circ L \neq 0$. В таком случае множество $\bar{g} \circ L$, будучи допустимой Ω-подгруппой в $\mathfrak{G}$, должно совпадать со всей группой $\mathfrak{G}$. Следовательно, при некотором $v \in L$ будет $\bar{g} \circ v = \bar{g}$. Но тогда и при любом натуральном n будет выполняться равенство $\bar{g} \circ v^n = \bar{g}$. Это равенство противоречит тому, что элемент v является внешним нильэлементом. Следовательно, $\bar{g} \circ L = \bar{0}$ и $L \subset \alpha_G(K)$.

Подобно тому как внешние нильэлементы служат обобщением нильпотентных элементов, так определяемые ниже *внешние квазирегулярные* элементы являются обобщением квазирегулярных элементов из теории колец.

Элемент $u \in K$ назовем *внешним квазирегулярным элементом*, если для любого $g \in G$ найдется $v \in K$ такой, что $(g - g \circ u) \circ v = g$. Легко проверить, что в случае коммутативной группы G каждый внешний нильэлемент из K является также и внешним квазирегулярным элементом.

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что в K имеется единица ε, действующая в G как единичный автоморфизм. Это условие, конечно, выполняется, если иметь в виду рассмотрение модулей, порождаемых представлениями групп. Отметим, что при этом условии можно писать:

$$g - g \circ u = g \circ (\varepsilon - u) \text{ и } (g - g \circ u) \circ v = g \circ (\varepsilon - u) v.$$

Имеет место следующая теорема:

3.5. *Если модуль (G, K) является нормальным, то каждая допустимая относительно правых умножений Ω-подгруппа $L \subset K$, состоящая из внешних квазирегулярных элементов, принадлежит радикалу $\alpha_G(K)$. Если, сверх*

того, (G, K) — правильный строгий модуль, то все элементы из $\alpha_G(K)$ внешне квазирегулярны.

Вначале докажем первое утверждение. Пусть Ω-подгруппа L удовлетворяет отмеченным условиям и пусть $B/A=\mathfrak{G}$ — K-композиционный фактор в G и $\bar{g}\in\mathfrak{G}$. Допустим, что $\bar{g}\circ L\neq\bar{0}$ и, следовательно, $\bar{g}\circ L=\mathfrak{G}$. В этом случае найдется такой $u\in L$, что выполняется $\bar{g}\circ u=\bar{g}$ и $\bar{g}\circ(\varepsilon-u)=\bar{0}$. По условию, найдется такой $v\in K$, что $g\circ(\varepsilon-u)v=g$. Но тогда $\bar{g}\circ(\varepsilon-u)v=\bar{g}=\bar{0}\circ v=\bar{0}$, что ведет к противоречию. Следовательно, L принадлежит ядру представления K относительно $\mathfrak{G}$, и потому $L\subset\alpha_G(K)$.

Пусть теперь модуль (G, K) является правильным модулем и пусть элемент u принадлежит $\alpha_G(K)$. Нужно показать, что этот элемент является внешне квазирегулярным. Рассмотрим в K совокупность $(\varepsilon-u)K$ всех элементов вида $(\varepsilon-u)x$, $x\in K$. Легко видеть, что при любом $g\in G$ множество $g\circ(\varepsilon-u)K$ есть допустимая Ω-подгруппа. Покажем, что эта подгруппа содержит элемент g. Предположим, что это не так, и пусть H — некоторая максимальная допустимая Ω-подгруппа в $g\circ K$ среди содержащих $g\circ(\varepsilon-u)K$ и не содержащих элемент g. Такая непременно найдется, если только g не принадлежит $g\circ(\varepsilon-u)K$. Подгруппа H является максимальной допустимой Ω-подгруппой в $g\circ K$, так как всякая бо́льшая подгруппа содержит g и, будучи допустимой, содержит и все $g\circ K$, так что такая бо́льшая Ω-подгруппа должна совпадать с $g\circ K$. Так как исходный модуль (G, K) является правильным, то теперь заключаем, что H — допустимый идеал в $g\circ K$ и имеет смысл модуль $(g\circ K/H, K)$. Этот модуль сильно неприводим, и u принадлежит ядру представления K относительно Ω-группы $g\circ K/H$. Но это, в частности, означает, что $g\circ u\in H$. Так как и $g\circ(\varepsilon-u)\in H$, то $g\in H$, и получилось противоречие.

Следовательно, $g\in g\circ(\varepsilon-u)K$, и потому при некотором $v\in K$ будет $g\circ(\varepsilon-u)v=g$, что и требовалось. Теорема доказана.

Отметим сейчас еще один класс модулей — подкласс в классе $\overline{RN}$. $\overline{RN}$-модуль (G, K) будем называть $\overline{\overline{RN}}$-мо-

дулем, если все композиционные факторы в G, рассматриваемые еще как Ω-алгебры, коммутативны. Ясно, что если G — группа (без мультиоператоров), то $\overline{RN}$ и $\overline{\overline{RN}}$ — это одно и то же. Аналогично тому как это было сделано для свойства $\overline{RN}$, можно доказать локальную теорему и для свойства $\overline{\overline{RN}}$. $\overline{\overline{RN}}$-модули представляют интерес ввиду следующего их свойства.

3.6. *Если (G, K) — строгий $\overline{\overline{RN}}$-модуль, то $K/\alpha_G(K)$ — дистрибутивное Ω-кольцо (с коммутативной Ω-группой).*

Действительно, если B/A — некоторый композиционный фактор в G, и L — ядро представления K относительно B/A, то K/L можно рассматривать как Ω-подкольцо в Ω-кольце всех эндоморфизмов коммутативной алгебры B/A. Следовательно, K/L — (дистрибутивное) Ω-кольцо с коммутативной Ω-группой. Из теоремы о подпрямых суммах теперь следует, что таким же будет и $K/\alpha_G(K)$.

4. Радикал Джекобсона Ω-почти кольца. *Радикалом Джекобсона* Ω-почти кольца естественно назвать радикал его регулярного представления. Нетрудно понять, что в случае колец мы таким образом действительно приходим к классическому радикалу Джекобсона. Сейчас мы отметим некоторые свойства такого радикала при дополнительных предположениях относительно свойств самого Ω-почти кольца. Мы ограничимся Ω-квазикольцами. Ω-квазикольцо будем называть *правильным*, *нормальным* и т. д., если соответствующим свойством обладает модуль, определяемый регулярным представлением.

Из предыдущего пункта следует, что радикал Джекобсона нормального Ω-квазикольца с единицей K — будем его обозначать через $\alpha(K)$ — совпадает с пересечением всех таких правых идеалов H из K, что между H и K нет допустимых относительно умножений справа Ω-подгрупп Ω-группы K.

Мы видели, что $\alpha(K)$ есть пересечение некоторых таких H. Остается заметить, что если H — правый идеал с отмеченными свойствами, то $\alpha(K)$ принадлежит ядру представления K относительно K/H, и поэтому с помощью единицы ε получаем $\varepsilon \cdot \alpha(K) = \alpha(K) \subset H$.

Из другой теоремы предыдущего пункта получаем следующее утверждение:

4.1. *Если K — правильное Ω-квазикольцо с единицей, то его радикал Джекобсона состоит из квазирегулярных элементов и содержит каждый правый идеал из K, состоящий из таких элементов.*

Здесь нам нужно только заметить, что внешняя квазирегулярность в регулярном представлении равносильна обычной квазирегулярности. В самом деле, если u — такой внешний квазирегулярный элемент в K, то при некотором v для единицы ε будет $\varepsilon \circ (\varepsilon - u) v = \varepsilon$. Следовательно, $(\varepsilon - u) v = \varepsilon$, т. е. $(\varepsilon - u)$ обладает правым обратным.

Напомним, что из рассмотрений п. 1 этого параграфа следует, что если Ω-квазикольцо K обладает локальной системой $[K_\alpha]$ такой, что все Ω-группы K_α нильпотентны, то K правильно.

5. Обобщения. Везде раньше при определении радикала представления мы исходили из специального типа композиционных факторов. Можно было бы также взять за основу и некоторую другую композиционность. Так, например, можно было бы называть композиционными факторами такие допустимые факторы B/A, в которых A — максимальный допустимый идеал в B. При этом мы пришли бы к другому радикалу представления.

Понятие радикала представления группы можно определить также и для представлений относительно произвольных универсальных алгебр. Если задана пара (G, Γ) с алгеброй G в качестве области действия, то факторы этой пары имеют вид H/ρ, где H — допустимая подалгебра в G и ρ — допустимая конгруэнция в H. Теперь можно определять и композиционные в том или ином смысле факторы. Пусть, скажем, представление группы Γ относительно алгебры $\mathfrak{G}$ называется *неприводимым по конгруэнциям* в том случае, когда в $\mathfrak{G}$ нет нетривиальных инвариантных относительно Γ конгруэнций. При этом H/ρ есть композиционный фактор, если ρ — максимальная Γ-инвариантная конгруэнция в H. Легко показать, что если задана пара (G, Γ), в которой Ω-алгебра G обладает одноэлементной (нулевой) подалгеброй, то в G

имеется достаточно много (полная система) таких Г-композиционных факторов.

Прежде всего, заметим, что при указанном условии, если ρ — конгруэнция алгебры G или некоторой ее подалгебры, то смежный класс $[0]_\rho$, содержащий нуль, является подалгеброй в G, а если ρ — допустимая конгруэнция, то $[0]_\rho$ — допустимая подалгебра. Пусть теперь g — произвольный ненулевой элемент в G и пусть $H = \{g \circ \Gamma\}^\Omega$. Возьмем в H конгруэнцию ρ, максимальную относительно свойства: быть Г-допустимой и не склеивать g с нулем. Существование такой конгруэнции ρ устанавливается с помощью леммы Цорна. Из предыдущих замечаний непосредственно следует, что ρ является максимальной инвариантной относительно Г конгруэнцией в H и H/ρ — Г-композиционный фактор, в котором элемент g не склеен с нулем.

Точно так же, как определялись сильно неприводимые представления относительно Ω-групп, можно определить и сильно неприводимые представления относительно произвольных алгебр. Представление группы относительно алгебры $\mathfrak{G}$ называется *сильно неприводимым*, если в $\mathfrak{G}$ нет допустимых подалгебр, отличных от самой $\mathfrak{G}$ и от подалгебры, целиком состоящей из выделенных элементов. Понятно, что теперь сильная неприводимость не обязательно «сильнее», чем неприводимость по конгруэнции, — они просто не сравнимы. В хороших случаях сильная неприводимость действительно сильнее неприводимости по конгруэнциям, а в общем случае обе эти неприводимости не сравнимы. Учитывая это обстоятельство, под сильной неприводимостью в самой общей ситуации следовало бы понимать тот случай, когда в алгебре нет собственных допустимых факторов. Это равносильно тому, что имеет место как неприводимость по конгруэнциям, так и сильная неприводимость в определенном выше смысле — по подалгебрам. Ясно также, что сильно неприводимые представления являются циклическими, и следовательно, все они могут быть реализованы, исходя из самой действующей группы. В связи со сказанным сейчас естественно возникает и следующий вопрос: нельзя ли найти способ, который позволял бы

так же хорошо обозревать и неприводимые по конгруэнциям представления заданной группы?

В первую очередь при этом следует научиться отвечать на следующий вопрос. Пусть задано неприводимое по конгруэнциям представление группы Γ относительно алгебры G из некоторого класса K. Можно ли утверждать, что мощность основного множества G ограничена некоторой мощностью, зависящей от Γ (и K)? Здесь, конечно, придется ограничиться некоторым разумным классом алгебр.

Было бы интересно также подробнее изучить свойства радикала представления группы относительно универсальной алгебры того или иного класса, основанного на неприводимости по конгруэнциям. Здесь, в частности, нужно исследовать возможности обобщения теоремы Калужнина из § 7.1 на группы автоморфизмов некоторых универсальных алгебр.

§ 2. РАЗЛОЖИМОСТЬ, ПОЛНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ, ИМПРИМИТИВНОСТЬ

1. Исходные замечания. Теорема Машке. Представление группы Γ или Ω-почти кольца K относительно некоторой Ω-группы G называется *разложимым*, если G можно представить в виде прямой суммы Γ-(или соответственно K-) допустимых идеалов. Легко видеть, что если $G=\sum G_\alpha$ — такое разложение, то исходное представление $\Gamma(K)$ относительно G эквивалентно прямой сумме индуцированных представлений этой же группы (Ω-почти кольца) относительно слагаемых G_α, так что действие в каждом G_α определяет действие и во всей Ω-группе G. Отметим здесь же следующее простое предложение.

1.1. *Пусть Ω-группа разложена в прямую сумму $G=\sum G_\alpha$, где все идеалы G_α являются характеристическими Ω-подгруппами в G, и пусть Γ — группа всех автоморфизмов Ω-группы G, Γ_α — группа всех автоморфизмов идеала G_α. Тогда пара (G, Γ) изоморфна полуполному слева прямому произведению пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$.*

Если σ — элемент в Γ, то ввиду характеристичности G_α ему отвечает последовательность (σ_α), где $\sigma_\alpha \in \Gamma_\alpha$ — автоморфизм Ω-группы G_α, индуцированный автоморфизмом σ,

Отображение $\sigma^{\mu}=(\sigma_{\alpha})$ есть изоморфизм Γ в полное прямое произведение всех Γ_{α}. Обозначим это произведение через $\tilde{\Gamma}$. Если, далее, (σ_{α}) — элемент в $\tilde{\Gamma}$, то ясно, что ему отвечает автоморфизм Ω-группы G, и μ становится изоморфизмом между Γ и $\tilde{\Gamma}$. Если рассматривать μ еще как естественный изоморфизм между G и прямой суммой всех G_{α}, то теперь ясно, что μ устанавливает нужный изоморфизм пар. Разложимость представления равносильна, очевидно, разложимости в прямую сумму мультиоператорной Ω, Γ-(или Ω, K-)группы G. При этом теоремы об изоморфизмах разложений мультиоператорных групп — теоремы типа Ремака—Шмидта — превращаются в случае представлений в теоремы об эквивалентности наборов индуцированных представлений, отвечающих различным разложениям.

Теперь определим вполне приводимые представления. Представление группы Γ или Ω-почти кольца K относительно Ω-группы G называется *вполне приводимым*, если для всякого допустимого идеала A в G имеется допустимое дополнение B — допустимый идеал в G такой, что $A\cap B=0$ и $A+B=G$. Другими словами, представление вполне приводимо, если вполне приводима соответствующая Ω,Γ-(или Ω,K-)группа G. Поэтому все сказанное о вполне приводимых мультиоператорных группах во второй главе применимо к теории вполне приводимых представлений. В частности, *представление в том и только в том случае вполне приводимо, когда G распадается в прямую сумму минимальных допустимых идеалов*. Зная действия Γ (или K) в этих прямых слагаемых, мы однозначно восстанавливаем ее действие во всей группе G. При этом представления относительно таких слагаемых неприводимы лишь в том смысле, что в каждом из них нет допустимых идеалов. Вполне приводимые представления — это в известном смысле простейший тип представлений. В классической теории такие представления тесно связаны с унитарными представлениями.

Рассмотрим теперь некоторые факты, относящиеся к случаю, когда область действия G — абелева Ω,K-группа.

Пусть в модуле (G, K) G обладает этим свойством и K содержит единицу. Понятно, что в этом случае все $g \circ K$, $g \in G$, являются допустимыми идеалами в G и покрывают G. Допустим далее, что все ненулевые элементы из K обратимы. Тогда, во-первых, ясно, что в полугруппе K нет нетривиальных правых идеалов, и поэтому каждая пара $(g \circ K, K)$ эквивалентна регулярной паре (K, K). Во-вторых, различные $g \circ K$ могут пересекаться только по нулю — они являются минимальными K-допустимыми идеалами в G. Ясно также, что Ω-группа G является прямой суммой некоторых из этих $g \circ K$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации представление K относительно G вполне приводимо. Можно также сказать, что оно кратно регулярному представлению (K, K).

Имеет место также следующее предложение:

1.2. *Пусть задан модуль (G, K), в котором Ω, K-группы G и K абелевы, K содержит единицу, и пусть еще регулярный модуль (K, K) вполне приводим. Тогда и (G, K) — вполне приводимый модуль.*

Допустим, что $K = \sum K_\alpha$, $\alpha \in I$, — разложение K на неприводимые слагаемые. Все эти K_α являются правыми идеалами в K, не содержащими других ненулевых правых идеалов. Следовательно, для любого $g \in G$, если $g \circ K_\alpha \neq 0$, модуль $(g \circ K_\alpha, K)$ сильно неприводим и эквивалентен модулю (K_α, K). $g \circ K_\alpha$ является при этом и идеалом в G (ввиду абелевости), причем минимальным допустимым идеалом. Ясно также, что $g \in g \circ K = g \circ \sum K_\alpha = \{g \circ K_\alpha\}$. Теперь уже очевидно, что G есть прямая сумма некоторых из $g \circ K_\alpha$, $g \in G$, $\alpha \in I$, что и доказывает предложение.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением представлений групп. По поводу полной приводимости представлений групп имеется следующая классическая теорема Машке, относящаяся к линейным представлениям: если Γ — конечная группа и ее порядок не делится на характеристику основного поля P, то всякое представление Γ относительно векторного пространства G над полем P вполне приводимо. Эта теорема обобщалась в разных направлениях. Приведем сейчас одно из таких обобщений.

1.3. *Пусть задано представление группы* Γ *относительно абелевой* Ω*-группы* G *и пусть* Φ — *подгруппа в* Γ *конечного индекса* n *такого, что в* G *возможно однозначное деление элементов на* n. *Тогда, если* Φ *вполне приводима, то и вся группа* Γ *вполне приводима.*

Воспользуемся обычной для теоремы Машке конструкцией (ср., например, М. Холл [2]). Возьмем в Γ некоторую полную (конечную, порядка n) систему представителей левосторонних смежных классов по Φ; обозначим ее через M. Пусть, далее, A — произвольная Γ-допустимая Ω-подгруппа в G. Так как A в то же время и Φ-допустима, то из полной приводимости Φ следует, что A обладает Φ-допустимым дополнением. Обозначим его через A': $G = A + A'$. Если дальше $g \in G$, $g = a + a'$, $a \in A$, $a' \in A'$, то полагаем $g\eta = a'$. Отображение η является идемпотентным эндоморфизмом, отображающим G на A'. Легко видеть, что при любом $\varphi \in \Phi$ выполняется $((g \circ \varphi)\eta) \circ \varphi^{-1} = g\eta$. Имеем $g \circ \varphi = a \circ \varphi + a' \circ \varphi$. Так как $a' \circ \varphi \in A'$, то $(g \circ \varphi)\eta = a' \circ \varphi$ и $((g \circ \varphi)\eta) \circ \varphi^{-1} = a' = g\eta$, что и требовалось. Введем еще один эндоморфизм τ по правилу:

$$g\tau = g' = \frac{1}{n} \sum_{\sigma_i \in M} ((g \circ \sigma_i)\eta) \circ \sigma_i^{-1}.$$

Здесь суммирование идет по всем $\sigma_i \in M$. Деление на n возможно в силу договоренности. Нетрудно понять, что для абелевой Ω-группы G — это действительно эндоморфизм.

Через B обозначим образ G при отображении τ: $B = G\tau$. Будем показывать, что 1) B Γ-допустим, 2) $G = A + B$ и 3) эта сумма — прямая.

Доказываем 1). Пусть $\sigma \in \Gamma$. Тогда

$$(g\tau) \circ \sigma = \frac{1}{n} \sum_{\sigma_i \in M} ((g \circ \sigma_i)\eta) \circ \sigma_i^{-1}\sigma =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{\sigma_i \in M} (((g \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}\sigma_i)\eta) \circ \sigma_i^{-1}\sigma.$$

Элемент $\sigma^{-1}\sigma_i$ можно представить в виде $\sigma^{-1}\sigma_i = \sigma_j\varphi_j$, где $\sigma_j \in M$ и $\varphi_j \in \Phi$.

Теперь получим:

$$(g\tau)\circ\sigma=\frac{1}{n}\sum_{\sigma_j\in M}(((((g\circ\sigma)\circ\sigma_j)\circ\varphi_j)\eta)\circ\varphi_j^{-1})\circ\sigma_j^{-1}.$$

Здесь σ_j также пробегает все множество M. Кроме того, используя приводившееся выше замечание, получим:

$$(g\tau)\circ\sigma=\frac{1}{n}\sum_{\sigma_j\in M}(((g\circ\sigma)\circ\sigma_j)\circ\eta)\circ\sigma_j^{-1}=(g\circ\sigma)\tau.$$

Этим 1) проверено. Для доказательства 2) запишем равенство $g=(g-g\tau)+g\tau$. Покажем, что $g-g\tau\in A$. Имеем:

$$g-g\tau=g-\frac{1}{n}\sum((g\circ\sigma_i)\eta)\sigma_i^{-1}=$$
$$=\frac{1}{n}\sum(g-((g\circ\sigma_i)\eta)\circ\sigma_i^{-1})=\frac{1}{n}\sum(g\circ\sigma_i-(g\circ\sigma_i)\eta)\circ\sigma_i^{-1}.$$

Ясно, что $(g\circ\sigma_i)-(g\circ\sigma_i)\eta\in A$. Поэтому и $g-g\tau\in A$ и $G=A+B$. Легко заметить также, что для всех $a\in A$ выполняется равенство $a\tau=0$. Это означает, что $A\cap B=0$. Действительно, если $a\in A\cap B$, то $a=g\tau$, и так как $g-g\tau$, $g\tau\in A$, то и $g\in A$. Но для элементов из A должно быть $g\tau=0$. Следовательно, $a=0$. Теорема доказана. Отметим еще следующее простое утверждение.

1.4. *Пусть задана пара (G, Γ), G — абелева, причем в Ω-группе G имеется локальная система из Γ-допустимых Ω-подгрупп G_α таких, что каждый раз представление Γ относительно G_α вполне приводимо. Тогда и представление Γ относительно G вполне приводимо.*

Пусть G' — цоколь Ω,Γ-группы G. Нужно показать, что $G'=G$. Допустим, что это не так, и пусть $g\overline{\in}G'$. Найдем локальную подгруппу G_α, содержащую элемент g. Так как G_α есть прямая сумма минимальных Γ-допустимых Ω-подгрупп, то должно быть $G_\alpha\subset G'$. Но тогда и $g\in G'$, что противоречит предположению, так что $G=G'$.

Это предложение может быть обобщено и на случай неабелевой Ω-группы G, если предположить, что все G_α — идеалы в G.

По поводу обобщений теоремы Машке см. также работы Р. Бера [14], В. Гашюца [1], Д. Хигмена [1],

Л. Ковача и М. Ньюмена [1]. В последней работе, в частности, приводится предложение, сводящее общий вопрос о существовании допустимого дополнения к аналогичному вопросу для абелевой области действия.

Если представление группы Γ относительно Ω-группы G вполне приводимо, то в G необходимо имеются минимальные допустимые идеалы, и G есть сумма всех таких идеалов. В общем случае сумму всех минимальных допустимых идеалов мы называем Γ-цоколем в G. Ясно, что Γ-цоколь является прямой суммой некоторых минимальных допустимых идеалов из G, причем всякий допустимый идеал из G, лежащий в цоколе, дополняем в нем. Отправляясь от цоколя, можно определить *верхний цокольный ряд* в G. Легко видеть, что такой ряд в том и только в том случае дойдет до группы G, когда выполняется одно из следующих условий:

а) в G имеется возрастающий ряд допустимых идеалов $[H_\alpha]$, $H_0=0$, $H_\gamma=G$, такой, что $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ — минимальный допустимый идеал в G/H_α;

б) для любого гомоморфного образа $(\bar{G}, \bar{\Gamma})$ пары (G, Γ) в $\bar{G}$ имеются минимальные допустимые идеалы.

Наряду с цоколем в G целесообразно рассматривать еще идеал в G, порожденный всеми вполне приводимыми идеалами Ω, Γ-группы G (см. по этому поводу § 5.2).

2. Теорема Клиффорда. Пусть (G, Γ) — некоторая пара, в которой группа Γ вполне приводима (т. е. вполне приводимо представление этой группы), и пусть Σ — нормальный делитель в Γ. Покажем, что *этот нормальный делитель вполне приводим, если верхний Σ-цокольный ряд в G доходит до всей группы G.* Это условие, конечно, является и необходимым для полной приводимости Σ, и оно автоматически выполняется в том случае, когда G удовлетворяет условию минимальности для идеалов. Указанное утверждение составляет часть важной теоремы Клиффорда, доказанной им для линейных представлений. Остальная ее часть будет сформулирована и доказана несколько ниже.

Пусть $[H_\alpha]$ — возрастающий ряд Σ-допустимых идеалов в G такой, что $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ — минимальный Σ-допусти-

мый идеал в G/H_α, и пусть H — произвольный Σ-допустимый идеал в G. Среди членов ряда $[H_\alpha]$ найдется первый такой, скажем H_β, для которого $H_\beta \cap H \neq 0$. Легко видеть, что число β не является предельным, а отсюда уже следует, с помощью теоремы об изоморфизмах, что $H_\beta \cap H$ — минимальный Σ-допустимый идеал Ω-группы G, так что при наших условиях каждый Σ-допустимый идеал из G содержит некоторый минимальный Σ-допустимый идеал Ω-группы G.

Допустим теперь, что

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_\alpha + \ldots \tag{1}$$

есть разложение Ω-группы G в прямую сумму минимальных Γ-допустимых идеалов, и пусть G_α — одно из прямых слагаемых здесь. Возьмем в G_α некоторый минимальный Σ-допустимый идеал H Ω-группы G. Мы знаем, что при любом $\gamma \in \Gamma$ пары (H, Σ) и $(H \circ \gamma, \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$ изоморфны. Следовательно, вместе с H все $H \circ \gamma$, $\gamma \in \Gamma$, являются минимальными Σ-допустимыми идеалами в G. Пусть G'_α — сумма всех таких $H \circ \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Ясно, что G'_α — Γ-допустимый идеал, лежащий в G_α. Поэтому G'_α совпадает с G_α, и G_α является прямой суммой некоторых минимальных Σ-допустимых идеалов Ω-группы G. Поступая аналогично со всеми такими G_α, мы покажем, что G разложима в прямую сумму минимальных Σ-допустимых идеалов, т. е. Σ — вполне приводимая группа.

Посмотрим дальше на G как на Ω, Σ-группу. Эта группа вполне приводима, и пусть

$$G = G^1 + G^2 + \ldots + G^\alpha + \ldots \tag{2}$$

— ее разложение на однородные компоненты (см. п. 1.2.6). Покажем, что *эти компоненты являются системами импримитивности группы* Γ. Это и будет оставшейся частью теоремы Клиффорда.

Вначале заметим, что если (A, Σ) и (B, Σ) — две эквивалентные подпары в (G, Γ), то подпары $(A \circ \gamma, \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$ и $(B \circ \gamma, \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$ также эквивалентны. Пусть отображение μ: $A \to B$ устанавливает эквивалентность пар (A, Σ) и (B, Σ). Определим отображение ν: $A \circ \gamma \to B \circ \gamma$ по правилу: $(a \circ \gamma)^\nu = a^\mu \circ \gamma$.

Имеем

$$((a\circ\gamma)\circ\gamma^{-1}\sigma\gamma)^{\nu}=((a\circ\sigma)\circ\gamma)^{\nu}=(a\circ\sigma)^{\mu}\circ\gamma=a^{\mu}\circ\sigma\gamma=\\=(a^{\mu}\circ\gamma)\circ\gamma^{-1}\sigma\gamma=(a\circ\gamma)^{\nu}\circ\gamma^{-1}\sigma\gamma,\ (\sigma\in\Sigma).$$

Отсюда и вытекает эквивалентность пар $(A\circ\gamma,\ \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$ и $(B\circ\gamma,\ \gamma^{-1}\Sigma\gamma)$.

Если теперь A — некоторый минимальный Σ-допустимый идеал в G, и A принадлежит члену G^{α} разложения (2), а $A\circ\gamma$ содержится в G^{β}, то согласно предыдущему замечанию получим $G^{\alpha}\circ\gamma\subset G^{\beta}$. Используя обратное отображение, найдем, что $G^{\alpha}\circ\gamma=G^{\beta}$. Так будет при каждом $\gamma\in\Gamma$, и следовательно, группу Γ можно рассматривать как группу подстановок множества однородных компонент Ω,Σ-группы G.

Отметим, в частности, что в качестве Σ можно было бы взять и единицу группы Γ, и следовательно, если в Ω-группе G выполняется условие минимальности для идеалов и некоторая группа Γ вполне приводима относительно G, то и сама G — вполне приводимая Ω-группа.

3. Импримитивность и примитивность. Если задано представление группы Γ относительно Ω-группы G, то наряду с импримитивностью, связанной с действием Γ как группы подстановок множества G, имеет смысл еще рассматривать импримитивность другого рода: группа G нетривиально представима в виде прямой суммы групп, являющихся системами импримитивности группы Γ. С такой ситуацией мы встречались уже в теореме Клиффорда. В этом параграфе под импримитивностью действующей группы мы будем понимать эту новую импримитивность. Соответственно понимается примитивность действующей группы.

На понятие импримитивности группы Γ можно взглянуть еще и следующим образом. Если задано некоторое прямое разложение Ω-группы G, то каждый элемент из Γ переводит это разложение в некоторое другое разложение. Импримитивность группы Γ означает существование такого нетривиального прямого разложения области действия, которое инвариантно относительно всех элементов из Γ.

Разложимые представления — это частный случай импримитивных представлений. Из последующего мы увидим, что, так же как и разложимость, импримитивность представления ведет к естественным редукциям.

Приведем вначале важный пример импримитивного представления.

Пусть Γ — некоторая группа, Σ — ее подгруппа и B — некоторая полная система представителей правых смежных классов Γ по Σ. Допустим еще, что задано некоторое представление группы Σ относительно Ω-группы $\mathfrak{G}$, и пусть G_α — экземпляр группы $\mathfrak{G}$, поставленный в соответствие элементу $\alpha \in \Gamma/\Sigma$. Тогда в соответствии с рассмотрениями из п. 2.1.4 представление Σ относительно $\mathfrak{G}$ и система представителей B однозначно определяют представление группы Γ относительно прямой суммы всех G_α. При этом легко видеть, что все G_α являются системами импримитивности группы Γ, и Γ действует транзитивно на этом множестве прямых слагаемых. Сейчас мы увидим, что этот пример является типичным.

3.1. *Всякое импримитивное представление группы* Γ *с отмеченным свойством транзитивности может быть получено указанным способом.*

Действительно, пусть задано импримитивное представление группы Γ относительно Ω-группы G и пусть

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_\alpha + \ldots, \quad \alpha \in J,$$

— прямое разложение группы G, в котором слагаемые являются системами импримитивности группы Γ, и Γ действует транзитивно на множестве этих слагаемых. Для каждого G_α через Σ_α обозначим Γ-нормализатор этой Ω-подгруппы, и пусть еще $\Sigma = \Sigma_1$. Совокупность всех $\sigma \in \Gamma$, для которых $G_1 \circ \sigma = G_\alpha$, составляет смежный класс из Γ/Σ, и мы получаем тем самым (ввиду транзитивности) взаимно однозначное соответствие между прямыми слагаемыми отмеченного разложения и смежными классами из Γ/Σ. Фиксируем теперь для этих смежных классов некоторую полную систему представителей $B = (\ldots, \tau_\alpha, \ldots)$. Ясно, что $\Sigma_\alpha = \tau_\alpha^{-1}\Sigma\tau_\alpha$, и изоморфизм между парами (G_1, Σ_1) и $(G_1 \circ \tau_\alpha, \tau_\alpha^{-1}\Sigma_1\tau_\alpha) = (G_\alpha, \Sigma_\alpha)$ означает, что действие Σ в G определяет действие каждой Σ_α

в соответствующей G_α. Пусть теперь γ — произвольный элемент в Γ и $g_\alpha \in G_\alpha$. Этот g_α можно представить в виде $g_\alpha = g_1 \circ \tau_\alpha$, $g_1 \in G_1$. Дальше имеем $g_\alpha \circ \gamma = g_1 \circ \tau_\alpha \gamma = (g_1 \circ \sigma) \circ \tau_\beta$, где $\sigma = \sigma(\gamma, \alpha)$ — некоторый элемент в Σ, удовлетворяющий условию $\tau_\alpha \gamma = \sigma \tau_\beta$. Таким образом, действие Γ в G определяется действием Σ_1 в G_1 и выбором системы представителей B. При этом роль B по отношению к G сводится лишь к тому, что элементы из B устанавливают систему изоморфизмов между G_1 и всеми остальными G_α. Именно так и строилось представление группы Γ в п. 2.1.4.

Сохраним дальше обозначения предложения 3.1 и сделаем к нему некоторые добавления. Пусть через $\mathfrak{z}_\alpha$ обозначен Γ-централизатор слагаемого G_α. Ясно, что $\mathfrak{z}_\alpha$ — нормальный делитель в Σ_α и что фактор-группу $\Sigma_\alpha/\mathfrak{z}_\alpha$ можно рассматривать как подгруппу группы автоморфизмов Ω-группы G_α. Рассматривая $\Sigma_\alpha/\mathfrak{z}_\alpha$ таким образом, обозначим ее через Φ_α, и пусть Φ — полное прямое произведение всех этих Φ_α. Если теперь $g = \sum g_\alpha$ *) — элемент в G и $\varphi = (\varphi_\alpha)$ — элемент в Φ, то, полагая $g\varphi = \sum g_\alpha \varphi_\alpha$ *), мы зададим, очевидно, вложение Φ в группу $\mathfrak{A}(G)$ всех автоморфизмов Ω-группы G. В дальнейшем будем считать, что Φ, а также все Φ_α — подгруппы в $\mathfrak{A}(G)$. Согласно условию группа Γ может также рассматриваться как группа, действующая на множестве индексов I, т. е. мы имеем чистую пару (I, Γ). Ядром возникающего здесь представления служит, очевидно, пересечение всех Σ_α, $\alpha \in I$. Обозначим это ядро через Γ_0. Мы допускаем, как и раньше, что пара (I, Γ) является транзитивной парой.

Используя элементы выбранной системы представителей B, для каждой пары слагаемых G_α и G_β, $\alpha, \beta \in I$, определим теперь изоморфизм $\mu = \mu_{\alpha, \beta} : G_\alpha \to G_\beta$, полагая для $a_\alpha \in G_\alpha$

$$a_\alpha^\mu = a_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1} \tau_\beta \in G_\beta.$$

Опираясь на эти изоморфизмы, сопоставим каждому элементу $\sigma \in \Gamma$ новый автоморфизм s_σ по формуле $a_\alpha s_\sigma = a_\alpha \circ (\tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma})^\mu$ для каждого $a_\alpha \in G_\alpha$, $\alpha \in I$. Отображение

*) Здесь Σ — знак суммы.

$\sigma \to s_\sigma$ является гомоморфизмом. Действительно,

$$a_\alpha s_\sigma s_\varphi = (a_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma}) \circ \tau_{\alpha \circ \sigma}^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma\varphi} = a_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma\varphi} = a_\alpha s_{\sigma\varphi}.$$

Ядром этого гомоморфизма служит, очевидно, подгруппа Γ_0. Группу всех s_σ обозначим через S. Эту группу, лежащую в $\mathfrak{A}(G)$, можно, следовательно, рассматривать как некоторую группу подстановок множества I.

Имеет место следующая теорема:

3. 2. *Подгруппа Φ инвариантна относительно S, и проекция Γ относительно G содержится в произведении ΦS.*

Вначале заметим, что ввиду $\Sigma_\alpha = \tau_\alpha^{-1} \Sigma_1 \tau_\alpha$ каждый τ_α индуцирует изоморфизм групп Φ_1 и Φ_α. Обозначим такой изоморфизм через τ_α^*. Покажем, что имеет место формула

$$s_\sigma^{-1} \varphi_\alpha s_\sigma = \varphi_\alpha^{(\tau^*)^{-1} \tau^*_{\alpha \circ \sigma}} \in \Phi_{\alpha \circ \sigma}, \quad \varphi_\alpha \in \Phi_\alpha.$$

Пусть $a_\beta \in G_\beta$. Если $\beta \circ \sigma^{-1} \neq \alpha$, то очевидно, что обе части приведенного равенства оставляют a_β неподвижным. Пусть теперь $\beta \circ \sigma^{-1} = \alpha$. Тогда

$$a_\beta s_\sigma^{-1} \varphi_\alpha s_\sigma = a_\beta s_{\sigma^{-1}} \varphi_\alpha s_\sigma = (a_\beta \circ \tau_\beta^{-1} \tau_{\beta \circ \sigma^{-1}}) \varphi_{\beta \circ \sigma^{-1}} s_\sigma =$$
$$= (a_\beta \circ \tau_\beta^{-1} \tau_{\beta \circ \sigma^{-1}}) \varphi_{\beta \circ \sigma^{-1}} \circ \tau_{\beta \circ \sigma^{-1}}^{-1} \tau_{\beta \circ \sigma^{-1} \sigma} =$$
$$= a_\beta \varphi_{\beta \circ \sigma^{-1}}^{(\tau^*_{\beta \circ \sigma^{-1}})^{-1} \tau^*_\beta} = a_\beta \varphi_\alpha^{(\tau^*_\alpha)^{-1} t^* \tau_{\alpha \circ \sigma}},$$

что и доказывает требуемое равенство. Если теперь $\varphi = (\varphi_\alpha)$ — произвольный элемент в Φ, то при любом $a_\beta \in G_\beta$ будет $a_\beta s_\sigma^{-1} \varphi s_\sigma = a_\beta \varphi_\alpha^{(\tau^*_\alpha)^{-1} \tau^*_{\alpha \circ \sigma}}$, где $\beta \circ \sigma^{-1} = \alpha$, и поэтому

$$s_\sigma^{-1} \varphi s_\sigma = \left(\varphi_\alpha^{(\tau^*_\alpha)^{-1} \tau^*_{\alpha \circ \sigma}} \right).$$

Отсюда, во-первых, следует, что подгруппа Φ инвариантна относительно S. Кроме того, отсюда же следует, что группу ΦS можно рассматривать как сплетение групп Φ_1 и S.

Теперь будем показывать, что проекция Γ относительно G принадлежит произведению ΦS.

Пусть σ — произвольный элемент в Γ, и $a_\alpha \in G_\alpha$, $a_\alpha = a_1 \circ \tau_\alpha$. Ясно, что при некотором $\psi = \psi(\alpha, \sigma) \in \Sigma_1$ выполняется равенство $\tau_\alpha \sigma = \psi \tau_{\alpha \circ \sigma}$.

Теперь имеем:

$$a_* \circ \sigma = a_1 \circ \tau_\alpha \sigma = a_1 \circ \psi \tau_{\alpha \circ \sigma} = a_1 \circ \tau_\alpha \tau_\alpha^{-1} \psi \tau_\alpha \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma} =$$
$$= a_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1} \psi \tau_\alpha \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma}.$$

Введем дальше автоморфизм $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\sigma)$ по правилу

$$a_\alpha \bar{\psi} = a_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1} \psi \tau_\alpha, \quad a_\alpha \in G_\alpha, \quad \alpha \in I.$$

Понятно, что $\tau_\alpha^{-1} \psi \tau_\alpha \in \Sigma_\alpha$, и поэтому $\bar{\psi}$ — элемент в Φ. Возвращаясь к элементу $a_\alpha \circ \sigma$, получаем:

$$a_\alpha \circ \sigma = (a_\alpha \bar{\psi}) \circ \tau_\alpha^{-1} \tau_{\alpha \circ \sigma} = a_\alpha \bar{\psi} s_\sigma,$$

что и требовалось.

Из этих выкладок видно, что отображение $\sigma \to \bar{\psi}(\sigma) s_\sigma$ можно также рассматривать как мономиальное представление группы Γ.

Если допустить еще, что сама группа Γ является (истинной) группой автоморфизмов Ω-группы G, то в предыдущих условиях будет $\sigma = \bar{\psi} s_\sigma$ и $\Gamma \subset \Phi S$.

По поводу приведенных сейчас выкладок полезно еще заметить следующее. Как мы знаем (п. 2.1.4), для группы Γ, ее подгруппы Σ и системы представителей B определено изоморфное вложение Γ в сплетение групп Σ и S — в полупрямое произведение $\Sigma^I \leftthreetimes S$. С другой стороны, произведение $\Sigma^I \leftthreetimes S$ естественным образом отображается гомоморфно на (эпиморфно) группу ΦS. Такой гомоморфизм и приводит к рассмотренному сейчас гомоморфизму группы Γ в группу ΦS. Мы предпочли, однако, проведение независимых выкладок.

Итак, разобран случай, когда пара (I, Γ) транзитивна. Если пара (I, Γ) не является транзитивной, то разобьем множество I на Γ-траектории вида $\alpha \circ \Gamma$, $\alpha \in I$, и пусть $G_{\alpha \circ \Gamma}$ обозначает сумму всех $G_{\alpha \circ \sigma}$ по всем $\sigma \in \Gamma$. Мы получим разложение $G = \sum G_{\alpha \circ \Gamma}$. Обозначим еще через $\Gamma_{\alpha \circ \Gamma}$ проекцию группы Γ относительно $G_{\alpha \circ \Gamma}$. Ясно, что группа $\Gamma_{\alpha \circ \Gamma}$ подчиняется разобранному случаю, а группа Γ, если она действует точно, содержится в полном прямом произведении всех $\Gamma_{\alpha \circ \Gamma}$.

Предположим дальше, что для импримитивной группы Γ автоморфизмов Ω-группы G существует такое разложение $G = \sum G_\alpha$, $\alpha \in I$, на слагаемые, являющиеся системами импримитивности группы Γ, которое дальше нельзя про-

должить с сохранением указанного свойства. Покажем, что для такого неприводимого разложения все группы Φ_α уже примитивны. Сделаем это для Φ_1, причем достаточно ограничиться транзитивным случаем. Допустим, что Φ_1 импримитивна, и пусть $G_1 = \sum G_{1\beta}$, $\beta \in I'$, — соответствующее разложение Ω-группы G_1. Этому разложению отвечают разложения $G_\alpha = \sum G_{1\beta}\tau_\alpha$ для различных $\alpha \in I$ (мы пользуемся старыми обозначениями). Так как каждый $\tau_\alpha\sigma$, $\sigma \in \Gamma$, представим в виде $\tau_\alpha\sigma = \psi\tau_{\alpha\circ\sigma}$, $\psi \in \Sigma_1$, то очевидно, что получаемое теперь уплотнение исходного разложения снова является разложением на системы импримитивности группы Γ. Это противоречит условию, и следовательно, Φ_1 — примитивная группа. По такой же причине все Φ_α примитивны.

Поэтому, в частности, если *группа G удовлетворяет условию минимальности для идеалов, то рассмотренная конструкция позволяет сводить изучение импримитивных групп автоморфизмов такой группы G к примитивным группам.*

4. Группа всех автоморфизмов вполне приводимой Ω-группы. Пусть G — вполне приводимая Ω-группа, Γ — группа всех ее автоморфизмов: $\Gamma = \mathfrak{A}(G)$, и пусть еще $G = \sum G_\alpha$, $\alpha \in I$, — разложение группы G на однородные компоненты. Все эти G_α являются характеристическими подгруппами, и поэтому группа Γ представима в виде полного прямого произведения групп $\Gamma_\alpha = \mathfrak{A}(G_\alpha)$. Это обстоятельство показывает, что достаточно ограничиться случаем однородных вполне приводимых групп.

Рассмотрим случай однородной вполне приводимой группы без центра. Такая группа однозначно раскладывается в прямую сумму изоморфных минимальных идеалов. Если $G = \sum G_\alpha$, $\alpha \in I$, — такое разложение, то очевидно, что слагаемые G_α составляют систему импримитивности группы Γ, причем Γ на множестве I действует транзитивно. Используя результат предыдущего пункта и тот факт, что группа Γ исчерпывает всю группу $\mathfrak{A}(G)$, получаем $\Gamma = \Phi S$. Здесь S — группа, изоморфная группе всех подстановок множества I, и Φ — полное прямое произведение изоморфных между собой групп $\mathfrak{A}(G_\alpha)$, где G_α — всевозможные минимальные идеалы в G.

Приведенными замечаниями можно воспользоваться, в частности, для описания группы автоморфизмов прямой суммы полей (ср. п. 1.2.5).

В заключение заметим, что некоторые конструкции этого параграфа, вероятно, могут быть обобщены и на тот случай, когда вместо прямых разложений за исходные принимаются некоторые другие типы разложений Ω-групп. Интересно было бы также рассмотреть соответствующие обобщения для групп автоморфизмов произвольных универсальных алгебр.

§ 3. СТАБИЛЬНОСТЬ И ОТНОСЯЩИЕСЯ К НЕЙ РАДИКАЛЫ

1. Финитная стабильность. γ-радикал. Раньше уже было определено понятие стабильности действующей группы. Стабильную группу назовем *финитно стабильной*, если в области действия G имеется конечный стабильный относительно Γ ряд. Как уже отмечалось, если пара (G, Γ) является точной, то финитная стабильность, которая, очевидно, выглядит, как внешняя нильпотентность группы Γ, влечет внутреннюю (абстрактную) нильпотентность этой группы.

Определим теперь понятие Γ-*коммутанта* Ω-группы G. Если (G, Γ) — некоторая пара, то Γ-коммутантом Ω-группы G называется пересечение всех допустимых идеалов H из G, в фактор-группах по которым группа Γ действует тождественно. Легко видеть, что Γ-коммутант Ω-группы G может быть определен также как идеал, порожденный всевозможными коммутаторами вида $[g, \sigma] = -g + g\circ\sigma$, $g \in G$, $\sigma \in \Gamma$. Обозначается Γ-коммутант через $[G, \Gamma]$. В фактор-группе $G/[G, \Gamma]$ группа Γ также действует тождественно. Отправляясь от Γ-коммутанта в G, мы можем определить *нижний Γ-стабильный ряд*:

$$G = [G, \Gamma; 0] \supset [G, \Gamma; 1] \supset \ldots, \quad [G, \Gamma; \alpha + 1] = [[G, \Gamma; \alpha], \Gamma].$$

На предельных местах, как обычно, стоят пересечения предыдущих членов.

Очевидно, следующее утверждение: группа Γ тогда и только тогда финитно стабильна, когда нижний

Г-стабильный ряд в G на некотором конечном шаге доходит до нуля.

Мы заметим еще, что Г-коммутант $[G, \Gamma]$ является Г-характеристической Ω-подгруппой в G. Действительно, пусть пара (G, Γ) содержится в паре (G, Φ), причем Г — нормальный делитель в Ф. Понятно, что при каждом $\varphi \in \Phi$ пары $(G/[G, \Gamma], \Gamma)$ и $(G/[G, \Gamma]\circ\varphi, \Gamma)$ изоморфны. Следовательно, $[G, \Gamma] \subset [G, \Gamma]\circ\varphi$. Аналогично, с помощью обратного отображения, устанавливается противоположное включение.

По индукции устанавливается, что все члены нижнего Г-стабильного ряда в G являются Г-характеристическими Ω-подгруппами.

Нам понадобится дальше следующая лемма:

1.1. *Если* Σ_1 *и* Σ_2 — *две финитно стабильные подгруппы в* Г *и одна из них, например* Σ_1, *инвариантна относительно другой, то и произведение* $\Sigma_1\Sigma_2$ *также является финитно стабильной подгруппой.*

Возьмем в G нижний Σ_1-стабильный ряд:

$$G=[G, \Sigma_1; 0]\supset[G, \Sigma_1; 1]\supset\ldots\supset[G, \Sigma_1; i]\supset$$
$$\supset[G, \Sigma_1; i+1]\supset\ldots\supset[G, \Sigma_1; n]=0.$$

Этот ряд при некотором n доходит до нуля группы G, и все его члены Σ_2-допустимы. Так как Σ_2 — финитно стабильная группа, то, очевидно, и в каждом факторе $[G, \Sigma_1; i]/[G, \Sigma_1; i+1]$ группа Σ_2 действует как финитно стабильная группа. Отсюда следует, что приведенный выше ряд можно уплотнить до конечного Σ_2-стабильного ряда. Такой новый ряд будет стабильным и относительно $\Sigma_1\Sigma_2$, что и доказывает, что произведение $\Sigma_1\Sigma_2$ — финитно стабильная группа.

Имеет место следующая теорема:

1.2. *В произвольной действующей группе* Г *имеется локально финитно стабильный радикал.*

Перед тем, как доказать эту теорему, рассмотрим два вспомогательных предложения. Оба эти предложения будут нужны нам и в дальнейшем.

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа и A и B — ее подгруппы. Будем говорить, что пара (A, B) является *локально ограниченной парой*, если 1) подгруппа A инвариантна относи-

тельно B; 2) B индуцирует в A (через внутренние автоморфизмы) локально ограниченную группу автоморфизмов.

1.3. *Если (A, B) — локально ограниченная пара подгрупп группы $\mathfrak{G}$, то в подгруппе $C = AB$ имеется локальная система из подгрупп вида $C_\alpha = A_\alpha B_\alpha$, где $A_\alpha \subset A$, $B_\alpha \subset B$, A_α и B_α имеют конечное число образующих и A_α инвариантна относительно B_α.*

Назовем на время доказательства всякую подгруппу $C_\alpha \subset C$, обладающую разложением, удовлетворяющим условиям леммы, хорошей. Пусть $\mathfrak{M} = [C'_\alpha]$ — локальная система из всех подгрупп с конечным числом образующих в C. Пусть еще $\mathfrak{N}$ — подмножество в $\mathfrak{M}$, состоящее из всех хороших подгрупп группы C. Покажем, что каждая подгруппа из $\mathfrak{M}$ принадлежит некоторой подгруппе из $\mathfrak{N}$. Возьмем одну из таких подгрупп C'_α и выберем в ней конечную систему образующих c_1, $c_2, \ldots, c_n$ (индекс α мы опускаем). Каждый элемент c_i может быть представлен в виде $c_i = a_i b_i$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$. Пусть $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B_\alpha = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Обозначим, далее, через A_α минимальную B_α-инвариантную подгруппу, содержащую A': $A_\alpha = \{a_1^{B_\alpha}, a_2^{B_\alpha}, \ldots, a_n^{B_\alpha}\}$. В силу условия 2) определения локально ограниченной пары, подгруппа A_α имеет конечное число образующих. Таким образом, подгруппа $C_\alpha = A_\alpha B_\alpha$ является хорошей и содержит C'_α. Покажем теперь, что $\mathfrak{N}$ является локальной системой в C. То, что $\mathfrak{N}$ покрывает C, очевидно. Пусть теперь C_α и C_β — две подгруппы из системы $\mathfrak{N}$. Так как они порождают подгруппу с конечным числом образующих, то обе они принадлежат некоторой подгруппе из $\mathfrak{M}$, а последняя в свою очередь содержится в некоторой хорошей подгруппе. Этим лемма доказана.

1.4. *Если A и B — нормальные делители группы $\mathfrak{G}$, причем B локально нетеров, то пара (A, B) является локально ограниченной парой.*

Достаточно показать, что внутренняя (определенная через внутренние автоморфизмы) пара $(\mathfrak{G}, B)$ является локально ограниченной. Пусть $g \in \mathfrak{G}$ и пусть еще $Y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — конечное симметрическое множество (т. е. содержащее с каждым b_i и элемент b_i^{-1}) элементов в B. Обозначим через C подгруппу в $\mathfrak{G}$, порожденную всеми

этими b_i и всеми элементами вида $[g, b_i]$. Эта подгруппа содержится, очевидно, в B и поэтому является нетеровой группой. Следовательно, подгруппа, порожденная всевозможными сложными коммутаторами вида

$$[g; b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}],\ i_j = 1, 2, \ldots, n,\ k \geqslant 1$$

(она содержится в C), имеет конечное число образующих. Присоединяя к последней подгруппе элемент g, мы также получим подгруппу с конечным числом образующих. Кроме того, эта подгруппа будет минимальной $\{Y\}$-инвариантной подгруппой, содержащей элемент g.

Переходя к доказательству теоремы 1.2, напомним, что локально финитно стабильная группа — это такая действующая группа, в которой каждая подгруппа с конечным числом образующих финитно стабильна. Так как объединение возрастающей последовательности локально финитно стабильных подгрупп группы Γ — снова такая же подгруппа, то достаточно проверить, что произведение двух локально финитно стабильных нормальных делителей из Γ также локально финитно стабильный нормальный делитель.

Пусть Σ и Φ — такие нормальные делители. Обозначим через $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Sigma\Phi}$ образы Σ, Φ и $\Sigma\Phi$ в группе всех автоморфизмов Ω-группы G. Ясно, что $\overline{\Sigma\Phi} = \overline{\Sigma}\,\overline{\Phi}$ и что группа $\Sigma\Phi$ тогда и только тогда локально финитно стабильна, когда $\overline{\Sigma\Phi}$ — локально финитно стабильная группа автоморфизмов. Поэтому достаточно установить локальную финитную стабильность группы $\overline{\Sigma}\overline{\Phi}$.

Обе группы $\overline{\Sigma}$ и $\overline{\Phi}$, как абстрактные группы, локально нильпотентны. Следовательно, локально нильпотентна и группа $\overline{\Sigma}\,\overline{\Phi}$ (см. п. 5. 2. 1). Так как всякая локально нильпотентная группа является локально нетеровой, то подгруппы $\overline{\Sigma}$ и $\overline{\Phi}$ составляют локально ограниченную пару. С помощью леммы 1.3 мы заключаем, что в группе $\overline{\Sigma}\,\overline{\Phi}$ имеется локальная система из подгрупп $\Gamma_\alpha = \Sigma_\alpha\Phi_\alpha$ таких, что Σ_α и Φ_α имеют конечные системы образующих, $\Sigma_\alpha \subset \overline{\Sigma}$, $\Phi_\alpha \subset \overline{\Phi}$ и Σ_α — нормальный делитель в Γ_α. Так как Σ_α и Φ_α имеют конечные системы

образующих и содержатся в локально финитно стабильных подгруппах, то обе эти подгруппы финитно стабильны.

По лемме 1.1 $\sum_\alpha \Phi_\alpha$ — финитно стабильная подгруппа. Следовательно, $\sum\Phi$ — локально финитно стабильная подгруппа.

Локально финитно стабильный радикал группы Γ будем обозначать через $\gamma_G(\Gamma)$. Рассмотрим сейчас одну новую характеристику этого радикала.

Элемент $\sigma \in \Gamma$ назовем *финитно стабильным элементом*, если в G имеется конечный нормальный σ-допустимый ряд, во всех факторах которого этот элемент действует тождественно. Можно также сказать, что финитно стабильный элемент — это такой элемент, который порождает финитно стабильную циклическую подгруппу. Обозначим дальше через $\tilde{R}(\Gamma)$ полный прообраз в Γ локально нильпотентного радикала (см. п. 5.2.1) проекции Γ относительно G. Справедлива следующая теорема:

1.5. *Локально финитно стабильный радикал $\gamma_G(\Gamma)$ совпадает с совокупностью всех финитно стабильных элементов из $\tilde{R}(\Gamma)$.*

Пусть X — множество всех финитно стабильных элементов из $\tilde{R}(\Gamma)$. Это множество инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы Γ. Очевидно также, что $\gamma_G(\Gamma) \subset X$. Поэтому теорема будет доказана, если мы покажем, что подгруппа $\{X\}$, порожденная этим подмножеством, локально финитно стабильна. Пусть X_0 — конечное подмножество в X, Σ — подгруппа в Γ, порожденная этим подмножеством, и $\bar{\Sigma}$ — проекция Σ относительно G. Ясно, что финитная стабильность Σ равносильна финитной стабильности $\bar{\Sigma}$. Покажем, что $\bar{\Sigma}$ — финитно стабильная группа. Эта группа нильпотентна (как абстрактная группа) и порождается конечным множеством $\bar{X}_0$ финитно стабильных элементов. Воспользуемся уже применявшейся техникой. Если $\bar{x} \in \bar{X}_0$, то циклическая подгруппа $\{\bar{x}\}$ финитно стабильна. Пусть S — некоторая максимальная финитно стабильная подгруппа в $\bar{\Sigma}$, содержащая подгруппу $\{\bar{x}\}$. Такая существует, так как $\bar{\Sigma}$ — нетерова группа. В силу

леммы 1.1, подгруппа S инвариантна во втором нормализаторе $N(N(S))$, и ввиду нормализаторного условия в $\bar{\Sigma}$ она инвариантна в $\bar{\Sigma}$. Но тогда S должна содержать все множество $\bar{X}_0$, и поэтому $S = \bar{\Sigma}$. Отсюда следует, что $\bar{\Sigma}$, а следовательно, и Σ — финитно стабильные группы. Так как подгруппы типа Σ составляют в $\{X\}$ локальную систему, то $\{X\}$ — локально финитно стабильная группа.

2. Одно замечание о локальной ограниченности представления. В дальнейшем нам понадобится следующее предложение:

2.1. *Если* (G, Γ) — *некоторая пара и в* Ω-*группе* G *имеется возрастающий допустимый нормальный ряд, во всех факторах которого группа* Γ *действует как локально ограниченная группа, то исходная пара* (G, Γ) *также является локально ограниченной парой.*

Вначале отметим следующий простой признак ограниченного множества элементов действующей группы.

Пусть $a \in G$, где G — вообще даже алгебра (Ω-алгебра) и $Y = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — конечное подмножество в Γ, порождающее подгруппу Σ. Пусть еще Σ_k — множество всевозможных элементов вида $\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}\ldots\sigma_{i_s}^{\varepsilon_s}$, где $\varepsilon_j = \pm 1$ и σ_{i_j} — возможно повторяющиеся элементы из Y, а $s \leqslant k$.

Обозначим через $\{a \circ \Sigma_k\}$ подалгебру в G, порожденную элементом a и элементами вида $a \circ \sigma$, $\sigma \in \Sigma_k$. Мы получим возрастающую последовательность подалгебр

$$\{a \circ \Sigma_1\} \subset \{a \circ \Sigma_2\} \subset \ldots \subset \{a \circ \Sigma_k\} \subset \ldots$$

Все члены этой последовательности имеют конечное число образующих, а их объединение совпадает с $\{a \circ \Sigma\}^{\Omega}$. Требование, чтобы подалгебра $\{a \circ \Sigma\}^{\Omega}$ имела конечное число образующих, равносильно тому, что при некотором s будет $\{a \circ \Sigma_s\} = \{a \circ \Sigma_{s+1}\}$. Это также означает, что каждый элемент $a \circ \sigma$, $\sigma \in \Sigma_{s+1}$, может быть представлен в виде $a \circ \sigma = (a \circ \bar{\sigma}_1)(a \circ \bar{\sigma}_2)\ldots(a \circ \bar{\sigma}_n)\,\omega$, где $\omega \in \bar{\Omega}$ и все $\bar{\sigma}_i$ принадлежат Σ_s. Последнее свойство и можно было бы принять за определение ограни-

ченного множества Y, заметив, что s зависит от Y и от a.

Опираясь на отмеченный факт, докажем теперь, что если Y — произвольное конечное подмножество в Γ, G — Ω-группа и H — Γ-допустимый идеал в G такой, что в H и G/H множество Y действует как ограниченное множество, то и во всей Ω-группе G Y действует как ограниченное множество.

Пусть $\Sigma = \{Y\}$, и Σ_k — такие же, как выше, а $\{a \circ \Sigma_k\}$ — соответствующие Ω-подгруппы в G. Можно предполагать, что a не принадлежит H. Через $\bar{a}$ обозначим образ a в G/H. Из условия следует, что найдется такое m, что $\{\bar{a} \circ \Sigma_m\} = \{\bar{a} \circ \Sigma\}$.

Пусть $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_l$ — всевозможные элементы из Σ_{m+1}. Для каждого $\bar{\sigma}_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, элемент $a \circ \bar{\sigma}_i$ представим в виде $a \circ \bar{\sigma}_i = h_i + x_i$, где $h_i \in H$ и $x_i \in \{a \circ \Sigma_m\}$. Так как $h_i = a \circ \bar{\sigma}_i - x_i$, то $h_i \in \{a \circ \Sigma_{m+1}\}$. Из того, что $h_i \in H$, следует, что найдется такое s_i, что $\{h_i \circ \Sigma_{s_i - 1}\} = \{h_i \circ \Sigma\}$. Мы получим $\{h_i \circ \Sigma_{s_i}\} \subset \{a \circ \Sigma_{m+s_i}\}$. Пусть $s = \max s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ и пусть σ — произвольный элемент из Σ_s. Тогда

$$a \circ \bar{\sigma}_i \sigma = h_i \circ \sigma + x_i \circ \sigma \in \{a \circ \textstyle\sum_{m+s}\}.$$

Но $\bar{\sigma}_i \sigma$ — произвольный элемент из Σ_{m+s+1}. Таким образом, установлено включение $\{a \circ \Sigma_{m+s+1}\} \subset \{a \circ \Sigma_{m+s}\}$, т. е. $\{a \circ \Sigma_{m+s}\} = \{a \circ \Sigma\}$, что и доказывает отмеченное свойство.

Теперь уже легко доказать и 2.1. Пусть ряд

$$0 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = G$$

удовлетворяет условиям предложения, Y — конечное подмножество в Γ и $a \in G$. Если $a \in H_1$, то ясно, что при некотором s будет $\{a \circ \Sigma_s\} = \{a \circ \Sigma_{s+1}\}$. Применяем индукцию. Пусть это уже верно для a, лежащих во всех H_β с $\beta < \gamma$. Если γ — предельное, то каждый $a \in G$ принадлежит некоторой H_β, $\beta < \gamma$, и этот случай очевиден. Для непредельного γ можно воспользоваться предыдущими замечаниями при $H = H_{\gamma-1}$. Этим устанавливается, что Y — ограниченное множество, что и требовалось.

3. Квазистабильность. β-радикал. Согласно предыдущему действующая группа Γ называется *квазифинитно стабильной*, если пара (G, Γ) обладает локальной системой подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ таких, что каждый раз Γ_α финитно стабильна относительно G_α. Всякая локально финитно стабильная действующая группа является, очевидно, квазифинитно стабильной, а такие группы в свою очередь являются локально относительно нильпотентными группами в смысле п. 2.4.4. Поэтому в случае точного представления квазифинитно-стабильная группа, рассматриваемая абстрактно, обладает центральной системой.

Группа Γ называется *квазистабильной*, если пара (G, Γ) обладает локальной системой из подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, в которых группа Γ_α действует стабильно относительно G_α. Из предыдущего пункта непосредственно следует, что квазистабильные группы являются локально ограниченными группами. В седьмой главе будет также показано, что всякая точная квазистабильная действующая группа обладает центральной системой. Покажем, что

3.1. *Если в паре (G, Γ) Ω-группа G является локально нетеровой Ω-группой, то квазистабильность* Γ *равносильна квазифинитно стабильности.*

Пусть (H, Σ) — подпара в квазистабильной паре (G, Γ), имеющая конечную систему образующих. Так как пара (G, Γ) локально ограничена, то Ω-группа H имеет конечное число образующих и, следовательно, является нетеровой. В нетеровой Ω-группе все возрастающие ряды имеют конечную длину, так что из стабильности пары (H, Σ) вытекает ее финитная стабильность. Итак, все подпары из (G, Γ), имеющие конечные системы образующих, финитно стабильны. Этим утверждение доказано.

Без дополнительных предположений этот факт не имеет места, и соответствующий пример будет позднее рассмотрен. С другой стороны, отмеченное свойство применимо, например, к случаю, когда G — векторное пространство.

Как показывают примеры, даже для векторного пространства G действующая на нем группа Γ может

не иметь квази(финитно)стабильного радикала. Сейчас мы приведем два случая, когда такой радикал существует.

3.2. *Если пара* (G, Γ) *является локально ограниченной парой и* G — *локально нетерова* Ω-*группа, то в* Γ *имеется квази(финитно)стабильный радикал.*

Достаточно показать, что в рассматриваемом случае произведение двух квазистабильных нормальных делителей из Γ есть снова квазистабильный нормальный делитель. Пусть Σ и Φ — два таких нормальных делителя в Γ. В группе $\Sigma\Phi$ имеется, очевидно, локальная система из подгрупп с конечным числом образующих вида $\Gamma_\alpha = \Sigma_\alpha\Phi_\alpha$, где $\Sigma_\alpha = \Sigma \cap \Gamma_\alpha$ и $\Phi_\alpha = \Phi \cap \Gamma_\alpha$. Допустим дальше, что X — произвольное конечное подмножество в G, и H — Ω-подгруппа в G, порожденная множеством $X \circ \Gamma_\alpha$ при некоторой Γ_α. Эта подгруппа H является нетеровой Ω-группой. Ясно, что всякая квазифинитно стабильная относительно H действующая группа является локально финитно стабильной группой, так что Σ_α и Φ_α локально финитно стабильны относительно H. По доказанной раньше теореме группа $\Gamma_\alpha = \Sigma_\alpha\Phi_\alpha$ также локально финитно стабильна относительно H. Но так как Γ_α имеет конечное число образующих, то такая группа финитно стабильна относительно H. Следовательно, в $(G, \Sigma\Phi)$ имеется локальная система из финитно стабильных подпар, что и требовалось.

Второй случай состоит в следующем:

3.3. *Если в паре* (G, Γ) Ω-*группа* G *и группа* Γ *локально нетеровы, то в* Γ *имеется квазистабильный радикал.*

Пусть Σ и Φ — два квазистабильных нормальных делителя в Γ. Так как группа Γ локально нетерова, то в $\Sigma\Phi$ имеется локальная система подгрупп вида $\Sigma_\alpha\Phi_\alpha$, где $\Sigma_\alpha \subset \Sigma$, $\Phi_\alpha \subset \Phi$, Σ_α, Φ_α с конечным числом образующих и обе инвариантны в $\Sigma_\alpha\Phi_\alpha$. Фиксируем одну такую подгруппу $\Sigma_\alpha\Phi_\alpha$ и покажем, что эта подгруппа квазистабильна. Пусть X — произвольное конечное подмножество в G и H — Ω-подгруппа, порожденная множеством $X \circ \Sigma_\alpha$. Так как Σ — локально ограниченная группа, то H — нетерова Ω-группа. Допустим, что Y — некоторая конечная система образующих в H, и пусть

F — Ω-подгруппа в G, порожденная множеством $Y \circ \Phi_\alpha$. Ясно, что $H \subset F$ и F — нетерова Ω-группа. Кроме того, легко заметить, что F допустима относительно произведения $\Sigma_\alpha \Phi_\alpha$. Теперь, аналогично тому как это было в предыдущей теореме, заключаем, что группа $\Sigma_\alpha \Phi_\alpha$ локально финитно стабильна относительно F, и следовательно, пара $(F, \Sigma_\alpha \Phi_\alpha)$ финитно стабильна. Но тогда пара $(G, \Sigma\Phi)$ квазифинитно стабильна, и утверждение доказано.

В дальнейшем мы увидим, что в случае, когда G — группа с пустым Ω, в приведенных теоремах требование локальной нетеровости G может быть отброшено. Всюду дальше квазистабильный радикал действующей группы Γ будем обозначать через $\beta_G(\Gamma)$. Если этот радикал не существует, то $\beta_G(\Gamma)$ — это просто подгруппа в Γ, порожденная всеми ее квазистабильными нормальными делителями. Ясно, что всегда $\gamma_G(\Gamma) \subset \beta_G(\Gamma)$.

Мы пока еще ничего не говорили о свойстве «локальная стабильность». Одно замечание по поводу этого свойства будет сделано в следующем пункте, а подробнее оно будет рассмотрено в седьмой главе.

4. О нильмножествах в действующей группе. Пусть (G, Γ) — пара с Ω-группой G и пусть $g \in G$, $\sigma \in \Gamma$. Как и раньше, обозначим $[g, \sigma] = -g + g \circ \sigma$. Элемент $[g, \sigma]$ называется *коммутатором*, составленным из g и σ. Соответственно определяются сложные коммутаторы:

$$[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n] = [[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}], \sigma_n].$$

Если здесь, в частности, σ — внутренний автоморфизм аддитивной группы G, то получаются обычные коммутаторы элементов области действия.

Пусть теперь Σ — некоторое множество элементов из Γ. Это множество, в частности, может состоять из одного элемента, а также может совпадать и со всей группой Γ. Множество Σ называется *нильмножеством*, если для любого $g \in G$ найдется подходящее натуральное число $n = n(g, \Sigma)$, такое, что все сложные коммутаторы вида $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, где $\sigma_i \in \Sigma$, равны нулю группы G. Множество Σ называется *нильпотентным* (или, точнее, *унипотентным*), если для всех $g \in G$ суще-

ствует общее $n = n(\Sigma)$. Если множество Σ состоит из одного элемента σ, то соответственно получаем определения *внешнего нильэлемента* и *внешне нильпотентного (унипотентного) элемента* действующей группы. В том случае, когда Γ есть истинная группа автоморфизмов Ω-группы G, внешние нильэлементы из Γ называются еще *нильавтоморфизмами*.

Определим теперь параллельные понятия для представлений Ω-почти колец. Пусть задан обобщенный модуль (G, K), состоящий из Ω-группы G и Ω-почти кольца с единицей K, и пусть Φ — некоторое подмножество в K. Φ называется *нильмножеством*, если для любого $g \in G$ найдется такой показатель n, что произведение любых n элементов из Φ принадлежит аннулятору элемента g. Как обычно, множество Φ *нильпотентно*, если для некоторого n произведение любых n элементов из Φ есть нуль в K.

Пусть теперь пара (G, Γ) содержится в точном модуле (G, K) и пусть Σ — подмножество в Γ, $-\varepsilon + \Sigma$ — подмножество в K, состоящее из всех элементов вида $-\varepsilon + \sigma$, $\sigma \in \Sigma$.

Очевидно следующее утверждение:

4.1. *Множество Σ тогда и только тогда является нильмножеством или нильпотентно, когда $-\varepsilon + \Sigma$ — соответственно нильмножество или нильпотентно как подмножество Ω-почти кольца K.*

Дальше мы рассматриваем только пары (G, Γ).

Легко доказывается следующее свойство:

4.2. *Всякое конечное нильмножество из Γ является ограниченным множеством.*

Вначале заметим, что если H — Ω-подгруппа в G, то для всякого внешнего нильэлемента σ из Γ включение $H \circ \sigma \subset H$ влечет совпадение $H \circ \sigma = H$. Пусть $H \circ \sigma \subset H$ и $h \in H$. Нужно показать, что $h \circ \sigma^{-1} \in H$. С этой целью обозначим $h = h_0$, $h_1 = [h_0, \sigma]$, ..., $h_{i+1} = [h_i, \sigma]$. Допустим, что $h_{n+1} = -h_n + h_n \circ \sigma = 0$. Существование такого n вытекает из того, что σ является внешним нильэлементом. Теперь имеем $h_n \circ \sigma = h_n$ и $h_n \circ \sigma^{-1} = h_n$. Применим индукцию. Пусть уже доказано, что $h_{i+1} \circ \sigma^{-1} \in H$. Применяя σ^{-1} к обеим частям равенства $h_{i+1} = -h_i + h_i \circ \sigma$, получим $h_{i+1} \circ \sigma^{-1} = -h_i \circ \sigma^{-1} + h_i$.

Отсюда $h_i \circ \sigma^{-1} \in H$. При $i = 0$ мы получим требуемое включение.

Пусть дальше Σ — произвольное конечное нильмножество в Γ, g — некоторый элемент в G. Пусть еще $[g, \Sigma]$ — *Σ-нильтраектория* элемента g, т. е. подмножество в G, состоящее из элемента g и всевозможных сложных коммутаторов $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$, $\sigma_i \in \Sigma$. Обозначим, далее, через H Ω-подгруппу в G, порожденную (конечным) множеством $[g, \Sigma]$. Легко видеть, что для $\sigma \in \Sigma$ $H \circ \sigma \subset H$, а ввиду предыдущих замечаний $H \circ \sigma = H$, так что H — $\{\Sigma\}$-допустимая Ω-подгруппа, и потому $H = \{g \circ \{\Sigma\}\}^{\Omega}$. Этим доказано, что Σ — ограниченное множество.

4.3. *Если группа Γ квазистабильна, то каждое конечное подмножество из Γ является нильмножеством.*

Это утверждение достаточно проверить для стабильной группы. Пусть Y — конечное подмножество в Γ, $\Sigma = \{Y\}$, и пусть ряд $0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \ldots \subset G_\gamma = G$ является стабильным относительно Σ рядом. Нужно показать, что для каждого $g \in G$ найдется такое $n = n(g, Y)$, что все сложные коммутаторы вида $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, $\sigma_i \in Y$, обращаются в нуль. Этот факт очевиден для g, принадлежащих G_1. Применим дальше индукцию. Пусть утверждение уже доказано для всех g, принадлежащих каждому G_α при $\alpha < \beta$. В случае предельного β сразу же получаем справедливость соответствующего свойства и для G_β. Допустим теперь, что β — непредельное число, и пусть $g \in G_\beta$. Все элементы $[g, \sigma_i]$ по всем $\sigma_i \in Y$ принадлежат $G_{\beta-1}$, и для каждого из них найдется n_i такое, что $[[g, \sigma_i], \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_i}] = 0$ при любых $\sigma_j \in Y$. При этом для $n = \max\limits_{\sigma_i \in Y} n_i + 1$ все $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, $\sigma_i \in Y$, обращаются в нуль, так что индукция проходит, и утверждение доказано.

Интересно отметить, что для абелевой Ω-группы G справедливо и обратное утверждение.

Прежде всего, отметим, что если G — абелева Ω-группа, то для любого подмножества $Y \subset \Gamma$ можно говорить о *верхнем стабильном ряде* в G. Пусть $A_0 = 0$ и $A_1 = Z_G(Y)$ — Y-центр в G. Так как G абелева, то A_1 — идеал, и можно перейти к фактор-группе G/A_1.

Дальше определяем индуктивно: $A_{\alpha+1}/A_\alpha = Z_{G/A_\alpha}(Y)$, а на предельных местах берутся объединения предыдущих членов. Все эти A_α являются характеристическими Ω-подгруппами относительно подгруппы Σ, порожденной множеством Y. Объединение всех A_α мы назовем *верхним Y-центром* Ω-группы G и обозначим его через $\tilde{Z}_G(Y)$. Ясно, что $\tilde{Z}_G(Y) = \tilde{Z}_G(\{Y\})$.

4.4. *Пусть H — подгруппа аддитивной части абелевой Ω-группы G, порождающая всю Ω-группу G, и пусть Σ — подгруппа в Γ такая, что H — Σ-допустима. Тогда, если Σ порождается некоторым H-нильмножеством Y, то верхний Σ-стабильный ряд в G доходит до всей Ω-группы G.*

Для доказательства допустим, что $\tilde{Z}_G(\Sigma) = A \neq G$. В этом случае H не может содержаться в A, и пусть $h \in H$, $h \overline{\in} A$. Для этого h можно указать такое первое k, что сложные коммутаторы вида $[h; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$, $\sigma_i \in Y$, принадлежат A. Если теперь $h' = [h; \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_{k-1}}]$ не принадлежит A, то смежный класс $h' + A$ является Σ-неподвижным элементом в G/A. Это противоречит максимальности A, и следовательно, $A = G$.

Можно даже заметить, что длина верхнего Σ-стабильного ряда в G не превосходит первого предельного числа.

Действительно, пусть g — произвольный элемент в G. Назовем Y-порядком этого элемента такое наименьшее число n, что $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n] = 0$ при всех $\sigma_i \in Y$. Пусть теперь G_n — n-й член верхнего Y-стабильного ряда в G. Непосредственно видно, что всякий элемент из G Y-порядка n принадлежит G_n. Отсюда следует, что объединение всех G_n совпадает с G.

Теперь уже очевидно, что если в Γ все конечные подмножества являются нильмножествами и G абелева, то группа Γ локально стабильна.

Имеет место также следующая теорема:

4.5. *Если в Ω-группе G имеется возрастающий разрешимый нормальный ряд из Γ-допустимых Ω-подгрупп, то группа Γ в том и только в том случае локально стабильна, когда всякое конечное подмножество из Γ является нильподмножеством.*

Пусть ряд $[H_\alpha]$ в G удовлетворяет условиям теоремы, и пусть Σ — подгруппа в Γ, порожденная конечным нильмножеством Y. По предыдущему, группа Σ стабильна относительно каждого $H_{\alpha+1}/H_\alpha$. Отсюда, очевидно, следует, что Σ стабильна и относительно G. Поэтому, если каждое конечное подмножество из Γ является нильподмножеством, то Γ — локально стабильная группа. Обратное уже отмечалось, причем даже для квазистабильности, так как мы видим одновременно, что в рассматриваемой ситуации квазистабильность равносильна локальной стабильности.

5. Отношения между тремя радикалами. Позднее будут приведены примеры, показывающие, что в общем случае $\beta_G(\Gamma)$ и радикал представления $\alpha_G(\Gamma)$ не инцидентны. Сейчас нас будут интересовать условия, при которых такая инцидентность имеет место.

Вначале рассмотрим одно вспомогательное предложение.

5.1. *Пусть (G, Φ) — некоторая пара, и Γ — подгруппа в Φ. Допустим еще, что в (G, Φ) имеется локальная система подпар (G_α, Φ_α) таких, что в G_α имеется стабильная относительно пересечения $\Phi_\alpha \cap \Gamma$ нормальная система Φ_α-допустимых подгрупп. Тогда и в G имеется стабильная относительно Γ система Φ-допустимых Ω-подгрупп.*

Заметим, что если в этом предложении взять в качестве Γ также группу Φ, то получится следующая локальная теорема:

5.2. *Если пара (G, Γ) обладает локальной системой из слабо стабильных подпар, то и сама пара (G, Γ) является слабо стабильной. В частности, всякая квазистабильная пара является слабо стабильной.*

Для доказательства предложения 5.1 запишем некоторым набором формул УИП тот факт, что в G имеется стабильная относительно Γ система Φ-допустимых Ω-подгрупп.

Вначале поступаем так же, как и при доказательстве локальной теоремы из п. 1.1. Основным множеством будут служить индексы членов подходящей нормальной системы. Основные предикаты такие же, как и в п. 1.1,

откуда мы берем и обозначения. Единственное изменение, которое мы сейчас сделаем, состоит в следующем: через $P_{(a_1, a_2, \ldots, a_n;\, b_1, b_2, \ldots, b_n)}(\alpha)$ теперь обозначается предикат, означающий содержательно, что одна из двух групп по n элементов здесь принадлежит H_α, а вторая не принадлежит. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ группу аксиом, означающих, что все H_α являются Ф-допустимыми Ω-подгруппами в G, причем $\alpha < \beta$ влечет $H_\alpha \subset H_\beta$, и $H_{\alpha_0} = 0$, $H_{\alpha_1} = G$. К этой группе аксиом добавим следующие группы аксиом: $\mathfrak{M}_2$) Для всех $a \in G$, $a \neq 0$ и всех $\sigma \in \Gamma$: $(\exists\alpha)[\sim A_a(\alpha) \,\&\, A_{[a,\sigma]}(\alpha)]$; $\mathfrak{M}_3$) Для всех a, $b \in G$: $(\exists\alpha)\, P_{(a;\, b)}(\alpha) \to (\exists\beta)\,(P_{(a;\, b)}(\beta) \,\&\, A_{[a;\, b]}(\beta))$. И, наконец, группа $\mathfrak{M}_4$ состоит из аксиом вида:

$$(\exists\alpha)\, P_{(a_1, a_2, \ldots, a_n;\, b_1, b_2, \ldots, b_n)}(\alpha) \to (\exists\beta)\,(P_{(a_1, a_2, \ldots, a_n;\, b_1, b_2, \ldots, b_n)}(\beta) \,\&\, \\ \& \, A_{[a_1, a_2, \ldots, a_n;\, b_1, b_2, \ldots, b_n;\, \omega]}(\beta)).$$

Эти аксиомы составляем для всех $\omega \in \Omega$ и по всем соответствующим наборам элементов из G.

Аксиомы набора $\mathfrak{M}_2$ означают, что после уплотнения системы Ω-подгрупп H_α будет выполняться условие стабильности относительно Γ. Две последние группы аксиом означают, что уплотненная система является нормальной системой, так что, если обозначить через $\mathfrak{N}$ объединение наборов $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$, то совместность набора $\mathfrak{N}$ и означает, что в G имеется нормальная стабильная относительно Γ система Ф-допустимых Ω-подгрупп.

Легко видеть, что из условий предложения вытекает локальная совместность набора $\mathfrak{N}$. По теореме Гёделя-Мальцева $\mathfrak{N}$ — совместный набор, и предложение доказано.

Теперь докажем следующую теорему:

5.3. *Включение $\beta_G(\Gamma) \subset \alpha_G(\Gamma)$ имеет место в следующих двух случаях:*

1) *Ω-группа G является локально нетеровой, и представление Γ относительно G локально ограничено.*

2) *Пара (G, Γ) является $\overline{RN}$-парой, и группа Γ локально нетерова.*

Пусть $\mathfrak{G}$ обозначает произвольный Γ-композиционный фактор Ω-группы G, и Σ — квазистабильный нормальный делитель в Γ. Чтобы установить требуемое

включение, нужно показать, что каждый раз подгруппа Σ действует тождественно в $\mathfrak{G}$. Рассмотрим дальше отдельно оба случая.

1. Пусть Γ_α — подгруппа в Γ, имеющая конечное число образующих. Так как $\mathfrak{G}$ вместе с G — локально нетерова группа и пара $(\mathfrak{G}, \Gamma)$ локально ограничена, то в $\mathfrak{G}$ имеется локальная система из Γ_α-допустимых нетеровых Ω-подгрупп. Пусть H — одна из таких подгрупп. Пересечение $\Sigma \cap \Gamma_\alpha$ квазистабильно относительно H, а так как H — нетерова Ω-группа, то $\Sigma \cap \Gamma_\alpha$ — локально финитно стабильная относительно H группа. Дальше отметим следующий вспомогательный факт.

Если группа Φ локально финитно стабильна относительно нетеровой Ω-группы H, то нижний Φ-стабильный ряд в H доходит до нуля на некотором, быть может трансфинитном, шаге.

Для доказательства этого утверждения достаточно установить, что группа H отлична от своего Φ-коммутанта. Пусть $[\Phi_\alpha]$ — множество всевозможных подгрупп с конечным числом образующих в Φ. Легко видеть, что система всех идеалов $[H, \Phi_\alpha]$ является локальной системой в Φ-коммутанте $[H, \Phi]$. Так как H — нетерова Ω-группа, то для некоторой Φ_α будет $[H, \Phi_\alpha] = [H, \Phi]$. С другой стороны, $[H, \Phi_\alpha] \neq H$, и требуемое утверждение доказано.

Возвращаясь к нашему случаю, замечаем, что нижний $\Sigma \cap \Gamma_\alpha$-стабильный ряд в H доходит до нуля. Так как все его члены Γ_α-допустимы, то мы находимся в условиях применимости рассмотренного выше локального предложения. Применяя это предложение, заключаем, что в $\mathfrak{G}$ имеется стабильная относительно Σ нормальная система, состоящая из Γ-допустимых Ω-подгрупп. Понятно, что это возможно лишь в том случае, когда Σ действует тождественно в $\mathfrak{G}$.

2. Пусть теперь пара (G, Γ) является $\overline{RN}$-парой и Γ — локально нетерова группа. Пусть Γ_α — снова подгруппа с конечным числом образующих в Γ. Так как группа Γ является локально нетеровой группой, то пересечение $\Gamma_\alpha \cap \Sigma$ также имеет конечное число образующих. Имея в виду, что при наших условиях $\mathfrak{G}$ — абелева Ω-группа, мы можем утверждать, что в $\mathfrak{G}$ имеется

верхний $\Gamma_\alpha \cap \Sigma$-стабильный ряд, доходящий до всей группы $\mathfrak{G}$. Такой ряд Γ_α-допустим. Снова ссылаясь на локальное свойство, получаем, что в $\mathfrak{G}$ имеется стабильная относительно Σ система Γ-допустимых Ω-подгрупп. Это означает, что Σ действует в $\mathfrak{G}$ тождественно.

Теорема доказана.

Назовем еще Ω-группу G *финитарной*, если в G обрываются как возрастающие, так и убывающие ряды Ω-подгрупп. Соответственно определяются *локально финитарные* Ω-группы. Векторные пространства являются, очевидно, локально финитарными Ω-группами. Теперь можно доказать следующее утверждение.

5.4. *Если представление группы* Γ *относительно локально финитарной* Ω*-группы* G *является локально ограниченным, то радикалы* $\alpha_G(\Gamma)$ *и* $\beta_G(\Gamma)$ *совпадают.*

Из предыдущей теоремы имеем включение $\beta_G(\Gamma) \subset \alpha_G(\Gamma)$, так что достаточно показать, что радикал представления $\alpha_G(\Gamma)$ является квазистабильной группой. Пусть (H, Σ) — подпара в $(G, \alpha_G(\Gamma))$, имеющая конечную систему образующих. Так как пара $(G, \alpha_G(\Gamma))$ слабо стабильна, то слабо стабильной является и пара (H, Σ). Но H — финитарная Ω-группа, и следовательно, стабильная относительно Σ нормальная система превращается в конечный Σ-стабильный ряд. Поэтому пара (H, Σ) стабильна и $\alpha_G(\Gamma)$ — квазистабильная группа.

Приведем еще следующую теорему.

5.5. *Если группа* Γ *является локально нетеровой группой, то для любой пары* (G, Γ) *радикал* $\gamma_G(\Gamma)$ *принадлежит радикалу* $\alpha_G(\Gamma)$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторый Γ-композиционный фактор Ω-группы G и пусть Γ_α — подгруппа с конечным числом образующих в Γ. Пересечение $\Gamma_\alpha \cap \gamma_G(\Gamma)$ также имеет конечное число образующих, и поэтому нижний $\Gamma_\alpha \cap \gamma_G(\Gamma)$-стабильный ряд Ω-группы $\mathfrak{G}$ на конечном шаге доходит до нуля. Члены такого ряда Γ_α-допустимы. Отсюда следует, что в $\mathfrak{G}$ имеется $\gamma_G(\Gamma)$-стабильная нормальная система Γ-допустимых Ω-подгрупп. Это означает, что $\gamma_G(\Gamma)$ действует тождественно в $\mathfrak{G}$.

6. Радикалы области действия. В теории пар (G, Γ), в которых область действия есть Ω-группа, важную

роль играют и радикалы области действия. Общее определение радикала в G приводилось в п. 2.1.5.

Здесь мы отметим два специальных случая.

Из теоремы п. 2 непосредственно следует, что при любой паре (G, Γ) в G имеется локально ограниченный радикал. Действительно, поскольку объединение возрастающей последовательности локально ограниченных идеалов в G также является локально ограниченным идеалом, то в G имеется некоторый максимальный допустимый локально ограниченный идеал. Пусть H — такой идеал. Согласно упомянутой теореме в фактор-группе G/H уже нет нетривиальных допустимых локально ограниченных идеалов. Следовательно, вне H нет локально ограниченных идеалов (это следует из теоремы об изоморфизмах), и H является локально ограниченным радикалом в G.

Легко также видеть, что в области действия G всегда имеется локально стабильный радикал. Покажем теперь, что

6.1. *Если в паре* (G, Γ) *область действия локально нетерова, то в* G *имеется квазистабильный радикал.*

Пусть H — максимальный допустимый квазистабильный идеал в G. Для того чтобы показать, что H является квазистабильным радикалом в G, достаточно установить, что в G/H нет нетривиальных допустимых квазистабильных идеалов. Допустим, что это не так, и пусть F/H — допустимый квазистабильный идеал в G/H.

Покажем, что F — квазистабильный идеал в G. Пусть (A, Σ) — подпара в (F, Γ), имеющая конечную систему образующих. Так как пара (F, Γ) локально ограничена, то A — нетерова Ω-группа. Легко видеть, что пары $(A \cap H, \Sigma)$ и $(A/A \cap H, \Sigma)$ квазистабильны, а так как A нетерова, то обе эти пары локально финитно стабильны. Учитывая теперь, что Σ имеет конечное число образующих, мы заключаем, что эта группа (финитно) стабильна как относительно $A \cap H$, так и относительно $A/A \cap H$. Отсюда, очевидно, следует, что Σ стабильна относительно A. Мы показали, что (F, Γ) — квазистабильная пара, и получили противоречие со свойством максимальности H. Таким образом, H — квазистабильный радикал в G.

В дальнейшем мы увидим, что если G — группа без (мульти-)операторов, то для такой группы приведенная теорема верна без предположения о локальной нетеровости.

Сейчас естественно было бы рассмотреть поведение радикалов в G и Γ при тех или иных конструкциях; прямых произведениях, сплетениях и т. д.

Мы ограничимся лишь следующим замечанием:

6.2. *Если G — вполне приводимая Ω-группа без центра, то $\gamma_G(\Gamma)$ принадлежит ядру представления.*

Пусть G — вполне приводимая Ω-группа без центра и $\sigma \in \gamma_G(\Gamma)$. Согласно определению $\gamma_G(\Gamma)$ в G имеется такой собственный допустимый идеал B, что в G/B σ действует тождественно. Пусть A — дополнение к B: $G = A + B$, и пусть A' — минимальный идеал в A. Тогда $G = A' + B'$. Если $a \in A'$, то $a \circ \sigma = a + b$, $b \in B'$. С другой стороны, во вполне приводимой Ω-группе без центра должно быть: либо $A' \circ \sigma = A'$, либо $A' \circ \sigma \subset B'$. Последнее невозможно ввиду $a \circ \sigma = a + b$. Следовательно, $A' \circ \sigma = A'$, $b = 0$, и при любом $a \in A'$ будет $a \circ \sigma = a$, так что на все элементы из A σ действует тождественно. Дальше, исходя из B в качестве G, мы повторим наши рассуждения. Так по индукции будет доказано, что σ действует тождественно в G.

7. Общая треугольность. Если W — некоторое абстрактное свойство пар, связанных с представлениями относительно мультиоператорных групп, то, исходя из этого свойства, можно определить ряд новых свойств. При этом особо выделяются свойства *локального* типа, связанные со свойством W, а также соответствующие свойства *треугольного* (или разрешимого) типа. Несколько общих замечаний о последних сейчас и будет сделано.

Прежде всего определим *нижний W-ряд*. Через $[G, \Gamma]^W$ обозначим пересечение всех допустимых идеалов H из G, для которых пара $(G/H, \Gamma)$ обладает свойством W. Затем, как обычно, полагаем:

$$[G, \Gamma]^W = [G, \Gamma; 1]^W, \ldots, [G, \Gamma; \alpha+1]^W =$$
$$= [[G, \Gamma; \alpha]^W, \Gamma]^W, \ldots,$$

причем на предельных местах стоят пересечения предыдущих членов. Все эти члены нижнего W-ряда в G являются Г-характеристическими Ω-подгруппами. Если при некотором конечном n будет $[G, \Gamma; n]^W = 0$, то такую пару (G, Γ) назовем *W-разрешимой*.

Введем теперь следующее определение: нормальная допустимая система $[H_\alpha]$ в области действия G называется *W-треугольной (разрешимой) системой* (ΔW-системой), если все пары $(H_{\alpha+1}/H_\alpha, \Gamma)$, связанные с факторами этой системы, обладают свойством W. В частности, стабильная система — это W-треугольная система, где W обозначает тождественное действие группы Г.

Допустим теперь, что θ — абстрактное теоретико-групповое свойство, замкнутое относительно полных прямых произведений, подгрупп и гомоморфизмов, и пусть θ обозначает еще свойство пары (G, Γ), состоящее в том, что проекция Г относительно G является θ-группой. Для такого θ легко проверяется следующее утверждение:

7.1. *Если (G, Γ) — некоторая пара, то нормальная допустимая система в G тогда и только тогда является θ-треугольной системой, когда эта система является стабильной относительно θ-коммутанта группы* Г.

θ-коммутант в Г — это пересечение всех нормальных делителей Σ из Г, для которых Γ/Σ — θ-группа. Если $\theta(\Gamma)$ — этот θ-коммутант, то в силу условий $\Gamma/\theta(\Gamma)$ также является θ-группой. Пусть теперь система $[H_\alpha]$ является θ-треугольной и пусть $(H_{\alpha+1}/H_\alpha, \Gamma)$ — некоторая пара, связанная с этой системой. Если Σ_α — ядро представления Г относительно $H_{\alpha+1}/H_\alpha$, то Γ/Σ_α есть θ-группа, и поэтому $\theta(\Gamma) \subset \Sigma_\alpha$, так что система $[H_\alpha]$ стабильна относительно $\theta(\Gamma)$. Пусть, обратно, выполняется это последнее свойство. Тогда каждый раз ядро представления Σ_α содержит $\theta(\Gamma)$, и следовательно, Γ/Σ_α есть θ-группа.

Аналогично получается следующее утверждение:

Нижний θ-треугольный ряд в G совпадает с нижним $\theta(\Gamma)$-стабильным рядом в G.

Для абелевой Ω-группы G можно определить и верхний θ-треугольный ряд. В качестве первого члена такого верхнего θ-треугольного ряда берется радикал $\theta_\Gamma(G)$,

т. е. совокупность всех θ-элементов из G (см. § 2.4). Обозначим его через H_1, и пусть для всех $\alpha < \beta$ H_α уже определены. Все эти H_α являются Ω-подгруппами в G, и если G абелева, как мы и будем предполагать, все H_α — идеалы. Дальше поступаем обычным путем: если β — предельное, то полагаем $H_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} H_\alpha$, а если существует $\beta - 1$, то H_β — такой идеал в G, что

$$H_\beta / H_{\beta-1} = \theta_\Gamma (G/H_{\beta-1}).$$

Понятно, что если абелева Ω-группа G обладает возрастающим θ-треугольным рядом, то ее верхний θ-треугольный ряд доходит до всей группы G. Если G обладает конечным θ-треугольным рядом, то длины верхнего и нижнего θ-треугольных рядов такой Ω-группы совпадают. Очевидно также и следующее утверждение:

7.2. *Верхний θ-треугольный ряд абелевой Ω-группы G, входящей в пару (G, Γ), совпадает с верхним $\theta(\Gamma)$-стабильным рядом в G.*

Допустим теперь, что θ обозначает свойство группы быть абелевой. Если для этого θ в G имеется конечный θ-треугольный ряд, то группу Γ назовем *внешне разрешимой группой*. Если пара (G, Γ) является точной парой, то внешняя разрешимость группы Γ влечет ее внутреннюю разрешимость. В самом деле, если Γ внешне разрешима, то коммутант этой группы Γ' является финитно стабильной (внешне нильпотентной) группой. В случае точной пары такая группа Γ' оказывается нильпотентной группой, и поэтому Γ — разрешимая группа.

В заключение пункта заметим еще, что в п. 2.1.5 шла речь о верхнем W-радикальном ряде области действия.

Понятно, что если свойство W является радикальным свойством относительно областей действия, то такой верхний W-радикальный ряд является и W-треугольным рядом (в верхнем W-радикале).

8. Обратимость эндоморфизма Ω-группы. Приведем некоторые определения. Пусть σ — эндоморфизм Ω-группы G, $G^\sigma = \mathrm{Im}(\sigma)$ — образ G при этом отображении, и $G_\sigma = \mathrm{Ker}(\sigma)$ — ядро гомоморфизма σ. Понятно, что σ в том

и только в том случае является автоморфизмом Ω-группы G, когда выполняются следующие условия:

1) $G_\sigma = 0$ (условие мономорфизма),

2) $G^\sigma = G$ (условие эпиморфизма).

Если для σ выполняется хотя бы первое условие, то такой эндоморфизм называется *мероморфизмом*, а если выполнено второе условие, то σ называется *автоэпиморфизмом*. Как и в книге В. Шпехта [1], Ω-группу G назовем *u*-группой, если каждый ее мероморфизм является автоморфизмом, и *q*-группой, если каждый ее автоэпиморфизм есть автоморфизм G. В книге В. Шпехта приводятся различные достаточные признаки *u*-групп и *q*-групп. Отметим простейшие из относящихся сюда фактов.

Пусть σ — мероморфизм Ω-группы G. Будем смотреть на σ с одной стороны как на изоморфизм между Ω-группами G и G^σ, а с другой — как на оператор, действующий в G и G^σ. Так как, очевидно, σ-изоморфизм и σ-оператор перестановочны, то σ-изоморфизм является операторным изоморфизмом. Это, в частности, означает, что если G^σ — собственная Ω-подгруппа в G, то G^{σ^2} — собственная Ω-подгруппа в G^σ. Итак, если мероморфизм σ не является автоморфизмом, то в G имеется строго убывающая последовательность Ω-подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k \supset \ldots,$$

где $G_k = G^{\sigma k}$.

Из сказанного следует, что если Ω-группа G удовлетворяет условию минимальности для Ω-подгрупп, то такая Ω-группа является *u*-группой.

Допустим теперь, что σ — автоэпиморфизм Ω-группы G. Ясно, что все положительные степени σ также являются автоэпиморфизмами Ω-группы G. Обозначим через G^k ядро гомоморфизма σ^k: $G^k = G_{\sigma^k}$. Мы получим в G возрастающий ряд идеалов — *верхний ядерный ряд* для σ: $0 = G^0 \subset G^1 \subset \ldots \subset G^k \subset \ldots$, причем в рассматриваемом случае все G/G^k изоморфны Ω-группе G.

Посмотрим дальше на σ как на изоморфизм между G и G/G^1 и как на оператор в G и в G/G^1. Тогда σ-изоморфизм является операторным изоморфизмом, и поэтому, если G^1 не совпадает с нулем в G, то ядро σ в G/G^1 также не совпадает с нулем этой Ω-группы. Но послед-

нее ядро — это, очевидно, G^2/G^1, так что подгруппа G^2 отлична от G^1. Все это означает, что если σ не является автоморфизмом Ω-группы G, то соответствующий верхний ядерный ряд является строго возрастающим рядом.

Теперь можно заключить, что всякая Ω-группа, удовлетворяющая условию максимальности для идеалов, является q-группой.

По аналогии с § 2.4 эндоморфизм σ можно назвать *почти периодическим*, если для каждого $g \in G$ найдется такой показатель $k = k(g, \sigma)$, что σ^k оставляет элемент g неподвижным. Однако легко видеть, что почти периодический эндоморфизм является мероморфизмом, а также автоэпиморфизмом, и следовательно, почти периодический эндоморфизм является автоморфизмом.

Приведем теперь другой тип условия, при котором эндоморфизм является автоморфизмом.

8.1. *Если σ — эндоморфизм Ω-группы G и в G имеется возрастающий нормальный ряд σ-допустимых Ω-подгрупп такой, что во всех факторах этого ряда σ действует как автоморфизм, то σ является автоморфизмом Ω-группы G.*

Применим индукцию. Пусть ряд

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G$$

удовлетворяет условиям теоремы. В частности, в G_1 σ действует как автоморфизм. Допустим сразу, что σ действует как автоморфизм во всех G_α с $\alpha < \gamma$. Для того чтобы показать, что σ — автоморфизм группы G, нужно показать, что $G_\sigma = 0$ и $G^\sigma = G$. Рассмотрим вначале случай предельного γ. Так как в этом случае $G_\sigma = \bigcup_{\alpha<\gamma} (G_\alpha)_\sigma$ и в силу предположения все $(G_\alpha)_\sigma$ совпадают с нулем, то $G_\sigma = 0$. Пусть $G^\sigma \neq G$ и пусть g — элемент в G, не принадлежащий G^σ. При некотором $\alpha < \gamma$ $g \in G_\alpha$, и, очевидно, $g \bar{\in} (G_\alpha)^\sigma$. Это, однако, противоречит тому, что $(G_\alpha)^\sigma = G_\alpha$, так что $G^\sigma = G$, и случай предельного γ разобран. Заметим здесь, что точно такими же рассуждениями показывается, что эндоморфизм Ω-группы G является ее автоморфизмом, если в G имеется локальная система допустимых Ω-подгрупп, в каждом члене которой этот эндоморфизм действует как автоморфизм.

Пусть теперь γ — непредельное. Так как $G_\sigma \cap G_{\gamma-1} \subset \subset (G_{\gamma-1})_\sigma$, то G_σ пересекается с $G_{\gamma-1}$ лишь по нулю. Но тогда, если $G_\sigma \neq 0$, то в $G/G_{\gamma-1}$ имеется нетривиальное ядро гомоморфизма σ, содержащее $G_{\gamma-1} + G_\sigma/G_{\gamma-1}$. Таким образом, $G_\sigma = 0$. Остается показать, что $G^\sigma = G$.

Пусть g — произвольный элемент в G. Так как в $G/G_{\gamma-1}$ σ действует как автоморфизм, то найдутся такие $a \in G$ и $b \in G_{\gamma-1}$, что $b + a\sigma = g$. По предположению индукции существует $c \in G_{\gamma-1}$ такое, что $c\sigma = b$. Теперь имеем $c\sigma + a\sigma = g$ и $(c + a)\sigma = g$. Этим установлено, что $G^\sigma = G$, и теорема доказана.

Приведенная теорема может рассматриваться как обобщение очевидного факта, что треугольная (конечная) матрица с ненулевыми членами на главной диагонали является обратимой матрицей. Из нее также вытекает следующее замечание: если σ — эндоморфизм Ω-группы G, причем в G имеется возрастающий σ-допустимый ряд, во всех факторах которого σ действует тождественно, то σ — стабильный автоморфизм. Это замечание и послужило поводом включить сюда настоящий пункт.

Легко построить пример, показывающий, что аналогичная теорема для убывающих рядов уже неверна. Пусть, например, группа G является прямым произведением счетного множества бесконечных циклических групп $A_i = \{e_i\}$. Определим эндоморфизм σ следующим правилом: $e_i\sigma = e_i + e_{i+1}$.

Этот σ может быть представлен бесконечной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & 0 \\ & & 1 & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что σ является мероморфизмом группы G, но не автоморфизмом (например, e_1 не принадлежит G^σ). Обозначим через G^i подгруппу в G, порожденную всеми A_k с номерами $k \geqslant i$. Система подгрупп G^i составляет в G убывающий ряд, во всех факторах которого σ действует как тождественный автоморфизм.

Пусть дальше σ — произвольный эндоморфизм Ω-группы G и пусть $\tilde{G}_\sigma$ — объединение всех членов верхнего ядерного ряда эндоморфизма σ. Ω-подгруппу $\tilde{G}_\sigma$ назовем *верхним ядром преобразования* σ. Верхнее ядро может быть также определено как совокупность всех $g \in G$, для которых существует такое n, что $g\sigma^n = 0$. Отсюда следует, что ядро оператора σ в фактор-группе $G/\tilde{G}_\sigma$ совпадает с нулем, и σ действует в этой фактор-группе как мероморфизм. Понятно, что σ будет действовать как автоморфизм в $G/\tilde{G}_\sigma$ в том и только в том случае, когда группа G порождается верхним ядром $\tilde{G}_\sigma$ и образом G^σ.

Эндоморфизм σ Ω-группы G называется *нильэндоморфизмом*, если верхнее ядро $\tilde{G}_\sigma$ совпадает со всей группой G. Из теоремы 8.1 непосредственно вытекает следующее утверждение:

8.2. *Если σ — нильэндоморфизм Ω-группы G и разность $\varepsilon - \sigma$ (ε — единичный эндоморфизм) является также эндоморфизмом, то эта разность является стабильным автоморфизмом Ω-группы G.*

§ 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОБЩЕННЫХ МОДУЛЯХ

1. Аннуляторные свойства. Везде в этом параграфе речь будет идти о строгих модулях, и все рассматриваемые здесь Ω-почти кольца обладают дистрибутивными образующими. Пусть (G, K) — некоторый такой модуль и $[H_\alpha]$ — нормальная система в G. *Аннулятором* этой системы называется совокупность всех таких $u \in K$, что в каждом скачке системы выполняется $H_{\alpha+1} \circ u \subset H_\alpha$. Этот аннулятор обозначим через U. Легко видеть, что U — Ω-подкольцо в K (в дальнейшем для простоты мы будем говорить «Ω-подкольцо» вместо «Ω-под(почти)-кольцо»). Если система $[H_\alpha]$ является допустимой, то U, будучи пересечением ядер представлений, есть идеал в K.

Будем дальше говорить, что некоторая нормальная система $[H_\alpha]$ в G является *аннуляторной* относительно Ω-подкольца $U \subset K$, если U принадлежит аннулятору этой системы. Ω-подкольцо U называется *слабо аннуляторным*, если в G имеется аннуляторная относительно U

нормальная система. U называется *аннуляторным*, если в G имеется возрастающий нормальный ряд, аннуляторный относительно U. Нетрудно понять, что радикал представления $\alpha_G(K)$ является слабо аннуляторным подкольцом. Соответственно определяются локальные аннуляторные свойства. В частности, квазианнуляторное подкольцо U в K — это такое подкольцо, что модуль (G, U) обладает локальной системой подмодулей (G_α, U_α) таких, что U_α аннуляторно относительно G_α.

Обычным путем определяется *нижний аннуляторный ряд* в G относительно Ω-подкольца U. Через $[G, U]$ обозначим идеал в G, порожденный множеством $G \circ U$, а итерацией определяются и все $[G, U; \alpha]$. Если U — замкнутое относительно умножений справа Ω-подкольцо в K, то идеал $[G, U]$, а следовательно, и все $[G, U; \alpha]$ допустимы относительно K.

Прежде всего, ясно, что множество $G \circ U$ является K-допустимым подмножеством в G. Если теперь u — строго дистрибутивный элемент в K, то отображение $u: G \to G \circ u$ есть эндоморфизм G, и поэтому $[G, U] \circ u$ есть идеал в $G \circ u$, порожденный множеством $(G \circ U) \circ u$. Так как $G \circ Uu$ принадлежит $[G, U]$, то и $[G, U] \circ u$ принадлежит $[G, U]$. Следовательно, идеал $[G, U]$ допустим относительно всех строго дистрибутивных элементов. Так как строго дистрибутивные элементы порождают все K, то этим установлена K-допустимость идеала $[G, U]$.

Если G — коммутативная Ω-группа, то можно определить и верхний U-аннуляторный ряд в G. Первый член ряда H_1 состоит из всех $h \in G$ таких, что при любом $u \in U$ выполняется $h \circ u = 0$. Так как все элементы из K действуют в G как эндоморфизмы, то H_1 — Ω-подгруппа и, значит, идеал в G. Дальше по индукции определяются все H_α. Если U — замкнутое относительно умножения слева Ω-подкольцо в K, то все H_α являются K-допустимыми идеалами.

Дальше будем предполагать, что Ω-модуль (G, K) порождается групповой парой (G, Γ).

Легко доказывается следующее утверждение. Если Σ — подгруппа в Γ, то эта подгруппа тогда и только тогда квазистабильна, когда Ω-подкольцо S в K, порожденное элементами вида $\varepsilon - \sigma$, ε — единица и $\sigma \in \Sigma$,

является квазианнуляторным. Проверим это утверждение. Пусть Σ — квазистабильная подгруппа в Γ и σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — конечное множество элементов в Σ. Пусть еще Σ_0 — подгруппа в Σ, порожденная этими элементами, и (H, Σ_0) — подпара в (G, Σ) с конечной системой образующих и действующей группой Σ_0. В H имеется стабильный относительно Σ_0 ряд. Если $[H_\alpha]$ — такой ряд, то все элементы вида $\varepsilon - \sigma$, $\sigma \in \Sigma_0$, принадлежат аннулятору этого ряда. Поэтому, если S_0 — Ω-подкольцо, порожденное всеми $\varepsilon - \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то это подкольцо аннуляторно относительно H. Так как все (H, S_0) составляют локальную систему в (G, S), то в одну сторону утверждение справедливо. В обратную сторону проверка аналогична.

Докажем теперь следующую лемму:

1.1. *Если U — квазианнуляторный идеал в K и Σ — множество всех элементов вида $\varepsilon + u$, $u \in U$, принадлежащих* Γ, *то подгруппа в* Γ, *порожденная множеством* Σ, *является квазистабильным нормальным делителем в* Γ.

Пусть $\varepsilon + u \in \Gamma$ и $\sigma \in \Gamma$. Тогда $\sigma^{-1}(\varepsilon + u)\sigma = \varepsilon + \sigma^{-1}u\sigma$, и следовательно, Σ — инвариантное множество в Γ, а подгруппа, порожденная этим множеством, является нормальным делителем в Γ. Точно так же, как это делалось только что, можно показать, что каждое конечное подмножество из Σ порождает квазистабильную подгруппу. Следовательно, и Σ порождает квазистабильную подгруппу, которая, как мы видели, инвариантна.

Следующая лемма говорит об обратном свойстве.

1.2. *Пусть в локально ограниченной паре* (G, Γ) *Ω-группа G и группа* Γ *локально нетеровы. Тогда совокупность $L = -\varepsilon + \beta_G(\Gamma)$ принадлежит некоторому квазианнуляторному идеалу Ω-почти кольца K.*

Прежде всего заметим, что в рассматриваемом случае $\beta_G(\Gamma)$ — квазистабильная группа. Воспользуемся дальше следующими обозначениями. Пусть U — Ω-подкольцо в K, и X — подмножество в U. Тогда через X^U будем обозначать наименьший идеал в U, содержащий X. Обозначим еще $L^K = \tilde{L}$.

Пусть дальше X_α — всевозможные конечные подмножества в K, K_α — Ω-подкольцо в K, порожденное множеством X_α, и $\tilde{L}_\alpha = (X_\alpha \cap L)^{K_\alpha}$. Система всех K_α является

локальной системой в K. Очевидно также, что из $X_\alpha \subset X_\beta$ следует $L_\alpha \subset L_\beta$, так что все L_α составляют локальную систему в своем теоретико-множественном объединении. Это объединение обозначим через L'. По построению L' содержит L. Легко видеть, что всякий идеал в K, содержащий L, содержит и L'. Теперь покажем, что L' — идеал в K. Пусть вначале u — произвольный элемент в K и $v \in L'$. Тогда найдется L_α такое, что $v \in L_\alpha$. Пусть X_α — такое конечное подмножество, что $L_\alpha = (X_\alpha \cap L)^{K_\alpha}$. Обозначим еще через X_β объединение X_α и u. Понятно, что $u \in K_\beta$ и $v \in L_\beta$. Ясно также, что элементы uv, vu и $-u+v+u$ принадлежат L_β, а потому и L'. Допустим теперь, что $\omega \in \Omega$ — n-арная операция, и пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L'$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$. Пусть дальше $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L_\alpha$, $L_\alpha = (X_\alpha \cap L)^{K_\alpha}$, и пусть X_β есть объединение множеств X_α и $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тогда $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L_\beta$, и так как L_β — идеал в K_β, получим:

$$-v_1 v_2 \ldots v_n \omega + (u_1+v_1)(u_2+v_2)\ldots(u_n+v_n)\,\omega \in L_\beta \subset L'.$$

Таким образом, L' — идеал в K, и следовательно, $L' = \tilde{L}$.

Теперь будем доказывать, что каждое подкольцо L_α является квазианнуляторным.

Все элементы u_i из X_α выражаются, по условию, с помощью аддитивных операций и операций из Ω через некоторые элементы σ_{ij} из Γ. Всех этих σ_{ij} — конечное число. Пусть, далее, пересечение $X_\alpha \cap L$ состоит из элементов v_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, и пусть $v_i = -\varepsilon + \sigma_i$, $\sigma_i \in \beta_G(\Gamma)$. Обозначим через Φ_α подгруппу в Γ, порожденную всеми σ_{ij} и всеми σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть еще $\mathfrak{z}_\alpha = \Phi_\alpha \cap \beta_G(\Gamma)$. Так как Φ_α имеет конечное число образующих и Γ — локально нетерова, то и $\mathfrak{z}_\alpha$ имеет конечное число образующих. Кроме того, $\mathfrak{z}_\alpha$ содержит все σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Из условия леммы следует, что в G имеется локальная система из Φ_α-допустимых нетеровых Ω-подгрупп. Обозначим эти подгруппы через G_α^ν. Так как G_α^ν — нетерова Ω-группа и $\mathfrak{z}_\alpha$ имеет конечное число образующих, то нижний ряд $\mathfrak{z}_\alpha$-коммутантов в G_α^ν через конечное число шагов доходит до нуля. Пусть ряд

$$G_\alpha^\nu = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = 0$$

является таким рядом. Все его члены допустимы и относительно Φ_α, а потому и относительно K_α. Аннулятор этого ряда в K_α — обозначим его через A_α — является идеалом в K_α и содержит все v_i. Так как пересечение $X_\alpha \cap L$ принадлежит A_α, то и L_α содержится в A_α. Этим доказано, что L_α — квазианнуляторное Ω-подкольцо. Отсюда следует, что $\tilde{L}$ — квазианнуляторный идеал в K, и лемма доказана.

Из двух последних лемм получаем следующую теорему:

1.3. *Если Ω-группа G и группа Γ локально нетеровы и (G, Γ) — локально ограниченная пара, то в K имеется такой квазианнуляторный идеал $\tilde{L}$, что*

$$\beta_G(\Gamma) = \Gamma \cap (\varepsilon + \tilde{L}).$$

Действительно, если взять $\tilde{L}$ из предыдущей леммы, то по первой лемме мы получим включение $\Gamma \cap (\varepsilon + \tilde{L}) \subset \subset \beta_G(\Gamma)$. Если, с другой стороны, $\sigma \in \beta_G(\Gamma)$, то $-\varepsilon + \sigma = = u \in \tilde{L}$ и $\sigma = \varepsilon + u \in (\varepsilon + \tilde{L}) \cap \Gamma$. Это дает требуемое равенство.

Рассмотрим дальше аналогичную конструкцию для радикала $\gamma_G(\Gamma)$. Ω-подкольцо $U \subset K$ называется *финитно аннуляторным*, если в G имеется конечный ряд, аннулируемый этим подкольцом. U называется *локально финитно аннуляторным*, если каждое Ω-подкольцо из U, имеющее конечное число образующих, финитно аннуляторно. Легко видеть, что подгруппа $\Sigma \subset \Gamma$ тогда и только тогда локально финитно стабильна, когда Ω-подкольцо в K, порожденное элементами вида $\varepsilon - \sigma$, $\sigma \in \Sigma$, локально финитно аннуляторно. Так же, как и в предыдущем случае, доказывается, что если U — локально финитно аннуляторный идеал в K, и Σ — множество всех элементов вида $\varepsilon + u$, $u \in U$, принадлежащих Γ, то подгруппа, порожденная Σ в Γ, является локально финитно стабильным нормальным делителем. Интересно заметить, что если модуль (G, K) является точным, то уже множество Σ является таким нормальным делителем. Докажем это последнее замечание. Пусть σ и φ — два произвольных элемента в Σ: $\sigma = \varepsilon + u$, $\varphi = \varepsilon + v$, $u, v \in U$. Тогда $\sigma\varphi = (\varepsilon + u)(\varepsilon + v) = \varepsilon + v + u + uv \in \Sigma$. Если

модуль (G, K) является точным, то при некотором n $(-u)^n = 0$. Отсюда непосредственной проверкой находим, что если обозначить $-u = u_0$, то $\sigma^{-1} = \varepsilon + u_0 + u_0^2 + \ldots + u_0^{n-1}$, и следовательно, $\sigma^{-1} \in \Sigma$, так что множество Σ является подгруппой, а этого нам достаточно.

Точно такими же рассуждениями, как и в квазистабильном случае, и с некоторыми упрощениями за счет того, что в G не нужно брать локальные Ω-подгруппы, доказывается следующая теорема:

1.4. *Если группа* Γ *локально нетерова, то совокупность* $L = \varepsilon + \gamma_G(\Gamma)$ *принадлежит некоторому локально финитно аннуляторному идеалу* $\tilde{L}$ *и имеет место равенство:* $(\varepsilon + \tilde{L}) \cap \Gamma = \gamma_G(\Gamma)$. *Здесь в качестве* $\tilde{L}$ *можно взять* L^k.

2. Аннуляторные свойства и нильсвойства. В п. 3. 4 были определены нильмножества действующего Ω-квазикольца. По поводу таких нильмножеств отметим вначале следующее свойство. Если H — допустимый идеал в G и конечное множество $S \subset K$ действует как нильмножество в H и G/H, то и в G S действует как нильмножество. Действительно, пусть $g \in G$. Тогда при некотором m элементы вида $g \circ u_1 u_2 \ldots u_m$, $u_i \in S$, принадлежат H. Таких элементов имеется конечное число, и для каждого из них найдется, вообще говоря, свой показатель m_k, такой, что произведение любых m_k элементов из S аннулирует данный элемент из H. Теперь понятно, что найдется и такой показатель n, что произведение любых n элементов из S аннулирует g. Из этого свойства непосредственно следует, что если U — *квазианнуляторное* Ω-*подкольцо в* K, *то всякое конечное подмножество из* U *является нильмножеством.* Ω-подкольцо в K, обладающее этим последним свойством, будем в дальнейшем называть *внешне локально нильпотентным*.

В классических (линейных) модулях квазианнуляторные кольца и внешне локально нильпотентные кольца — это равносильные понятия. Поэтому естественно поставить следующий вопрос: в каких еще случаях внешне локально нильпотентные Ω-почти кольца оказываются квазианнуляторными. Для того чтобы привести одну теорему, относящуюся к этому вопросу, напомним, что

Ω-группа G называется *сильно разрешимой*, если убывающий ряд сильных коммутантов этой группы на конечном шаге доходит до нуля. Если G — группа (с пустым Ω), то это — обычная разрешимость. Векторные пространства над полями, очевидно, сильно разрешимы: модуль (G, K) квазисильно разрешим, если в нем имеется локальная система подмодулей (G_α, K_α) таких, что все G_α сильно разрешимы. Согласно локальной теореме каждый такой модуль является нормальным. Имеет место следующая теорема:

2.1. *Если модуль (G, K) квазисильно разрешим, то всякое внешне локально нильпотентное Ω-подкольцо U в K является квазианнуляторным.*

Рассмотрим вначале случай, когда Ω-группа G сильно разрешима. Пусть ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_i \supset \ldots \supset G_n = 0$$

является нижним рядом сильных коммутантов в G. Все члены этого ряда допустимы относительно строго дистрибутивных элементов, и следовательно, относительно K. Пусть S — конечное нильподмножество в K и $\mathfrak{G}$ — некоторый произвольный фактор приведенного ряда. Так как $\mathfrak{G}$ — коммутативная Ω-группа, то все элементы из K действуют в $\mathfrak{G}$ как эндоморфизмы. Пусть теперь $\bar{g}$ — произвольный элемент в $\mathfrak{G}$, и n — наименьший показатель со свойством $\bar{g} \circ u_1 u_2 \ldots u_n = 0$, $u_i \in S$. Все элементы вида $\bar{g} \circ u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$, а среди них имеются отличные от нуля, аннулируются элементами из S. Следовательно, если H_1 — совокупность всех элементов из $\mathfrak{G}$, аннулируемых элементами из S, то H_1 отлично от нуля. Легко видеть, что H_1 — Ω-подгруппа и, значит, идеал в $\mathfrak{G}$. Отправляясь от этого H_1, можно построить верхний аннуляторный ряд относительно S в Ω-группе $\mathfrak{G}$. Такие ряды можно строить во всех факторах ряда сильных коммутантов. Беря полные прообразы членов этих рядов, мы получим в G некоторый ряд $[A_\alpha]$, такой, что множество S принадлежит аннулятору этого ряда. Следовательно, S порождает аннуляторное относительно G Ω-подкольцо. Этим доказано, что если U — внешне локально нильпотентное подкольцо в K, то оно также и локально аннуляторное.

Переходим к общему случаю. Пусть U внешне локально нильпотентно и S — конечное подмножество в U. В модуле (G, K) имеется, очевидно, локальная система из строгих подмодулей (G_α, K_α), таких, что все K_α содержат S и все G_α сильно разрешимы. Если теперь $\tilde{S}$ — Ω-подкольцо, порожденное множеством S, то по предыдущему все подмодули $(G_\alpha, \tilde{S})$ аннуляторны, так что U — квазианнуляторное Ω-подкольцо в K.

Докажем дальше следующую теорему:

2.2. *Если Ω-группа G локально сильно разрешима и представление K относительно G является локально ограниченным, то сумма всех квазианнуляторных идеалов из K также является квазианнуляторным идеалом — квазианнуляторным радикалом в K.*

Достаточно ограничиться двумя слагаемыми. Пусть U и V — два квазианнуляторных идеала в K. Нужно показать, что их сумма — квазианнуляторный идеал. Пусть X — конечное множество элементов из суммы $U+V$. Эти элементы имеют вид u_i+v_i, $u_i \in U$, $v_i \in V$. Все элементы u_i и v_i выражаются с помощью аддитивных операций и операций из Ω через некоторые σ_{ij} и φ_{ik}, являющиеся строго дистрибутивными элементами.

Обозначим через K' Ω-подкольцо, порожденное всеми этими σ_{ij} и φ_{ik}. Пусть еще (A, K') — подмодуль с конечным числом образующих. Тогда Ω-подгруппа A имеет конечное число образующих и сильно разрешима. Пусть ряд

$$A = A^0 \supset A^1 \supset \ldots \supset A^m \supset A^{m+1} \supset \ldots \supset A^s = 0$$

является убывающим рядом сильных коммутантов в A. Все члены этого ряда допустимы относительно K'. Пусть $A^m/A^{m+1} = B$ — произвольный фактор приведенного ряда. Наше утверждение будет, очевидно, доказано, если мы покажем, что множество X является аннуляторным в модуле (B, K').

Заметим, что поскольку B — коммутативная Ω-группа, то все элементы из K' действуют в B как эндоморфизмы. Пусть (C, K') — подмодуль в (B, K') с конечным числом образующих. Модуль (B, K') является локально ограниченным, и поэтому Ω-подгруппа C имеет конечное число образующих. Обозначим, далее, $U' = U \cap K'$,

$V' = V \cap K'$. U' и V' — идеалы в K', причем оба они квазианнуляторны относительно C. Покажем, что их сумма квазианнуляторна относительно C. Пусть W — ядро представления K' относительно C и $\bar{K}'$, $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ — образы соответственно K', U' и V' при естественном гомоморфизме $K' \to K'/W$. Так как C имеет конечное число образующих, то $\bar{U}'$ и $\bar{V}'$ — локально нильпотентные Ω-кольца, т. е. такие Ω-кольца, что для каждого конечного подмножества их элементов найдется такое число n, что произведение любых n элементов этого подмножества есть нуль. Действительно, если Y — конечное подмножество, например, в $\bar{U}'$, и $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — некоторая система образующих в C, то найдется такое число n, что произведение любых n элементов из Y аннулирует каждый g_i. Такие произведения будут аннулировать и всю Ω-группу C. Следовательно, произведение любых n элементов из Y есть нуль. Как и в теории колец, теперь легко проверить, что сумма $\bar{U}' + \bar{V}'$ — также локально нильпотентное Ω-кольцо. Но тогда $U' + V'$ локально аннуляторно относительно C. Так как $X \subset U' + V'$, то теорема доказана.

Рассмотренный здесь радикал мы обозначим через $\beta_G(K)$. Этот радикал совпадает также с суммой всех внешне локально нильпотентных идеалов из K, так как в нашем случае ввиду предыдущей теоремы квазианнуляторность и внешняя нильпотентность — это одно и то же.

Используя дальше теорему предыдущего пункта, для локально ограниченного модуля (G, K) с локально сильно разрешимой Ω-группой G, порожденного парой (G, Γ), в которой Γ — локально нетерова, мы получаем следующую формулу: $(\varepsilon + \beta_G(K)) \cap \Gamma = \beta_G(\Gamma)$. Отметим еще, что в рассмотренном случае радикал $\beta_G(K)$ принадлежит радикалу представления $\alpha_G(K)$ (так как в любом нормальном модуле (G, K) внешне локально нильпотентные идеалы из K принадлежат радикалу $\alpha_G(K)$; см. п. 1.3).

Ω-почти кольцо U нильпотентно, если при некотором n произведение любых n элементов из U есть нуль. Финитно аннуляторное Ω-подкольцо из K в случае точного представления является нильпотентным подкольцом. С помощью уже применявшихся рассуждений легко показать,

что если Ω-группа G сильно разрешима, то верно и обратное.

Нетрудно также проверить, что если G — сильно разрешимая Ω-группа, то в этом случае K существует радикал $\gamma_G(K)$, определяемый всеми локально финитно аннуляторными идеалами. Если при этом модуль (G, K) порождается парой (G, Γ), в которой группа Γ локально нетерова, то имеем равенство $(\varepsilon + \gamma_G(K)) \cap \Gamma = \gamma_G(\Gamma)$.

3. Радикал Левицкого Ω-почти кольца. В предыдущем пункте нам уже приходилось говорить об определении локально нильпотентного Ω-почти кольца. Наряду с такой (слабой) локальной нильпотентностью целесообразно рассматривать еще сильную локальную нильпотентность. Ω-почти кольцо K называется *сильно локально нильпотентным*, если всякое Ω-подкольцо из K, имеющее конечное число образующих, нильпотентно. Если Ω-почти кольцо K обладает дистрибутивным базисом и локально нильпотентно, то такое кольцо и сильно локально нильпотентно. В самом деле, всякое Ω-подкольцо из K с конечным числом образующих содержится в некотором Ω-подкольце, порожденном конечным числом дистрибутивных образующих. Допустим теперь, что Ω-подкольцо U из K порождается конечным множеством X дистрибутивных элементов. Пусть n — такое натуральное число, что произведение любых n элементов из X есть нуль. Произведение n элементов из U может быть выражено с помощью основных операций через произведения n элементов из X. Отсюда следует, что произведение любых n элементов из U есть нуль и U нильпотентно.

Ω-почти кольцо K назовем *локально сильно разрешимым*, если в K имеется локальная система из Ω-подколец K_α таких, что все Ω-группы K_α сильно разрешимы. Легко видеть, что это условие в том случае, когда в K имеется единица, равносильно квазисильно разрешимости модуля (K, K). Покажем, что если Ω-почти кольцо K с дистрибутивным базисом локально сильно разрешимо, то всякое его локально нильпотентное Ω-подкольцо U является сильно локально нильпотентным.

Вначале заметим, что если (G, K) — точный модуль и U — локально финитно аннуляторное подкольцо в K,

то U сильно локально нильпотентно, а для того, чтобы U было локально финитно аннуляторным, достаточно, чтобы каждое конечное подмножество из U принадлежало аннулятору некоторого конечного нормального ряда Ω-группы G.

Последнее замечание следует из того что аннулятор ряда всегда является Ω-подкольцом.

Пусть дальше $(\mathfrak{G}, K)$ — точный, с сильно разрешимой Ω-группой $\mathfrak{G}$ модуль и U — локально нильпотентное Ω-подкольцо в K. Покажем, что U сильно локально нильпотентно. Мы уже знаем, что для любого конечного подмножества X из U можно построить такое уплотнение ряда сильных коммутантов группы $\mathfrak{G}$, что получится конечный нормальный ряд, аннулируемый множеством X. Следовательно, U локально финитно аннуляторно, а поэтому и сильно локально нильпотентно.

Пусть теперь регулярный модуль (K, K) квазисильно разрешим, U — локально нильпотентное Ω-подкольцо в K, и V — Ω-подкольцо в U, порожденное конечным множеством элементов $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Каждый v_i можно выразить через некоторые дистрибутивные элементы σ_{ik}, $k = 1, 2, \ldots, n_i$. Обозначим через K' Ω-подкольцо в K, порожденное всеми σ_{ik}. Пусть еще W — ядро представления K' относительно Ω-группы K', и $\bar{K}'$ и $\bar{V}$ — образы K' и V при естественном гомоморфизме $K' \to K'/W$. Так как Ω-группа K' сильно разрешима, то, применяя предыдущий абзац к точному модулю $(K', \bar{K}')$, можно заключить, что $\bar{V}$ сильно локально нильпотентно, а значит, и нильпотентно. Отсюда уже следует, что и V — нильпотентное Ω-подкольцо, а U сильно локально нильпотентно.

Точно так же, как и для колец, для Ω-почти колец можно доказать, что сумма двух локально нильпотентных идеалов, также является локально нильпотентным идеалом. Поэтому в Ω-почти кольце всегда имеется единственный максимальный локально нильпотентный идеал. Этот идеал, так же как и в случае колец, естественно называть *радикалом Левицкого*. Радикал Левицкого Ω-почти кольца K обозначим через $L(K)$.

Отметим еще, что если (G, K) — точный модуль с сильно разрешимой областью действия, то, как это

следует из предыдущих рассмотрений, *внешний радикал* $\gamma_G(K)$ *совпадает с внутренним радикалом* $L(K)$.

Ввиду замечания в конце предыдущего пункта, это означает, в частности, что если модуль (G, K) порождается парой (G, Γ) с локально нетеровой группой Γ, то внешний γ-радикал в Γ может быть определен внутренними средствами Ω-почти кольца K.

В заключение параграфа приведем еще следующее предложение:

3.1. *Если в нормальном Ω-почти кольце K выполняется условие минимальности для замкнутых относительно умножений справа Ω-подгрупп, то радикал Джекобсона такого K совпадает с радикалом Левицкого.*

Из условия обрыва следует, что в Ω,K-группе K имеется такой возрастающий нормальный ряд $[H_\alpha]$, что все модули $(H_{\alpha+1}/H_\alpha, K)$ неприводимы.

Согласно определению радикала Джекобсона $\alpha(K)$ принадлежит аннулятору ряда $[H_\alpha]$. Отсюда, как нетрудно понять, следует, что $\alpha(K)$ — локально нильпотентное Ω-подкольцо в K. Это значит, что $\alpha(K) \subset L(K)$. Обратное включение выполняется ввиду теоремы 1.3.4.

§ 5. ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ПРЯМЫХ СУММ Ω-ГРУПП

1. Общие замечания. В действительности весь этот параграф состоит из общих замечаний, так как более глубокие факты требуют большей специализации. Пусть G — некоторая Ω-группа и пусть эта группа представлена в виде прямой суммы своих идеалов:

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_\alpha + \ldots \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\beta, \ldots$ суммы попарно изоморфных слагаемых разложения (1). Мы получим укрупнение разложения (1):

$$G = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \ldots + \mathfrak{G}_\beta + \ldots \tag{2}$$

В группе $\mathfrak{A}(G)$ всех автоморфизмов Ω-группы G выделим подгруппу Γ, состоящую из всех таких автоморфизмов, которые переводят каждое слагаемое разложения (1) в некоторое слагаемое этого же разложения.

Группа Г импримитивна — мы назовем ее *полной импримитивной группой* автоморфизмов, отвечающей фиксированному разложению (1). Легко описать строение такой группы Г.

По условию каждая группа $\mathfrak{G}_\beta$ есть прямая сумма некоторых (попарно изоморфных) слагаемых разложения (1). Обозначим через Γ_β полную импримитивную подгруппу в $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_\beta)$, отвечающую такому разложению Ω-группы $\mathfrak{G}_\beta$. Каждую группу Γ_β можно рассматривать как подгруппу в Г, причем нетрудно понять, что группа Г является полной прямой суммой всех таких Γ_β. Что касается Γ_β, то, применяя к ней рассмотрения из п. 2.3 этой главы, можно заключить, что эта группа представима в виде полупрямого произведения $\Gamma_\beta = \Phi_\beta \leftthreetimes S_\beta$, где S_β — группа, изоморфная группе всех подстановок соответствующего множества прямых слагаемых в $\mathfrak{G}_\beta$, а Φ_β — полное прямое произведение изоморфных между собой групп $\mathfrak{A}(G_\alpha)$ всех автоморфизмов этих слагаемых. По существу, каждая Γ_β является некоторой полной мономиальной группой.

Будем теперь рассматривать всевозможные прямые разложения Ω-группы G, изоморфные разложению (1), причем два таких разложения считаются разными, если у них различны составы слагаемых. Обозначим множество таких прямых разложений через I. Само разложение (1) также содержится в I, и как элемент из I обозначим его через i.

Каждый автоморфизм Ω-группы G индуцирует некоторую подстановку на множестве I, и такое соответствие определяет гомоморфизм группы $\mathfrak{A}(G)$ в группу всех подстановок множества I. Поступим дальше следующим образом. Пусть j — некоторый элемент в I и пусть еще между слагаемыми в i и j фиксировано некоторое взаимно однозначное соответствие, при котором сопоставляемые слагаемые изоморфны. Беря для таких слагаемых подходящие изоморфизмы, мы фиксируем некоторый изоморфизм разложений i и j. Каждый такой изоморфизм понятным образом определяет некоторый автоморфизм в G. Однако это не означает, конечно, что каждая подстановка множества I индуцируется некоторым автоморфизмом G, отсюда только следует, что группа $\mathfrak{A}(G)$ действует транзитивно на множестве I. Обозначим теперь

через S образ группы $\mathfrak{A}(G)$ в S_I при указанном выше гомоморфизме. Нетрудно понять, что группу $\mathfrak{A}(G)$ можно вложить в сплетение группы Γ и группы подстановок S.

Поясним это подробнее. Очевидно, что совокупность всех автоморфизмов из $\mathfrak{A}(G)$, оставляющих инвариантным разложение i, — это в точности группа Γ, а если через Γ_j обозначить аналогичную подгруппу для разложения j, то $\Gamma=\Gamma_i$ и Γ_j сопряжены в $\mathfrak{A}(G)$. Пересечение Γ^0 таких Γ_j по всем $j\in I$ совпадает с ядром отмеченного гомоморфизма группы $\mathfrak{A}(G)$ в S_I. Таким образом, исходя из мономиального представления, мы вложим группу $\mathfrak{A}(G)$ в полупрямое произведение группы Γ^I и группы S. По поводу интересных специальных случаев мы сошлемся теперь на работы К. Шода [1, 2].

2. Треугольные группы автоморфизмов, связанные с прямыми разложениями. В этом пункте мы следуем работе В. Г. Житомирского [2]. Пусть снова задано разложение некоторой Ω-группы G в прямую сумму ее идеалов, причем для простоты изложения ограничимся лишь случаем конечного числа слагаемых:

$$G=G_1+G_2+\ldots+G_i+\ldots+G_n. \tag{1}$$

Этому разложению отвечают инвариантные ряды в G, и пусть

$$0=\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{G}_i\subset\ldots\subset\mathfrak{G}_n=G, \tag{2}$$

$\mathfrak{G}_i=\mathfrak{G}_{i-1}+G_i$, — один из таких рядов.

В группе $\mathfrak{A}(G)$ всех автоморфизмов Ω-группы G выделим треугольную относительно этого ряда часть Φ, т. е. подгруппу, состоящую из всех тех автоморфизмов, которые оставляют неподвижной каждую Ω-подгруппу $\mathfrak{G}_i$. В треугольной группе Φ выделим еще стабильную относительно ряда (2) часть Σ — Φ-централизатор этого ряда.

Обозначим дальше через Ψ прямое произведение групп $\mathfrak{A}(G_i)$. Мы можем считать, что все группы $\mathfrak{A}(G_i)$ и Ψ являются подгруппами в Φ. Нетрудно видеть, что при этом $\Psi\cap\Sigma=\varepsilon$. Будем называть Ψ диагональной частью группы Φ.

Если $\varphi\in\Phi$, то для каждого $g_i\in G_i$ имеем $g_i\varphi=$ $=h_{i-1}+g'_i$, где $g'_i\in G_i$ и $h_{i-1}\in\mathfrak{G}_{i-1}$. Если теперь положить

$g_i\psi = g'_i$ и $(\Sigma g_i)\psi = \Sigma g_i\psi$, то легко понять, что ψ есть автоморфизм Ω-группы G, принадлежащий Ψ. Понятно также, что автоморфизм $\varphi\psi^{-1}$ принадлежит Σ. Таким образом, доказана следующая теорема:

2.1. *Группа Φ есть полупрямое произведение своей стабильной части Σ и диагональной части Ψ.*

Рассмотрим теперь подробное строение группы Σ. Пусть Σ_{n-1} обозначает $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_{n-1})$-централизатор отрезка ряда (2) до $\mathfrak{G}_{n-1}$. Ясно, что Σ_{n-1} можно рассматривать как подгруппу в $\Sigma = \Sigma_n$, причем если $\mathfrak{z}_n$ — Σ-централизатор Ω-подгруппы $\mathfrak{G}_{n-1}$, то имеем $\Sigma_{n-1} \approx \Sigma/\mathfrak{z}_n$.

Так как $\mathfrak{z}_n$ действует тождественно в $G/\mathfrak{G}_{n-1}$ и $\mathfrak{G}_{n-1}$, то эта подгруппа абелева (седьмая глава). Легко также видеть, что Σ является полупрямым произведением нормального делителя $\mathfrak{z}_n$ и группы Σ_{n-1}: $\Sigma = \mathfrak{z}_n \leftthreetimes \Sigma_{n-1}$. Поступая аналогично с подгруппой Σ_{n-1}, мы и ее представим в виде полупрямого произведения. Продолжая процесс, мы получим две системы подгрупп $\Sigma \supset \Sigma_{n-1} \supset \ldots$ и $\mathfrak{z}_n, \mathfrak{z}_{n-1}, \ldots$ такие, что $\Sigma_i = \mathfrak{z}_i \leftthreetimes \Sigma_{i-1}$.

Отметим дальше, что каждая подгруппа $\mathfrak{z}_i$ является прямым произведением подгрупп $\mathfrak{z}_i^j$ $(1 \leqslant j \leqslant i-1)$, где $\mathfrak{z}_i^j$ есть подгруппа в $\mathfrak{z}_i$, состоящая из всех таких σ, что при каждом $g \in G_i$ выполняется $[g, \sigma] \in G_j$.

Группа Σ, как мы знаем, является нильпотентной группой.

Найдем сейчас ее центр.

Вначале приведем одно интересное вспомогательное свойство. Мы покажем, что все $[g, \sigma]$, $g \in G$, $\sigma \in \Sigma$, принадлежат центру аддитивной группы G^+. Если $g \in \mathfrak{G}_1$, то утверждение очевидно. Допустим, что оно установлено для всех $g \in \mathfrak{G}_{n-1}$, и пусть $g \in \mathfrak{G}_n$, $g = g_1 + g'$, $g_1 \in G_n$, $g' \in \mathfrak{G}_{n-1}$.

Имеем $[g, \sigma] = -g' + [g_1, \sigma] + g' + [g', \sigma]$, и поэтому достаточно установить, что элемент $[g_1, \sigma]$ принадлежит центру группы G^+. Так как $[g_1, \sigma] \in \mathfrak{G}_{n-1}$, то нужно лишь проверить, что этот элемент перестановочен с каждым $h \in \mathfrak{G}_{n-1}$. Последнее равносильно тому, что $g_1\sigma$ перестановочен с каждым таким h. Теперь имеем:

$$-h + g_1\sigma + h = -h + g_1\sigma + h\sigma^{-1}\sigma = -h + (g_1 + h\sigma^{-1})\sigma =$$
$$= -h + (h\sigma^{-1} + g_1)\sigma = -h + h + g_1\sigma = g_1\sigma,$$

что и требовалось. Отсюда, в частности, следует, что если $g=\sum_i g_i$, то $[g, \sigma]=\sum_i [g_i, \sigma]$.

Используя этот факт, легко также показать, что совокупность всех неподвижных относительно Σ элементов в G есть нормальный делитель аддитивной группы.

2.2. *Центру группы автоморфизмов Σ принадлежат те и только те автоморфизмы σ, для которых при любых $g \in G$ и $\gamma \in \Sigma$ выполняется:* 1) $[g, \sigma]\gamma=[g, \sigma]$ *и* 2) $[g, \gamma]\sigma=[g, \gamma]$.

То, что каждый автоморфизм с отмеченными свойствами принадлежит центру группы Σ, легко проверить непосредственно — в более общей ситуации это делается в седьмой главе. Пусть теперь автоморфизм σ принадлежит центру группы Σ, и допустим вначале, что первое условие не выполнено. Это означает, что для некоторого элемента $g \in G$ — можно считать, что этот g принадлежит одному из слагаемых G_i, — коммутатор $[g, \sigma]=u$ не принадлежит Σ-центру $Z_G(\Sigma)$. Пусть $g \in G_i$ и пусть $u\gamma \neq u$. Автоморфизм γ индуцирует некоторый автоморфизм γ', принадлежащий Σ_{i-1}. Для такого γ' имеем $u\gamma'=u\gamma$ и $g\gamma'=g$. Если теперь $u\gamma'=u+v$, $v \neq 0$, то получим $g\sigma\gamma'=(g+u)\gamma'=g+u+v$. С другой стороны, $g\gamma'\sigma=g\sigma=g+u$. Противоречие с $\sigma\gamma'=\gamma'\sigma$.

Допустим далее, что не выполнено второе условие.

Это значит, что найдется коммутатор $u=[g, \gamma]$, на который автоморфизм σ действует не тождественно. Имеем $g\sigma=g+h_1$, $u\sigma=u+h_2$, где h_1 и h_2 принадлежат центру группы G^+, и по предположению $h_2 \neq 0$. Тогда $g\sigma\gamma=(g+h_1)\gamma=g+u+h_1$ и $g\gamma\sigma=(g+u)\sigma=g+h_1+$ $+u+h_2$, а это снова ведет к противоречию с перестановочностью σ и γ. Этим утверждение доказано.

Более точное описание свойств группы Σ может быть получено, если еще допустить, что все G_i являются попарно изоморфными абелевыми Ω-группами. В этом случае можно показать, что Σ-коммутант совпадает с $\mathfrak{G}_{n-1}$ и Σ-центр есть G_1. Поэтому центр группы Σ совпадает с $\mathfrak{z}_n^1$. И вообще нетрудно установить, что i-й фактор верхнего центрального ряда в Σ изоморфен прямому произведению групп $\mathfrak{z}_n^i, \mathfrak{z}_{n-1}^{i-1}, \ldots, \mathfrak{z}_{n-i+1}^1$.

Некоторые обобщения приведенных фактов на случай бесконечных прямых сумм содержатся в заметке В. Г. Житомирского [5]. Что касается рассмотренного случая, то все здесь — обобщение известной картины, относящейся к группе всех треугольных матриц заданного порядка.

3. Обобщенные матрицы. Как хорошо известно, эндоморфизмы и автоморфизмы векторных пространств могут быть представлены матрицами над соответствующими полями. Это матричное представление играет большую роль в теории линейных групп — групп автоморфизмов векторных пространств. Аналогичная конструкция возможна и для прямых сумм произвольных мультиоператорных групп. Сейчас мы рассмотрим эту конструкцию.

Допустим, что фиксировано некоторое разложение Ω-группы G в прямую сумму. Мы будем предполагать, что число слагаемых конечно, хотя аналогично тому, как это делается в следующем параграфе, можно рассмотреть и общий случай. Пусть

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_i + \ldots + G_n \tag{1}$$

— такое разложение. Каждый элемент $a \in G$ имеет вид $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, и если σ — эндоморфизм группы G, то $a\sigma = \sum a_i\sigma$, так что для задания эндоморфизма σ достаточно указать, как σ действует на элементы из слагаемых G_i. Если $a_i\sigma = \sum a_{ik}$, то будем писать $a_i\sigma = \sum a_i\sigma_{ik}$. Так как элемент $a_{ik} = a_i\sigma_{ik}$ однозначно определяется элементом a_i и отображением σ, то σ_{ik} дает однозначное отображение G_i в G_k. Легко проверить, что это отображение является гомоморфизмом Ω-группы G_i в Ω-группу G_k.

Покажем еще, что любые две подгруппы из G_k вида $G_i\sigma_{ik}$ и $G_j\sigma_{jk}$ при $i \neq j$ перестановочны поэлементно. Пусть $a_i \in G_i$, $b_j \in G_j$. Тогда $(a_i + b_j)\sigma = a_i\sigma + b_j\sigma = b_j\sigma + a_i\sigma$, и следовательно, имеем равенство $\sum a_i\sigma_{ik} + \sum b_j\sigma_{jk} = \sum b_j\sigma_{jk} + \sum a_i\sigma_{ik}$. Используя дальше поэлементную перестановочность различных слагаемых

разложения (1), получим:

$$a_i\sigma_{i1}+b_j\sigma_{j1}+\sum_{k=2}^{n}a_i\sigma_{ik}+\sum_{k=2}^{n}b_j\sigma_{jk}=$$
$$=b_j\sigma_{j1}+a_i\sigma_{i1}+\sum_{k=2}^{n}b_j\sigma_{jk}+\sum_{k=2}^{n}a_i\sigma_{ik}.$$

Отсюда $a_i\sigma_{i1}+b_j\sigma_{j1}=b_j\sigma_{j1}+a_i\sigma_{i1}$. Аналогично проверяются равенства:

$$a_i\sigma_{ik}+b_j\sigma_{jk}=b_j\sigma_{jk}+a_i\sigma_{ik},\quad k=2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Мы проверили перестановочность по сложению. Кроме этой перестановочности, имеет место еще и перестановочность следующего типа: если $\omega\in\Omega$ — n-арная операция и $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n$ — наборы по n элементов в G_i, то

$$\left(\sum_i a_i^1\sigma_{ik}\right)\left(\sum_i a_i^2\sigma_{ik}\right)\ldots\left(\sum_i a_i^n\sigma_{ik}\right)\omega=$$
$$=\sum_i (a_i^1\sigma_{ik})(a_i^2\sigma_{ik})\ldots(a_i^n\sigma_{ik})\,\omega.$$

Проверим это соотношение. Пусть $a^1=\sum\limits_i a_i^1,\ a^2=\sum\limits_i a_i^2,\ \ldots$ $\ldots,\ a^n=\sum\limits_i a_i^n$. Тогда

$$(a^1a^2\ldots a^n\omega)\,\sigma=\sum_i (a_i^1a_i^2\ldots a_i^n\omega)\,\sigma=$$
$$=\sum_i\left(\sum_k (a_i^1a_i^2\ldots a_i^n\omega)\,\sigma_{ik}\right)=\sum_k\left(\sum_i (a_i^1a_i^2\ldots a_i^n\omega)\,\sigma_{ik}\right)=$$
$$=\sum_k\left(\sum_i (a_i^1\sigma_{ik})(a_i^2\sigma_{ik})\ldots(a_i^n\sigma_{ik})\,\omega\right).$$

Далее,

$$(a^1\sigma)(a^2\sigma)\ldots(a^n\sigma)\,\omega=\left(\sum_i a_i^1\sigma\right)\left(\sum_i a_i^2\sigma\right)\ldots\left(\sum_i a_i^n\sigma\right)\omega=$$
$$=\left(\sum_i\left(\sum_k a_i^1\sigma_{ik}\right)\right)\left(\sum_i\left(\sum_k a_i^2\sigma_{ik}\right)\right)\ldots\left(\sum_i\left(\sum_k a_i^n\sigma_{ik}\right)\right)\omega=$$
$$=\sum_k\left(\sum_i a_i^1\sigma_{ik}\right)\left(\sum_i a_i^2\sigma_{ik}\right)\ldots\left(\sum_i a_i^n\sigma_{ik}\right)\omega.$$

Сравнивая окончательные результаты двух последних выражений, получаем требуемое соотношение.

Таким образом, эндоморфизму σ отвечает матрица из n^2 гомоморфизмов $\sigma_{ik}: G_i\to G_k$, удовлетворяющих

дополнительным условиям перестановочности. Обозначим эту матрицу через $\sigma^{\mu} = (\sigma_{ik})$.

Непосредственной проверкой устанавливается, что и обратно, всякая такая матрица с отмеченными условиями перестановочности определяет эндоморфизм Ω-группы G, и следовательно, между эндоморфизмами Ω-группы G и обобщенными матрицами (σ_{ik}) имеется взаимно однозначное соответствие.

Условимся еще применять следующее обозначение: если $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ — элемент в G, то через a^{μ} будем обозначать строку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. При этом легко проверить формулу $(a\sigma)^{\mu} = a^{\mu} \cdot \sigma^{\mu}$, где справа строка умножается на матрицу, — смысл такого «умножения» нетрудно понять.

Найдем дальше матрицу, отвечающую произведению эндоморфизмов. Пусть $a \in G$, σ и φ — эндоморфизмы Ω-группы G и пусть этим эндоморфизмам отвечают матрицы (σ_{ik}) и (φ_{kj}). Вычислим $a\sigma\varphi$:

$$(a\sigma)\varphi = \Big(\sum_i \Big(\sum_k a_i\sigma_{ik}\Big)\Big)\varphi = \sum_i \Big(\sum_k (a_i\sigma_{ik}\varphi)\Big) =$$
$$= \sum_i \Big(\sum_k \Big(\sum_j (a_i\sigma_{ik})\varphi_{kj}\Big)\Big) = \sum_i \Big(\sum_j a_i \Big(\sum_k \sigma_{ik}\varphi_{kj}\Big)\Big) =$$
$$= \sum_i \Big(\sum_j a_i (\sigma\varphi)_{ij}\Big).$$

При этом суммирование по k производится в Ω-группе $H(G_i, G_j)$ всех отображений G_i в G_j. Мы видим, что и здесь имеет место обычное матричное умножение. К сожалению, со сложением и с операциями системы Ω дело обстоит хуже: если обычным путем (покомпонентно) определить все эти операции для матриц, то такие действия, вообще, не соответствуют действиям в Ω-почти кольце $K(G)$. Для того чтобы соответствующее свойство выполнялось, нужно потребовать, чтобы все слагаемые были абелевыми Ω-группами. Если, дополнительно, все слагаемые коммутативны, то все операции Ω-группы переносятся и на матрицы, и мы, таким образом, придем к матричному представлению Ω-кольца всех эндоморфизмов прямой суммы коммутативных Ω-групп.

Рассмотрим теперь следующий, естественный здесь, вопрос. Пусть задан некоторый автоморфизм τ Ω-группы G, переводящий разложение (1) в новое разложение:

$$G = G'_1 + G'_2 + \ldots + G'_i + \ldots + G'_n, \tag{2}$$

где $G'_i = G_i\tau$, и пусть σ — эндоморфизм Ω-группы G. Допустим, что эндоморфизму σ в старом разложении отвечает матрица (σ_{ik}) и в новом — (φ_{ik}). Требуется найти связь между этими матрицами. Такая постановка вопроса требует уточнения, так как здесь приходится учитывать то обстоятельство, что элементы матрицы также отнесены к определенным разложениям и не являются (как в обычных матрицах) самостоятельными объектами. В связи с этим нам понадобится еще одно определение.

Пусть даны две Ω-группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, и пусть σ—некоторый гомоморфизм $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{G}_2$. Допустим далее, что задан некоторый изоморфизм φ между группами $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}'_1$ $(\mathfrak{G}_1\varphi = \mathfrak{G}'_1)$ и $\mathfrak{G}_2$ и $\mathfrak{G}'_2$ $(\mathfrak{G}_2\varphi = \mathfrak{G}'_2)$. При этом гомоморфизму σ отвечает гомоморфизм σ': $\mathfrak{G}'_1 \to \mathfrak{G}'_2$, определяемый следующим образом. Если $a' \in \mathfrak{G}'_1$, $a' = a\varphi$, то полагаем $a'\sigma' = a\varphi\sigma' = (a\sigma)\varphi = (a\sigma)'$. Этот гомоморфизм естественно назвать результатом перенесения σ на пару $\mathfrak{G}'_1$ и $\mathfrak{G}'_2$ за счет изоморфизма φ. Мы могли бы даже обозначить σ' той же буквой σ.

Теперь понятно, что матрицу (σ_{ik}), связанную с разложением (1), можно отнести и к разложению (2): каждому $\sigma_{ik} : G_i \to G_k$ сопоставляется соответствующее отображение $\sigma'_{ik} : G_i\tau \to G_k\tau$. Понятно также, что при этом матрице (σ'_{ik}) будет отвечать новый эндоморфизм Ω-группы G. Обозначим его через σ' и найдем связь между σ' и σ. Пусть a — произвольный элемент в G.

Тогда

$$a\tau\sigma' = \sum_i \Big(\sum_k (a\tau)_i\, \sigma'_{ik}\Big) = \sum_i \Big(\sum_k a_i\sigma_{ik}\tau\Big) = \sum_i \Big(\sum_k a_i\sigma_{ik}\Big)\tau = a\sigma\tau.$$

Отсюда $\tau\sigma' = \sigma\tau$ и $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$. Если теперь выбрать матрицу автоморфизма τ по второму разложению, то мы найдем, что матрицы (σ'_{ik}) и (φ_{ik}) сопряжены, а это и есть решение поставленного вопроса.

Возможен и другой подход к этой задаче. Мы могли бы определить матрицу перехода от одного разложения к другому — элементами такой матрицы служат гомоморфизмы слагаемых одного разложения в слагаемые другого разложения. В таком случае нужную связь мы устанавливаем прямым матричным счетом, причем здесь уже не нужно вводить эндоморфизм σ'! Действительно, если A — матрица перехода, a^{μ} и $a^{\mu'}$ — строки, отвечающие элементу a в одном и другом разложениях, то имеем $a^{\mu}A = a^{\mu'}$. Дальше получаем $(a\sigma)^{\mu'} = a^{\mu'}\cdot\sigma^{\mu'} = (a^{\mu}A)\,\sigma^{\mu'} = (a^{\mu}\sigma^{\mu})\,A$.

Отсюда уже выводим интересующее вас соотношение $A\sigma^{\mu'} = \sigma^{\mu}A$. Понятно, что представляет интерес также и следующий вопрос: указать алгоритм, который позволял бы для каждого эндоморфизма по его матрице распознать, будет ли этот эндоморфизм автоморфизмом. В классической теории этот вопрос решается, как известно, с помощью определителей. Возможно, что нечто аналогичное (при подходящих ограничениях) может получиться и в рассматриваемом случае. Мы этот вопрос оставляем без рассмотрения и лишь заметим попутно, что в работе Ф. Хиггинса [2] определяются детерминанты эндоморфизмов Ω-группы.

Используя обобщенные матрицы, можно, вероятно, глубже изучить группу всех автоморфизмов однородной вполне приводимой Ω-группы с условием минимальности для идеалов. На этом языке можно также сделать более наглядными результаты из предыдущего пункта. Некоторые результаты о группах автоморфизмов прямых произведений абелевых групп имеются в работе З. М. Кишкиной [1], в которой используются обобщенные матрицы.

В заключение отметим, что значительно сложнее обстоит дело с полными прямыми суммами бесконечного числа слагаемых.

Мало известно о группе всех автоморфизмов прямой суммы (даже конечной) универсальных алгебр. Не изучались группы автоморфизмов приведенных прямых, свободных и приведенных свободных (вербальных) произведений общих алгебраических систем.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ ПАРЫ

1. Введение. Многие из рассматривавшихся раньше вопросов возникли в порядке обобщения некоторых фактов теории линейных представлений и теории групп автоморфизмов векторных пространств. Теперь мы идем в обратном направлении, и свойства линейных групп и линейных представлений рассматриваются с общих позиций предыдущих глав.

В роли Ω-группы здесь будут выступать линейные, как правило, левые модули над некоторым кольцом, а в основном над полем или телом, т. е. векторные пространства. В том случае, когда, как сейчас, система операторов Ω сама является хорошей алгебраической системой, возникают новые задачи и новые возможности. Здесь будут сделаны некоторые добавления к предыдущему, связанные с этими новыми возможностями. Абстрактные свойства линейных групп рассматриваются еще в девятой главе. В настоящей главе приводятся некоторые замечания о группах автоморфизмов линейных алгебраических систем.

Каждый линейный модуль (правый или левый) над кольцом можно трактовать как Ω-группу, в которой Ω состоит из унарных операторов — элементов основного кольца. Такая Ω-группа абелева, а коммутативной она будет, если коммутативно основное кольцо. Векторное пространство над телом T — это абелева мультиоператорная группа, а векторное пространство над полем — коммутативная Ω-группа. Векторные пространства (над телами или полями) обладают важной для нас особенностью — они локально нетеровы и, более того, локально финитарны. Последним свойством обладают также вполне

приводимые модули, а локально нетеровыми являются левые (правые) модули над нетеровым слева (справа) кольцом (см. об этом, например, Зарисский — Самюэль [1]).

Всюду дальше слово модуль будет употребляться только в указанном сейчас смысле — это абелева группа с системой операторов, являющейся кольцом. В аналогичном смысле мы говорим о подмодулях — они должны быть допустимыми относительно всего кольца. Кроме того, мы всегда предполагаем, что если в основном кольце имеется единица, то она действует как тождественный оператор.

Пусть, далее, G — некоторый левый линейный модуль над кольцом L, и S — совокупность всех однозначных отображений множества G в себя. В S имеется умножение, и, как мы знаем из п. 1.1.6, S можно наделить также сложением и всеми операциями из L. При этом совокупность всех эндоморфизмов модуля G оказывается замкнутой относительно сложения и умножения и образует кольцо — кольцо всех эндоморфизмов модуля G. Обозначим это кольцо через $H(G)$. Легко видеть, что $H(G)$ выдерживает также умножение на элементы из L, принадлежащие центру L, и следовательно, $H(G)$ становится кольцом с операторами — кольцом операторов служит центр кольца L. Если L — тело, то $H(G)$ — (линейная) алгебра над центром тела L, а если L — поле, то $H(G)$ — алгебра над тем же L.

В дальнейшем, если G — векторное пространство над некоторым телом T, то под $H = H(G)$ всегда будем понимать алгебру всех эндоморфизмов пространства G, рассматриваемую над центром тела T. Нетрудно понять, что даже в том случае, когда пространство G конечномерно, алгебра H может и не быть конечномерной. Можно лишь утверждать, что если тело T имеет конечный ранг над своим центром, то из конечности размерности G вытекает, что и H имеет конечную размерность.

Группа всех автоморфизмов L-модуля G называется *полной линейной группой* этого модуля. Она состоит из всех обратимых элементов кольца $H(G)$ и обозначается через $\Gamma L(G)$.

Допустим теперь, что вместе с L-модулем G задано еще кольцо K, для которого центр L служит системой операторов. В таком случае каждый гомоморфизм операторного кольца K в операторное кольцо $H(G)$ порождает представление K относительно G. Мы приходим здесь к (вообще двухстороннему) модулю (G, K). В этом модуле левое кольцо L играет только вспомогательную роль и поэтому оно не участвует в обозначении. Соответственно, если Γ — группа, то каждый гомоморфизм этой группы в полную линейную группу $\Gamma L(G)$ определяет представление Γ относительно G и пару (G, Γ). Такая пара называется *линейной парой*, а соответствующее представление называется *линейным представлением*. Отметим еще, что линейные группы — это всевозможные подгруппы полной линейной группы.

Сейчас мы увидим, что с каждым модулем типа (G, K) или линейной парой (G, Γ) естественно связаны некоторый сопряженный модуль и сопряженная пара.

Пусть G — левый L-модуль. Через G^* обозначим множество всех линейных отображений L-модуля G в кольцо L, рассматриваемое как левый L-модуль. Если для любых пар u, $v \in G^*$, $\alpha \in L$ и $a \in G$, положить

$$a(u+v) = au + av \text{ и } a(u\alpha) = (au)\alpha,$$

то, как нетрудно проверить, таким образом мы превратим G^* в правый L-модуль (ср. п. 1.1.6). Этот правый L-модуль называется *сопряженным левому модулю* G.

Если, далее, задано представление кольца K (или группы Γ) относительно G, то этому представлению отвечает сопряженное — уже левое представление относительно модуля G^*. Определяется оно следующим образом. Если $\sigma \in K$ (или $\sigma \in \Gamma$), то для любого $u \in G^*$ считаем, что $\sigma \circ u$ есть элемент в G^*, действующий по правилу

$$a(\sigma \circ u) = (a \circ \sigma) u$$

при любом $a \in G$.

То, что так действительно определяется представление, легко проверить.

В связи с определением сопряженного модуля и сопряженного представления полезно еще заметить

следующее. Если M — произвольное множество и L — кольцо, то множество всех функций, определенных на M и со значениями в L, также является кольцом — это кольцо, как мы знаем, совпадает с полной прямой суммой L^M колец, изоморфных кольцу L. Если, далее, некоторая группа Γ действует в качестве группы подстановок на множестве M, то, в соответствии с рассмотрениями п. 2.1.4, группа Γ начинает действовать в качестве группы автоморфизмов кольца L^M. Допустим теперь, что G — левый L-модуль. В таком случае сопряженный модуль G^* — это совокупность всех линейных функций из L^G. G^* не является подкольцом в L^G и замкнуто только относительно сложения и умножения на элементы из L справа. Нетрудно понять, что сопряженное представление Γ относительно G^* происходит из отмеченного выше представления Γ относительно L^G.

При рассмотрении линейных модулей наряду с исходным основным представлением целесообразно рассматривать еще так называемое *присоединенное представление*. Приведем соответствующие определения.

Напомним вначале, что если K — кольцо, то, полагая

$$u \circ v = u + v - uv, \quad u,\ v \in K,$$

мы определим в K ассоциативное умножение, которое называется *присоединенным умножением*. При этом нуль кольца играет роль единицы в присоединенном умножении, так что относительно присоединенного умножения K становится полугруппой с единицей. Если само кольцо K обладает единицей ε, то соответствие $u \to \varepsilon - u$ определяет изоморфизм присоединенной полугруппы K и мультипликативной полугруппы кольца K. Действительно,

$$u \circ v \to \varepsilon - u \circ v = \varepsilon - (u + v - uv) = (\varepsilon - u)(\varepsilon - v).$$

Допустим теперь, что задано правое представление кольца K относительно левого L-модуля G, и пусть действие K в G обозначено через gu, $g \in G$, $u \in K$. Для любых $g \in G$ и $u \in K$ мы положим:

$$g \circ u = g - gu.$$

Непосредственно проверяется тождество

$$(g \circ u) \circ v = g \circ (u \circ v).$$

Таким образом, мы получаем представление присоединенной полугруппы K эндоморфизмами модуля G; такое представление называется *присоединенным представлением* кольца K. Нуль кольца K действует при этом в G как единичный оператор.

Обозначим, далее, через $K^{\cdot}$ мультипликативную полугруппу кольца K° и через K^{0} — соответствующую присоединенную полугруппу. Пусть еще $(G, K^{\cdot})$ и (G, K°) — отвечающие им пары; первая задана исходным представлением, а вторая — на основе присоединенного представления. Допустим, кроме того, что в K имеется единица, которая действует в G как единичный оператор. Определим отображение $\mu : (G, K^{\cdot}) \to (G, K^{\circ})$ по правилу: μ тождественно на G и $u^{\mu} = \varepsilon - u$ для $u \in K$. Имеем:

$$(g \circ u)^{\mu} = g \circ u = g - gu = g(\varepsilon - u) = gu^{\mu}.$$

Это означает, что пары $(G, K^{\cdot})$ и (G, K°) изоморфны.

Элемент $u \in K$ называется *присоединенно обратимым*, если имеется такой v, что $u \circ v = v \circ u = 0$. Совокупность всех присоединенно обратимых элементов из K образует группу — эту группу обозначим через Φ. Если K обладает единицей, то u тогда и только тогда присоединенно обратим, когда $\varepsilon - u$ — обратимый элемент кольца K. Следовательно, если K — кольцо с единицей и Γ — группа всех его обратимых элементов, то $\Gamma = \varepsilon - \Phi$ и группы Γ и Φ изоморфны. Если еще задано представление K относительно G и ε действует в G тождественно, то пары (G, Γ) и (G, Φ) также изоморфны, причем здесь Φ действует в G как группа автоморфизмов.

Понятие присоединенного представления, так же как и понятие присоединенного умножения, полезно при рассмотрении радикала Джекобсона.

Пусть, например, K — кольцо и U — его идеал, все элементы которого присоединенно обратимы. Покажем, что если задано некоторое неприводимое представление K относительно абелевой группы G, то U принадлежит ядру представления. Пусть $g \in G$, $u \in U$ и $gu \neq 0$. Так как представление неприводимо, то при некотором v

должно быть $guv = g$. Пусть $u' = uv$ и пусть v' — присоединенно обратный к u'. Имеем $0 = g - gu'$; $0 = 0 \circ v' = (g \circ u') \circ v' = g \circ (u' \circ v') = g \circ 0 = g$. Противоречие с $g \neq 0$. Следовательно, $gu = 0$, и U принадлежит ядру представления (ср. Н. Джекобсон [4]).

Из этого замечания следует, в частности, что если все элементы кольца K присоединенно обратимы, то в любой присоединенной линейной паре (G, K°) радикал представления $\alpha_G(K^\circ)$ совпадает со всей группой K°. При этом (ср. § 7.3) сразу же возникает вопрос, ответа на который мы не знаем: обладает ли каждая такая группа K° всегда центральной системой.

Наконец, заметим, что, говоря о линейных представлениях, нельзя не упомянуть о полулинейных представлениях (см., например, Р. Бер [7]). Это пример двуосновных представлений (ср. п. 2.2.4), а определенное ранее понятие гомоморфизма пар по типу аналогично понятию полулинейного преобразования (см. также п. 4.4 настоящей главы).

2. Матрицы и матричные представления. Теория линейных представлений во многом выигрывает благодаря наличию удобного матричного языка. Сейчас мы опишем этот язык.

Пусть M и N — два множества и L — кольцо. Будем рассматривать всевозможные функции $A, B, \ldots$ двух переменных, определенные на декартовом произведении $M \times N$ и со значениями в L. Такие функции назовем здесь M,N-матрицами над L, а множество всех этих матриц обозначим через $H = H(M, N, L)$. Как обычно, через $a_{\alpha\beta}$ будут обозначаться значения функции при аргументах α и β: $A(\alpha, \beta) = a_{\alpha\beta}$, а сама функция-матрица обозначается также через $(a_{\alpha\beta})$. Если $A = (a_{\alpha\beta})$ и $B = (b_{\alpha\beta})$ — две M,N-матрицы, то, полагая $A + B = (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})$, мы определим в H коммутативное сложение, относительно которого H становится абелевой группой. Если еще для любых $u \in L$ и $A = (a_{\alpha\beta}) \in H$ положить $uA = (ua_{\alpha\beta})$ и $Au = (a_{\alpha\beta}u)$, то мы придем, таким образом, к левому и правому модулям над L.

Для того чтобы можно было определить умножение матриц, нужны ограничения. Если $A = (a_{\alpha\beta})$ — матрица,

то, фиксируя в ней первый аргумент, мы получим функцию одной переменной — строку $\overline{a}_\alpha = (\overline{a}_\alpha(\beta))$, и аналогично, фиксируя второй аргумент, получим столбец $\overline{a}^\beta = (\overline{a}^\beta(\alpha))$. Матрица A называется *конечнострочной*, если во всех ее строках имеется лишь конечное число ненулевых значений. Соответственно определяются матрицы с конечными столбцами. Пусть теперь A — M,N-матрица и B — N,N'-матрица, причем A — конечнострочная или B — конечностолбцовая. Тогда их произведение $C = AB$ — M,N'-матрица, определяемая формулой

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta},$$

где $\alpha \in M$, $\gamma \in N$, $\beta \in N'$, и мы считаем, что, суммируя бесконечное число нулей, снова получаем нуль.

Согласно определению произведение M,N-матрицы A и N'',N'-матрицы B определено лишь тогда, когда $N = N''$, и матрица A конечнострочна или матрица B имеет конечные столбцы. Если обе матрицы A и B конечнострочны, то таким же будет и их произведение, и аналогично для конечностолбцовых сомножителей. Можно говорить также и об умножении трех матриц, причем такое умножение ассоциативно. Кроме того, если A, B и C — три матрицы, A и B — M,N-матрицы и C — M,N'-матрица, причем A и B — конечнострочны или C — конечностолбцовая, то $(A+B)C = AC + BC$. Аналогично можно говорить и о левой дистрибутивности. Справедливы также следующие правила: $(uA)B = u(AB)$ и $A(Bu) = (AB)u$ при любом $u \in L$. Если, далее, $A = (a_{\alpha\beta})$ — — M,N-матрица, то через A^* мы обозначим *транспонированную* N,M-матрицу: $A^*(\alpha, \beta) = A(\beta, \alpha)$. При этом легко видеть, что если L коммутативно и A и B перемножаемы, то $(AB)^* = B^*A^*$.

Квадратная матрица — это такая матрица, в которой M и N — одно и тоже множество. Функция $\overline{a} = (a_{\alpha\alpha})$ — *главная диагональ квадратной матрицы* $(a_{\alpha\beta})$. Все конечнострочные квадратные M,M-матрицы относительно определенных операций образуют кольцо, это кольцо является операторным кольцом над центром кольца L. Обозначим такое кольцо через $K = K(M, L)$. Оно

называется полным матричным кольцом. Кольцо K содержит в качестве подкольца кольцо всех конечных матриц, т. е. таких матриц, у которых все значения $a_{\alpha\beta}$, за исключением конечного числа, — нули, а также подкольцо всех матриц, одновременно конечнострочных и конечностолбцовых. Соответственно можно говорить о кольце $K^* = K^*(M, L)$ всех конечностолбцовых матриц. Для коммутативного L K и K^* — антиизоморфные кольца. Этим кольцам отвечают некоторые группы — группы всех их обратимых элементов. В частности, такую группу для K называют *полной матричной группой* (и обозначают через $\Gamma L(M, L)$).

Квадратные матрицы естественным образом определяют некоторые линейные модули — представления.

Пусть M — некоторое множество, L — кольцо и K^* — кольцо всех конечностолбцовых M, M-матриц. Обозначим еще через $\overline{L}$ множество всех однозначных функций, определенных на множестве M и принимающих значения в L. Это множество можно рассматривать также как левый L-модуль, а элементы его можно считать $(1, M)$-матрицами — строками над L. При этом 1 обозначает множество, состоящее из одного элемента, обозначенного через 1. Если $\overline{a} \in \overline{L}$ и $A \in K^*$, то определено произведение $\overline{a}A$, и это произведение принадлежит $\overline{L}$. Исходя из этого умножения и определяется модуль $(\overline{L}, K^*)$. Если ограничиться конечнозначными функциями из $\overline{L}$ и вместо K^* взять кольцо K всех конечнострочных матриц, то и здесь аналогично получим модуль.

Подобным образом можно определять левые K-модули, если элементы из $\overline{L}$ рассматривать как столбцы. Все такие модули-представления мы будем называть *естественными* для соответствующих колец (и аналогично для групп).

Отметим здесь одно интересное обстоятельство. Пусть $\overline{L}_0$ — левый модуль конечнозначных строк-отображений M в L и пусть еще f — некоторый столбец-отображение M в L. Легко видеть, что отображение $x \to x \cdot f$, $x \in \overline{L}_0$, есть линейное отображение модуля $\overline{L}_0$ в кольцо L, рассматриваемое как левый L-модуль. Таким образом, столбцу f отвечает некоторый определенный элемент из

сопряженного модуля $\bar{L}_0^*$. Такое соответствие, как нетрудно понять, есть гомоморфное отображение правого модуля столбцов в указанный сопряженный модуль. Если дополнительно предположить, что в L имеется единица, то отмеченное отображение в действительности оказывается изоморфизмом правого модуля столбцов и сопряженного модуля $\bar{L}_0^*$, и мы можем отождествить эти модули. При этом, если K — кольцо всех конечнострочных M,M-матриц над L и $(\bar{L}_0, K)$ — соответствующий правый модуль, то умножение элементов из K слева на столбцы из $\bar{L}_0^*$ определяет сопряженное представление.

Приведем теперь некоторые замечания о связях матриц с гомоморфизмами и эндоморфизмами. Будем при этом предполагать, что в L имеется единица, действующая всегда тождественно. Допустим, что заданы два левых L-модуля G и G', являющихся дискретными прямыми суммами циклических модулей

$$G = \sum_{\alpha \in M} G_\alpha; \; G' = \sum_{\beta \in N} G'_\beta; \; G_\alpha = Le_\alpha; \; G'_\beta = Le'_\beta,$$

причем будем предполагать, что выполняется следующее условие свободы: если $\lambda \in L$ и $\lambda \neq 0$, то для любых базисных элементов e_α, e'_β должно быть $\lambda e_\alpha \neq 0$ и $\lambda e'_\beta \neq 0$. Допустим далее, что задан гомоморфизм $\varphi \colon G \to G'$. Этот гомоморфизм будет полностью определен, если мы будем знать образы базисных элементов e_α, $\alpha \in M$. Используя условия относительно модуля G', мы имеем:

$$e_\alpha^\varphi = \sum a_{\alpha\beta}(\varphi)\, e'_\beta,$$

где ненулевых слагаемых конечное число и коэффициенты $a_{\alpha\beta}(\varphi)$ определяются однозначно гомоморфизмом φ. Теперь мы сопоставим гомоморфизму φ конечнострочную матрицу $\varphi^\mu = A(\varphi) = (a_{\alpha\beta}(\varphi))$. Такое соответствие является взаимно однозначным, причем если через Z обозначить центр кольца L, то левый Z-модуль Hom (G, G') (п. 1.1.6) оказывается изоморфным левому Z-модулю M,N-матриц над L. Здесь исключительно важным является то обстоятельство, что за счет перехода к матричному изображению гомоморфизмы приобретают «самостоятельность», — теперь можно рассматривать их независимо от исходных объектов G и G'.

Этого не было в общих рассмотрениях предыдущего параграфа.

В переходе на матричный язык можно пойти еще дальше. Понятно, что в рассматриваемом нами случае L-модули G и G' изоморфны L-модулям M- и соответственно N-строк над L. Если $a \in G$, то через a^{μ} условимся обозначать соответствующую строку, и тем же μ мы обозначим переход от элементов из G' к соответствующим N-строкам. При этом справедлива следующая формула:

$$(a\varphi)^{\mu} = a^{\mu} \cdot \varphi^{\mu},$$

сводящая применение гомоморфизма к матричному умножению. Если в случае коммутативного кольца L в этой формуле перейти к транспонированным матрицам: $(a^{\mu}\varphi^{\mu})^* = (\varphi^{\mu})^*(a^{\mu})^*$, то мы получаем новый, сопряженный, способ описания гомоморфизмов из G в G'. При этом здесь, и в аналогичной ситуации раньше, требования коммутативности L можно было бы избежать, если бы переход к транспонированной матрице сопровождался одновременно рассмотрением ее над противоположным кольцом. Ср. Н. Бурбаки [2].

Приведем еще одно замечание относительно случая, когда в L отсутствует единица. Модули G и G' мы будем сразу рассматривать как модули (конечнозначных) строк, соответственно M- и N-строк, над L. Если A — некоторая конечнострочная M, N-матрица над L, то отображение $x \to xA$, $x \in G$, есть гомоморфизм из G в G'. Таким образом, и при отсутствии единицы в L матрице A все еще отвечает некоторый гомоморфизм, принадлежащий $\mathrm{Hom}\,(G, G')$. Однако при этом не каждый гомоморфизм может быть так получен, и двум разным матрицам может отвечать один гомоморфизм.

Возвращаясь к предыдущей ситуации, допустим, что $G' = G$. В таком случае мы приходим к описанию эндоморфизмов L-модуля G конечнострочными матрицами. При этом мы имеем изоморфное соответствие кольца всех эндоморфизмов модуля G и кольца K всех конечнострочных M, M-матриц над L. Больше того, отмеченная только что формула определяет изоморфизм модуля $(G, H(G))$ и естественного модуля $(\bar{L}_0, K)$, о котором раньше мы уже говорили.

Отметим еще одно важное обстоятельство, связанное с модулем $(\bar{L}_0, K)$.

Присоединим к множеству M произвольный, не входящий в него элемент и новое множество обозначим через M'. Каждой M, M-матрице A мы сопоставим теперь M', M'-матрицу A', определяемую правилом, которое легко уяснить из следующей таблицы (здесь 1 — единица в L):

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0 \dots 0 \dots \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{A} \end{array}\right).$$

Соответственно, если $\bar{a}$ — некоторая M-строка, то и ей мы сопоставим M', M'-матрицу, определяемую правилом:

$$\bar{a}' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \bar{a} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{E} \end{array}\right).$$

Здесь E — единичная M, M-матрица (на главной диагонали единицы, а на остальных местах нули).

Пусть дальше Γ — группа всех обратимых (конечнострочных) M, M-матриц и Γ' — такая же группа M', M'-матриц. Легко проверить, что отображение $A \to A'$ определяет изоморфное вложение Γ в Γ', а отображение $\bar{a} \to \bar{a}'$ есть изоморфизм аддитивной группы строк в мультипликативную группу Γ'. При этом непосредственно проверяется следующая формула:

$$(\bar{a}A)' = (A')^{-1} \cdot \bar{a}' \cdot A'.$$

Эта формула показывает, что пара $(\bar{L}_0, \Gamma)$ изоморфна некоторой внутренней паре в группе Γ'.

Если, далее, λ — обратимый элемент в L, то сопоставим этому λ матрицу

$$\lambda' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0\ 0 \dots \\ \hline 0 & \\ 0 & \mathrm{E} \\ \vdots & \end{array}\right).$$

Эта матрица обратима, причем легко проверяется формула

$$(\lambda\bar{a})' = \lambda'\bar{a}'(\lambda')^{-1}.$$

Кроме того, заметим, что матрицы λ' и A' всегда перестановочны.

При выводе этих формул естественно воспользоваться правилом клеточного умножения матриц. Остановимся на этом правиле несколько подробнее.

Пусть L-модуль G, как и раньше, есть прямая сумма циклических модулей: $G = \sum G_\alpha$, $\alpha \in M$, с соблюдением условия свободы, и допустим, что множество M некоторым образом разбито на подмножества M_i, $i \in I$. В соответствии с этим разбиением мы укрупним исходное разложение, полагая $\mathfrak{G}_i = \sum G_\alpha$, $\alpha \in M_i$. Тогда $G = \sum \mathfrak{G}_i$, $i \in I$. Согласно общим рассмотрениям предыдущего параграфа теперь каждому эндоморфизму L-модуля G отвечает конечнострочная матрица, элементами которой служат $\sigma_{ik} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_k)$, $i, k \in I$. Умножение таких матриц осуществляется по обычным правилам матричного умножения. С другой стороны, элемент σ_{ik} можно представить M_i, M_k-матрицей над кольцом L. Таким образом, умножение M, M-матриц сведется к умножению обобщенных (укрупненных) I, I-матриц. Это правило клеточного умножения матриц легко распространить на умножение прямоугольных матриц.

Вернемся теперь снова к полному матричному кольцу $K = K(M, L)$ и определим один класс гомоморфизмов этого кольца. Пусть U — идеал в L. Если $a \in L$, то через $\bar{a}$ мы обозначим сейчас образ элемента a при естественном гомоморфизме кольца L, отвечающем идеалу U. Если, далее, $A = (a_{\alpha\beta}) \in K$, то положим $\bar{A} = (\bar{a}_{\alpha\beta})$. Легко видеть, что отображение $A \to \bar{A}$ есть гомоморфизм кольца K. Ядром этого гомоморфизма служит идеал H, состоящий из матриц, все элементы которых принадлежат U. Каждый гомоморфизм такого типа индуцирует гомоморфизм соответствующей полной линейной группы над L. При этом, если Γ — такая группа, то ядро отмеченного сейчас гомоморфизма состоит из матриц из Γ, имеющих вид $E + A$, где E — единичная матрица и $A \in H$. Здесь возникает интересная задача: изучать связи между свойствами матричных групп над

L и свойствами их образов при гомоморфизмах, отвечающих идеалам из L. (Ср. Д. А. Супруненко [5].)

Допустим, далее, что G — левый L-модуль конечнозначных M-строк и K рассматривается как кольцо операторов этого модуля. Через $\bar{U}$ мы обозначим совокупность всех строк с компонентами из U. Легко видеть, что $\bar{U}$ — подмодуль в G, допустимый относительно K, и, кроме того, U и H аннулируют фактор-модуль $G/\bar{U}$. Следовательно, этот фактор-модуль можно рассматривать как левый L/U-модуль, в котором справа действует фактор-кольцо K/H.

Между строением кольца L, модуля G и строением матричного кольца K имеются многие важные связи, хорошо изученные при M конечном. Пусть множество M состоит из n элементов. В этом случае модуль строк над L мы обозначим через L^n, а соответствующее кольцо матриц — через L_n. Известно (см. Н. Джекобсон [4]), что если U — радикал Джекобсона в L, то радикал Джекобсона в L_n есть U_n. Отсюда следует, что если L — коммутативное кольцо с единицей, то множество матриц вида $E+A$, $A \in U_n$, есть нормальный делитель в полной линейной группе $\Gamma = \Gamma(n, L)$, действующий тождественно во всех L_n-композиционных факторах модуля L^n. Этот нормальный делитель, следовательно, является слабо стабильной относительно L^n группой.

Идеал U есть пересечение всех максимальных идеалов из L. Если $U^{(i)}$, $i \in I$, — все эти максимальные идеалы, то имеем $U_n = \bigcap_{i \in I} U_n^{(i)}$. Таким образом, фактор-кольцо L_n/U_n можно рассматривать как подпрямую сумму колец над полями. Это соображение позволяет сводить многие вопросы относительно матричных колец и групп над коммутативными кольцами с единицей к соответствующим вопросам относительно групп и колец над полями.

Заметим еще, что если вместо радикала Джекобсона исходить из радикала Левицкого кольца L — обозначим его через R, — то, как нетрудно проверить, группа матриц вида $E+A$, $A \in R_n$, оказывается локально финитно стабильной. Это и аналогичное замечание по поводу радикала Джекобсона имеют прямое отношение к α- и γ-радикалам полной линейной группы. Как показал

А. И. Токаренко, в действительности справедливы следующие утверждения. Если V — радикал Джекобсона в L, то нормальный делитель, состоящий из матриц $E+A$, $A \in V_n$, есть точно α-радикал $\alpha_{L^n}(\Gamma(n, L))$, а если все A брать из R_n, то мы также придем к γ-радикалу полной линейной группы. Было бы интересно рассмотреть аналогичный вопрос и при M бесконечном.

Приведем еще несколько замечаний о матричных представлениях, причем для определенности будем говорить о представлениях групп. Пусть, как и раньше, левый L-модуль G есть прямая сумма свободных циклических модулей G_α, $\alpha \in M$, и пусть задано представление группы Γ относительно G. В соответствии с предыдущими рассмотрениями элементам из Γ будут отвечать обратимые матрицы над кольцом L:

$$\sigma \to A(\sigma) = (a_{\alpha\beta}(\sigma)), \quad \sigma \in \Gamma.$$

Здесь $(a_{\alpha\beta}(\sigma))$ — уже функции трех переменных α, $\beta \in M$ и $\sigma \in \Gamma$ со значениями в L. Функция $A(\sigma)$ определяет матричное представление группы Γ, ее значения — элементы полной матричной группы $\Gamma L(M, L)$ — группы всех обратимых элементов матричного кольца K. При этом имеем $A(\sigma\varphi) = A(\sigma)\ A(\varphi)$. Еще раз подчеркнем, что, переходя к матричному представлению, мы уже можем не думать о существовании области действия G, и изучение представления сводится, таким образом, к матричным вычислениям. Такая чисто матричная точка зрения имеет ряд достоинств. Если, с другой стороны, задан некоторый гомоморфизм $\sigma \to A(\sigma)$ группы Γ в матричную группу $\Gamma L(M, L)$, то, предполагая фиксированным прямое разложение G на циклические модули, мы приходим к представлению группы Γ автоморфизмами модуля G.

3. Треугольность и стабильность в линейных парах. Здесь нам придется говорить о нормальных рядах и системах подмодулей модуля. Вообще говоря, слово «нормальный», поскольку речь идет об абелевых Ω-группах, можно было бы отбросить, но нам будет удобнее его писать, чтобы не спутать с другими системами —

совокупностями подмодулей. Пусть задана линейная пара (G, Γ), в которой G — левый модуль над некоторым кольцом с единицей L. Этот модуль обладает различными нормальными рядами и системами L-подмодулей, а таким системам и рядам отвечают Γ-нормализаторы, являющиеся в том или ином смысле треугольными группами (см. п. 3.3.7). Γ-централизаторы нормальных систем и рядов являются слабо стабильными и стабильными группами. Заметим еще, что согласно п. 3.3.4 в рассматриваемой ситуации квазистабильность и локальная стабильность—равносильные понятия.

Рассмотрим сейчас один специальный способ построения нормальных систем. Пусть L — кольцо с единицей, L^n — модуль n-строк над L и L_n — соответствующее матричное кольцо. Допустим, что кольцо L рассматривается как левый L-модуль, и пусть $[L_\alpha, \alpha \in I]$ — некоторая нормальная система в L (все L_α — левые идеалы).

Легко проверить, что все L_α^n составляют нормальную систему подмодулей в L^n. Если при этом все L_α — двусторонние идеалы, то указанная нормальная система оказывается также допустимой и относительно L_n. Если, кроме того, U — двусторонний идеал в L, аннулирующий справа нормальную систему $[L_\alpha, \alpha \in I]$, то идеал U_n из L_n аннулирует нормальную систему $[L_\alpha^n, \alpha \in I]$, и матричная группа Γ, состоящая из матриц вида $E + A$, $A \in U_n$, принадлежит централизатору этой нормальной системы. Учитывая связи между стабильностью и нильпотентностью, на этом пути можно строить различные интересные примеры групп с заданными свойствами центральных систем (см., например, Ю. И. Мерзляков [3] и Ф. Холл — Хартли [1]). Особый интерес представляет при этом случай, когда кольцо L является локальным кольцом.

Перейдем теперь к треугольности и стабильности другого рода. Допустим, что L — кольцо с единицей и L-модуль G является прямой суммой свободных циклических модулей. В этом случае естественно рассматривать такие нормальные системы подмодулей, через которые проходит некоторое такое разложение (т. е. члены рассматриваемой нормальной системы являются суммами

некоторых слагаемых фиксированного прямого разложения на циклические слагаемые). Если модуль G вполне приводим, то указанным свойством обладают все нормальные системы и ряды. В рассматриваемых случаях треугольность и стабильность допускают треугольное (в прямом смысле этого слова) матричное воплощение. К этой матричной картине мы сейчас и переходим.

Начнем с независимого матричного языка. Пусть M — множество, L — кольцо и K — кольцо всех конечно-строчных M, M-матриц над L. До сих пор множество M нигде не предполагалось упорядоченным. Если же в M задана некоторая линейная упорядоченность, то у нас появляется возможность смотреть на матрицы как на некоторым образом «записанные» квадратные таблицы. Кроме того, каждый порядок на M определяет некоторую треугольность: матрица $A = (a_{\alpha\beta})$ треугольна, если все $a_{\alpha\beta}$ при $\alpha > \beta$ (или $\beta > \alpha$) — нули.

Пусть дальше в L имеется единица, M упорядочено и левый L-модуль G является прямой суммой свободных циклических модулей $G_\alpha = Le_\alpha$, $\alpha \in M$.

Наряду с множеством M рассмотрим еще его пополнение $\overline{M}$, определяемое всевозможными дедекиндовыми сечениями на M. Если, далее, $\alpha \in \overline{M} \setminus M$, то для такого α через H_α мы обозначим сумму всех G_β с $\beta < \alpha$. Каждому $\alpha \in M$ мы сопоставим два подмодуля H_α и H'_α. Через H_α обозначим сумму всех G_β с $\beta < \alpha$, и пусть H'_α — сумма всех G_β с $\beta \leqslant \alpha$. Все эти подмодули составляют упорядоченную по включению систему подмодулей, и, как нетрудно понять, эта система является полной нормальной системой в G. Если исходное кольцо K рассматривать теперь как кольцо операторов модуля G, то каждая треугольная в отмеченном выше смысле, с $\beta > \alpha$, матрица оказывается операторно треугольной относительно указанной сейчас нормальной системы, и наоборот. Это, в частности, можно сказать и про группу Γ всех обратимых элементов из K. Специальная треугольная матрица — это такая треугольная матрица, в которой все элементы главной диагонали — единицы. Не каждая такая матрица обратима (см. п. 3.3.8 и теорему 8.1, которая указывает, в частности, условие обратимости специальной треугольной матрицы). Если

в некоторой подгруппе из Γ все элементы являются специальными треугольными матрицами, то это, очевидно, означает, что такая подгруппа слабо стабильна. Совокупность всех треугольных матриц из K (относительно заданного упорядочения множества M) образует, как нетрудно понять, подкольцо в K. Группу Φ всех обратимых элементов этого подкольца мы назовем *полной треугольной группой*, отвечающей заданному упорядочению, а все элементы этой группы, имеющие на главной диагонали только единицы, составляют ее специальную часть, которую обозначим через Σ. Группу Σ можно также охарактеризовать следующим образом. Пусть S — подкольцо в K, состоящее из всех треугольных матриц с нулями на главной диагонали. Тогда матрица A в том и только в том случае принадлежит Σ, когда ее можно представить в виде $A = E - B$, где B — присоединенно обратимая матрица в S. Изучение таких специальных треугольных групп Σ при различных упорядочениях бесконечного множества M представляет большой интерес, и сделано здесь еще очень мало *). Приведем сейчас одно замечание о нормальных делителях группы Σ.

Пусть $\xi \in M$. Для каждого такого ξ через $\Sigma_\xi^{(1)}$, $\Sigma_\xi^{(2)}$, $\Sigma_\xi^{(3)}$ и $\Sigma_\xi^{(4)}$ мы обозначим подгруппы, состоящие соответственно из всех $A = (a_{\alpha\beta}) \in \Sigma$, для которых $a_{\alpha\beta} = 0$ при $\beta < \alpha < \xi$ или $\beta < \alpha \leqslant \xi$, или $\xi < \beta < \alpha$, и в последнем случае — $\xi \leqslant \beta < \alpha$. Все эти подгруппы являются нормальными делителями в Σ. Это легко проверить матричным счетом или, еще легче, опираясь на операторный язык. Пусть еще $\Sigma_\xi^{(5)} = \Sigma_\xi^{(1)} \cap \Sigma_\xi^{(4)}$, $\Sigma_\xi^{(6)} = \Sigma_\xi^{(2)} \cap \Sigma_\xi^{(3)}$. Из предыдущего следует, что эти подгруппы также инвариантны, и кроме того, легко видеть, что все такие подгруппы абелевы. Если $\xi \in \bar{M} \setminus M$, то такому ξ сопоставим два нормальных делителя: $\Sigma_\xi^{(1)}$ и $\Sigma_\xi^{(2)}$. $\Sigma_\xi^{(1)}$ состоит из таких $A = (a_{\alpha\beta}) \in \Sigma$, у которых $a_{\alpha\beta} = 0$, если $\beta < \alpha < \xi$, а $\Sigma_\xi^{(2)}$ — из матриц, у которых $a_{\alpha\beta} = 0$ при $\xi < \beta < \alpha$.

*) В ряде случаев полезно также рассматривать треугольность, основанную на частичном упорядочении множества M. Интересный пример такого типа имеется в работе Д. Маклейна [3].

Пересечение $\Sigma_\xi^{(1)} \cap \Sigma_\xi^{(2)}$ — также абелев нормальный делитель в Σ.

Если, в частности, множество M обладает последним элементом 1, то матрицы из Σ, в которых только последняя строка и главная диагональ состоят из ненулевых элементов, составляют абелев нормальный делитель в Σ. Обозначим этот нормальный делитель через Σ_1, а через Σ_2 обозначим множество матриц $A=(a_{\alpha\beta})$, у которых $a_{1\beta}=0$ при $\beta\neq 1$. Тогда из одного замечания предыдущего пункта (стр. 255) следует, что внутренняя пара (Σ_1, Σ_2) слабо стабильна. Опираясь на эти же соображения, можно более детально, по-видимому, изучить центральную или разрешимую структуру группы Σ и некоторых ее подгрупп. Вообще же группа Σ, как показывает пример из п. 7.3.5, может не обладать центральной системой.

Интересным и важным в теории линейных представлений является вопрос о триангулируемости представления. Пусть задана линейная пара (G, Γ). Требуется найти условия, при которых в G имеется допустимая относительно Γ нормальная система с циклическими факторами. Если G — векторное пространство, то эту задачу легко перевести на чисто матричный язык. Триангулируемость отмеченного сейчас типа можно было бы назвать слабой триангулируемостью. Более сильным является следующее требование: каждый Γ-композиционный фактор в G является одномерным. Можно говорить также и о триангулируемости в смысле возрастающих треугольных рядов, а также и о соответствующих локальных свойствах. Заметим здесь, что локальная теорема из третьей главы о слабо стабильных парах в применении к рассматриваемой сейчас ситуации дает локальную теорему о приведении к совместному специальному треугольному виду. Кроме того, с помощью теоремы 3.3.5.1 легко доказать следующее утверждение: если (G, Γ) — линейная пара, в которой G — векторное пространство над полем, и каждая конечнопорожденная подгруппа из Γ слабо триангулируема, то в G имеется нормальная система подпространств, инвариантная относительно Γ и стабильная относительно коммутанта Γ'. Тем самым вопрос о совместной триангулируемости всей

группы Г сводится здесь к случаю коммутативной действующей группы.

Что касается этого коммутативного случая, то, во-первых, мы увидим, что здесь общая локальная теорема о триангулируемости неверна, и, во-вторых, если основное поле алгебраически замкнуто, то такая группа всегда локально триангулируема.

Для доказательства второго утверждения достаточно проверить следующее свойство: если G — векторное пространство над алгебраически замкнутым полем P, σ_1, σ_2, ..., σ_n — эндоморфизмы этого пространства, порождающие неприводимую коммутативную алгебру Σ, то G одномерно. Пусть $Q = P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов от n коммутирующих переменных. Сопоставляя $x_i \to \sigma_i$, мы зададим представление Q относительно G. Так как это представление неприводимо, то при некотором $a \in G$ получим $aQ = G$. Пусть L — Q-аннулятор a. L — максимальный идеал в Q, и, как хорошо известно, фактор-пространство Q/L одномерно. Так как Q-модули G и Q/L эквивалентны, то и G одномерно. Легко также показать (см., например, Ф. Холл [3]), что в случае произвольного поля P каждое неприводимое представление абелевой группы с конечным числом образующих конечномерно. В упомянутой работе Ф. Холла рассматриваются и другие случаи конечномерности неприводимых представлений *).

Теперь приведем пример. Пусть P — поле комплексных чисел, $P(x) = G$ — поле рациональных дробей над P, и Г — мультипликативная группа этого поля. Будем рассматривать G как векторное пространство над P и, исходя из регулярного представления, зададим линейную пару (G, Γ). Здесь группа Г не триангулируема, но согласно предыдущему она локально триангулируема.

Можно указать ряд дополнительных условий, при которых соответствующая локальная теорема справедлива. Кроме того, можно ставить вопрос о триангулируемости группы в некотором расширении основного поля. В такой постановке задачи начинает работать

*) См. по этому поводу еще работы И. Капланского [2] и С. Амицура [3].

язык УИП, и здесь уже локальная теорема верна. Ряд результатов по этой теме получен Е. М. Левичем, работа которого находится в печати.

4. Условия конечности. Различные условия конечности уже рассматривались в предыдущих главах. В настоящем пункте будут сделаны некоторые добавления применительно к линейным представлениям относительно вполне приводимых модулей. Всюду дальше область действия G есть вполне приводимый левый L-модуль, в частности, векторное пространство над некоторым телом или полем. Заметим, что согласно теореме 3.2.1.2 L-модуль G вполне приводим, если левый L-модуль L вполне приводим. Кроме того, напомним, что размерностью вполне приводимого модуля называется число (мощность) множества слагаемых в некотором прямом разложении на неприводимые слагаемые. Эта размерность, как отмечалось в п. 1.2.5, является инвариантом вполне приводимого модуля. Отметим еще, что каждый подмодуль вполне приводимого модуля также вполне приводим.

Из общих результатов п. 2.4.6 следует, что линейная пара (G, Γ) в том и только в том случае локально ограничена, когда для любой подгруппы Σ из Γ, имеющей конечное число образующих, в G имеется локальная система из конечномерных Σ-допустимых подмодулей. Определим еще другие ограничения конечности. Будем говорить, что пара (G, Γ) *сильно локально ограничена*, если для любой конечнопорожденной Σ модуль G покрывается Σ-допустимыми подмодулями ограниченной в совокупности конечной размерности. Приведем сейчас один простой достаточный признак сильной локальной ограниченности представления, относящийся к случаю, когда L — поле и, следовательно, G — векторное пространство.

Пусть группа Γ содержится в некоторой линейной алгебре K (в группе всех обратимых элементов из K). Такую группу Γ будем называть *локально конечномерной*, если для любой подгруппы Σ из Γ, имеющей конечную систему образующих, линейная оболочка этой подгруппы — обозначим ее через $\langle\Sigma\rangle$ — конечномерна.

Допустим теперь, что задано представление алгебры K относительно векторного пространства G (над полем), и пусть Γ — локально конечномерная подгруппа в K. Исходное представление алгебры K индуцирует представление группы Γ. Такое представление сильно локально ограничено.

В самом деле, если Σ — подгруппа с конечным числом образующих в Γ, то при любом $g \in G$ минимальное Σ-допустимое подпространство в G, содержащее элемент g, совпадает с $g \cdot \langle\Sigma\rangle$. Размерность этого подпространства ограничена размерностью линейной оболочки $\langle\Sigma\rangle$.

Этим утверждение доказано.

Назовем еще пару (G, Γ) *локально финитной*, если для любой подгруппы Σ из Γ, имеющей конечную систему образующих, в G имеется такой конечномерный Σ-допустимый подмодуль H, что представление Σ относительно H точно.

Покажем, что если в рассмотренной только что ситуации представление K относительно G точно, то представление Γ относительно G является также локально финитным.

Пусть Σ — подгруппа с конечным числом образующих в Γ, и g — произвольный элемент в G. Допустим, что представление подалгебры $\langle\Sigma\rangle$ относительно $g \cdot \langle\Sigma\rangle$ не является точным, и пусть L_1 — ядро этого представления. Тогда в G найдется такой элемент g_1, что $g_1 L_1 \neq 0$. Обозначим $H_1 = \{g\langle\Sigma\rangle, g_1\langle\Sigma\rangle\}$. H_1 — конечномерное Σ-допустимое подпространство, и ядро представления $\langle\Sigma\rangle$ относительно H_1 строго меньше, чем L_1. Аналогично можно построить возрастающую последовательность конечномерных Σ-допустимых подпространств $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_k$, таких, что ядро представления $\langle\Sigma\rangle$ относительно H_i строго меньше, чем соответствующее ядро для H_{i+1}. Так как $\langle\Sigma\rangle$ — конечномерная алгебра, то указанная убывающая последовательность ядер на некотором конечном шаге n должна дойти до нуля. Это означает, что представление $\langle\Sigma\rangle$ относительно H_n уже будет точным. Представление группы Σ относительно H_n также является точным. С помощью простых примеров нетрудно убедиться,

что все рассмотренные сейчас условия конечности действительно являются различными.

Из общих результатов п. 3.3.5 вытекает, что если представление группы Γ относительно вполне приводимого модуля G локально ограничено, то радикалы $\alpha_G(\Gamma)$ и $\beta_G(\Gamma)$ совпадают и квазистабильны, так что в этом случае, если представление точное, то $\alpha_G(\Gamma)$ обладает центральной системой. Покажем, что если представление Γ локально финитно, то $\alpha_G(\Gamma)$ — локально нильпотентная группа, а $\beta_G(\Gamma)$ — квазистабильная группа и также локально нильпотентна *).

Пусть Φ — локально финитная слабо стабильная группа автоморфизмов модуля G и пусть Σ — подгруппа в Φ, имеющая конечное число образующих. Возьмем в G конечномерный Σ-допустимый подмодуль H такой, что пара (H, Σ) является точной.

Так как Φ — слабо стабильная группа и H — конечномерный подмодуль, то Σ — финитно стабильная группа. Учитывая, что представление Σ относительно H является точным, теперь заключаем (по теореме Калужнина), что Σ — нильпотентная группа, так что Φ — локально нильпотентная группа. Поскольку $\alpha_G(\Gamma)$ является слабо стабильной группой, для рассматриваемого случая теперь получаем, что $\alpha_G(\Gamma)$ — локально нильпотентная группа. То же самое можно сказать и про $\beta_G(\Gamma)$, так как этот радикал порождается квазистабильными нормальными делителями, и квазистабильная группа всегда является слабо стабильной группой. Имея дальше в виду, что локально нильпотентная группа является локально нетеровой группой, теперь заключаем еще, что $\beta_G(\Gamma)$ — квазистабильная группа (см. теорему 3.3.3.3).

В случае, когда группа Γ сильно локально ограничена, все три радикала $\alpha_G(\Gamma)$, $\beta_G(\Gamma)$ и $\gamma_G(\Gamma)$ совпадают. Совпадение $\alpha = \beta$ вытекает из предыдущих замечаний, а равенство $\beta = \gamma$ содержится в следующем предложении:

---

*) Пользуясь случаем, отметим, что в работе автора [20] утверждается еще, что $\beta_G(\Gamma) \subset \alpha_G(\Gamma)$, однако доказательство этого включения содержит ошибку. По-видимому, это даже не так.

4.1. *Если группа* Γ *сильно локально ограничена (относительно* G*), то квазистабильность ее равносильна локальной финитной стабильности.*

Действительно, пусть группа Γ сильно локально ограничена, и допустим еще, что она квазистабильна. Пусть Σ — подгруппа с конечным числом образующих в Γ и пусть H_α — система Σ-допустимых подмодулей в G, покрывающих все G, причем размерности всех этих H_α ограничены числом m, зависящим от Σ. Так как Γ — квазистабильная группа, то Σ финитно стабильна относительно каждого H_α. Длина нижнего Σ-стабильного ряда в H_α не может быть больше m. Этим доказано, что при любом $g \in G$ все сложные коммутаторы вида $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$ по всем $\sigma_i \in \Sigma$ с длиной $k \geqslant m$ обращаются в нуль модуля G. Отсюда следует, что и в G имеется стабильный относительно Σ ряд с длиной $\leqslant m$. Таким образом, Σ — локально финитно стабильная группа.

В связи с 4.1 имеет смысл отметить еще следующее свойство. Пусть задано точное представление некоторой алгебры K относительно векторного пространства над полем G и пусть группа Γ лежит в K. Тогда, если Γ действует в G локально финитно стабильно, то Γ — локально конечномерная в K группа.

В самом деле, пусть выполнены отмеченные условия и пусть Σ — подгруппа с конечным числом образующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$. Так как Σ финитно стабильна, то существует такое m, что произведение любых m элементов вида $\varepsilon - \sigma_i$ равно нулю алгебры K. Отсюда следует, что произведение любых m элементов вида σ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, выражается линейно через произведения из таких же элементов с меньшим числом сомножителей. Но отсюда, очевидно, следует, что подалгебра $\langle\Sigma\rangle$ имеет конечную размерность.

Приведем еще одно замечание по поводу локальной ограниченности. Пусть снова (G, Γ) — линейная пара, в которой модуль G вполне приводим, и пусть еще Σ — подгруппа в Γ, имеющая конечное число образующих. Используя теорему 3.3.2.1, нетрудно заключить, что такая подгруппа тогда и только тогда ограничена, когда в G имеется возрастающий нормальный ряд из

Σ-допустимых подгрупп с конечномерными факторами. В матричном выражении (для векторных пространств) это означает, что при подходящем базисе элементам из Σ будут отвечать квазитреугольные матрицы вида

$$\left|\begin{array}{ccc} \ddots & 0 & \\ 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline A_{22} & A_{21} \\ \hline \end{array} & \\ & & \begin{array}{|c|} A_{11} \\ \hline \end{array} \end{array}\right|,$$

где все клетки $A_{\alpha\alpha}$ конечны.

В заключение параграфа заметим, что перечислявшиеся в п. 2.2.5 проблемы сохраняются и для теории линейных пар. Однако здесь эти проблемы конкретизируются. Так, например, отдельно рассматриваются случаи, когда L — поле с теми или иными дополнительными предположениями, тело или кольцо, также находящиеся в том или ином классе тел и колец. При этом теория линейных пар тесно смыкается с теориями полей, тел и колец. Отметим, в частности, что в большом прогрессе теории конечных групп в последние годы немалая роль принадлежит матричным группам над конечными кольцами и полями.

В теории матричных групп большое место занимает изучение абстрактных свойств таких групп, а также связей этих свойств с наличием сложения и конкретного матричного задания элементов. Сюда же примыкают исследования, посвященные условиям существования точного представления или полной системы представлений абстрактной группы матрицами, удовлетворяющими различным дополнительным требованиям. Такие представления находят часто глубокие применения в абстрактной теории групп.

Несколько работ посвящено алгоритмическим вопросам теории линейных групп и связям с языком УИП (см., например, А. И. Мальцев [17] и Ю. И. Мерзляков [3]).

Отметим еще, что матричные группы служат одним из основных источников примеров групп.

§ 2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1. Вводные замечания. В этом параграфе, говоря о матричных группах, мы имеем в виду, во-первых, конечномерный случай, а во-вторых, речь будет идти о матрицах над полями. Мы рассмотрим здесь два вопроса. С одной стороны — это абстрактные характеристики конечномерных матричных групп *), а с другой — роль характеров в теории конечномерных представлений. Каждая конечная группа допускает точное матричное представление над произвольным полем. Для бесконечных групп это далеко не так. В связи с этим возникает следующая общая проблема: найти необходимые и достаточные условия, описываемые в терминах абстрактной теории групп, точной матричной представимости группы над некоторым полем. Наряду с такой постановкой, относящейся к классу всех групп, аналогичную задачу можно относить и к некоторым специальным классам групп, например к периодическим, разрешимым и т. д., имея в виду, что в специальных случаях соответствующие условия могут выглядеть проще и доступнее для применений. Кроме того, можно ставить вопрос о существовании точного представления над заданным полем или кольцом (например, над полем рациональных чисел или над кольцом целых чисел), или над полями и кольцами, удовлетворяющими различным дополнительным условиям. Во всей этой проблематике имеется много открытых вопросов.

Что касается необходимых условий, то им посвящена довольно значительная литература — сюда относятся все работы, посвященные абстрактным свойствам матричных групп. Как уже отмечалось, интерес к изучению абстрактных свойств матричных (и вообще конкретных) групп вызван, в частности, и тем обстоятельством, что такие свойства являются инвариантами при различных представлениях группы в качестве группы автоморфизмов.

---

*) По этому поводу см. еще § 9.2.

Достаточные условия впервые специально рассматривались в работе А. И. Мальцева [3] и работе В. Л. Нисневича [1]. Сейчас мы приведем без доказательства один результат В. Л. Нисневича.

1.1. *Для того чтобы свободное произведение групп Γ_α могло быть представлено точно посредством матриц над некоторым полем, необходимо и достаточно, чтобы каждая группа Γ_α допускала такое представление некоторого порядка n, общего для всех сомножителей и над одним и тем же полем. При этом, если все сомножители представлены матрицами порядка n, то их произведение представимо матрицами порядка $n+1$.*

Опишем используемую в этой теореме конструкцию (необходимость условий здесь очевидна). Пусть каждая из групп Γ_α представлена матрицами порядка n: $A = (a_{ij})$. Каждой такой матрице мы сопоставим матрицу $A' = \begin{pmatrix}(a_{ij}) & 0\\ & 1\end{pmatrix}$. При этом будет получено представление группы Γ_α уже порядка $n+1$. Затем берем трансцендентную матрицу $X_\alpha = (x_{ij}^\alpha)$, для каждой Γ_α свою, порядка $n+1$. Мы получим новое представление группы Γ_α, рассматривая группу Φ_α матриц вида $X_\alpha^{-1}A'X_\alpha$. Утверждается, что матричная группа, порожденная всеми группами Φ_α, изоморфна свободному произведению групп Γ_α.

Параллельно этой теореме отметим еще такой очевидный факт. Если некоторые группы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \ldots, \Gamma_n$ допускают матричное представление степеней k_i над некоторым полем P, то и прямое произведение этих групп допускает точное матричное представление над тем же P степени, равной сумме всех k_i.

Что касается других теоретико-групповых конструкций, то многие из них не нашли еще хорошего матричного воплощения.

Отметим далее, что в теории линейных представлений особое внимание уделяется представлениям в полях простой характеристики, и здесь выделяют еще случай модулярных представлений. *Модулярное представление* — это представление конечной группы, порядок которой делится на характеристику поля представления. Для таких представлений уже не верна, например, теорема Машке (см. п. 3.2.1).

Представлениям в полях простой характеристики, и в частности в конечных полях, посвящена большая литература с проблематикой, связанной с различными разделами дискретной математики.

В следующих двух пунктах излагаются результаты А. И. Мальцева из работы [3].

2. Локальная теорема. Имеет место следующая локальная теорема:

2.1. *Если каждая конечнопорожденная подгруппа группы* Γ *допускает точное представление степени* n *над некоторым полем, то и сама группа* Γ *обладает таким же свойством* *).

Эта теорема является частным случаем теоремы 2.4.1 из второй главы, так как все n-мерные векторные пространства над полями (n фиксировано) составляют элементарно аксиоматизируемый класс двухосновных моделей — последнее очевидно. Приведем сейчас еще одно доказательство теоремы, основанное на возможности матричного изображения элементов.

С этой целью рассмотрим следующий набор формул УИП.

Пусть заданы группа Γ и число n, и допустим, что каждому элементу $g \in \Gamma$ отвечает матрица $(x_{\alpha\beta}(g))$ порядка n. Будем считать теперь, что основным множеством интересующих нас моделей служит поле, которое будем обозначать через P. Определим еще предикаты P_g:

$$P_g(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{nn}), \ g \in \Gamma,$$

в которых места заполняются элементами из P, и предикат считается истинным в том и только в том случае, когда элементу g отвечает матрица $(x_{\alpha\beta})$. Легко записать условие, согласно которому каждому g отвечает единственная матрица. Мы потребуем еще, чтобы выполнялись следующие условия:

$$x_{\alpha\beta}(g \cdot h) = \sum_{\gamma=1}^{n} x_{\alpha\gamma}(g) \cdot x_{\gamma\beta}(h),$$

---

*) Для счетных групп эта теорема была доказана также в упомянутой работе В. Л. Нисневича.

и если $g \neq h$, то при некоторых α, β $x_{\alpha\beta}(g) \neq x_{\alpha\beta}(h)$. Здесь все $x_{\alpha\beta}$ также берутся из поля P, и нетрудно понять, что оба эти условия можно записать формулами УИП через основные предикаты поля и предикаты P_g. Вместе с аксиомами поля все такие формулы и составляют интересуюший нас набор формул $\mathfrak{M}_\Gamma$.

Очевидно, что группа Γ тогда и только тогда обладает точным представлением степени n над некоторым полем, когда набор формул $\mathfrak{M}_\Gamma$ является совместным набором. Из условий теоремы следует, что указанный набор является локально совместным. Остается применить локальную теорему Гёделя—Мальцева.

Легко видеть, что теорема, аналогичная теореме 2.1, может быть отдельно сформулирована как для полей нулевой характеристики, так и для полей заданной характеристики p.

Нам понадобится дальше следующее вспомогательное предложение:

2.2. *Если некоторый набор аксиом, относящихся к полям, выполняется для бесконечного множества простых характеристик, то он выполняется и в поле характеристики нуль.*

Поля характеристики p среди других аксиом содержат аксиому $(\forall x)$ $(px=0)$, а нулевая характеристика задается бесконечным числом аксиом $\sim(\forall x)(px=0)$ по всевозможным простым числам. Пусть теперь задан набор формул $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условиям предложения (и содержащий аксиомы поля). Добавим ко всем этим формулам еще формулы вида $\sim(\forall x)$ $(px=0)$ по всем простым p и этот новый набор обозначим через $\mathfrak{N}$. Нужно показать, что $\mathfrak{N}$ — совместный набор формул. Пусть $\mathfrak{N}_0$ — произвольная конечная часть набора $\mathfrak{N}$. Тогда найдется такое простое число p, что это p не участвует в формулах из $\mathfrak{N}_0$, но в некотором поле характеристики p все формулы набора $\mathfrak{M}$ выполняются. Если P — одно из таких полей, то легко понять, что в P реализуются все формулы из $\mathfrak{N}_0$. Этим доказано, что $\mathfrak{N}$ локально совместный, а следовательно, и совместный набор формул.

Из этого предложения непосредственно выводится следующий факт:

2.3. *Если группа* Γ *при некотором* n *представима относительно полей простых характеристик для бесконечного множества простых чисел, то она представима и в поле характеристики нуль.*

Для доказательства этого утверждения достаточно применить 2.2 к системе формул $\mathfrak{M}_\Gamma$.

В рассматриваемой здесь работе А. И. Мальцева содержатся также некоторые другие замечания по поводу существования точных представлений одной и той же группы в полях различных характеристик.

Определим теперь понятие, двойственное понятию локальной системы подгрупп группы, — понятие двойственной локальной системы. Если Γ — группа, то система ее подгрупп $[\Sigma_\alpha]$ называется *двойственной локальной системой*, если пересечение всех Σ_α совпадает с единицей группы и для каждой пары Σ_α и Σ_β найдется Σ_γ такое, что $\Sigma_\gamma \subset \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta$. Опираясь на это понятие, докажем еще теорему 2.4, параллельную теореме 2.1. Заметим только, что в этой теореме используется лишь следующее свойство: если $[\Sigma_\alpha]$ — двойственная локальная система из нормальных делителей группы Γ, то для любого конечного набора элементов из Γ найдется такой член системы Σ_α, что в фактор-группе Γ/Σ_α образы всех этих элементов различны.

2. 4. *Если группа* Γ *обладает двойственной локальной системой нормальных делителей* Σ_α, *такой, что каждый раз* Γ/Σ_α *обладает точным представлением степени* n, *то и группа* Γ *обладает таким представлением.*

Снова воспользуемся системой формул $\mathfrak{M}_\Gamma$, и пусть $\mathfrak{N}$ — ее произвольная конечная часть. Допустим, что в аксиомах из $\mathfrak{N}$ участвуют элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \Gamma$. Для этих элементов можно найти такую Σ_α, что в фактор-группе Γ/Σ_α образы $\bar{g}_i$ всех g_i различны. Теперь нетрудно понять, что из существования точного представления для Γ/Σ_α вытекает совместность набора формул $\mathfrak{N}$. Таким образом, и $\mathfrak{M}_\Gamma$ — совместный набор, что и доказывает теорему.

3. Группы с конечным числом образующих. Локальная теорема позволяет, в известном смысле, общую задачу существования точного матричного представления

свести к аналогичной задаче для групп с конечным числом образующих. К этому случаю мы сейчас и переходим.

Вначале рассмотрим одно свойство матричной группы с конечным числом образующих над полем рациональных чисел. Пусть Γ — такая группа и $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — некоторая симметрическая (т. е. замкнутая относительно обращения элементов) система ее образующих. Обозначим через Π множество (конечное) всех простых чисел, входящих в знаменатели элементов матриц A_i ($i=1, 2, \ldots, m$), и пусть K — кольцо всех дробей, в знаменатели которых входят только простые числа из Π. Ясно, что всю группу Γ можно теперь рассматривать как группу над K. Каждому простому числу p, не входящему в Π, отвечает идеал U_p в K, состоящий из дробей, числители которых делятся на p. Этому идеалу в свою очередь отвечает гомоморфизм группы Γ на некоторую конечную группу. Отсюда непосредственно следует, что группа Γ аппроксимируется конечными матричными группами.

Указанное свойство оказывается справедливым для произвольных полей. Для доказательства этого факта можно было бы воспользоваться аналогичными идеями. Мы, однако, пойдем, следуя А. И. Мальцеву, по другому пути и используем следующие общие соображения.

Пусть группа Γ имеет конечное число образующих. Фиксируем в этой группе некоторую конечную симметрическую систему образующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$. Каждому из этих σ_i сопоставим трансцендентную матрицу $X_i = (x^i_{\alpha\beta})$, $i=1, 2, \ldots, m$; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$, элементы которой — независимые переменные. Через F мы обозначим полугруппу, порожденную всеми такими матрицами. F — свободная полугруппа, так как, очевидно, всякое соотношение между элементами из F привело бы к некоторому соотношению между переменными. Понятно, что отображение $X_i \to \sigma_i$ определяет гомоморфизм полугруппы F на группу Γ. Пусть ρ — конгруэнция указанного гомоморфизма. Эта конгруэнция определяет некоторые связи между переменными, определяемые следующим образом. Будем рассматривать всевозможные

пары

$$f=f(X_1, X_2, \ldots, X_m) \text{ и } \varphi=\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_m)$$

элементов из F. Если элементы f и φ сравнимы по модулю ρ, то запишем равенство $f(X_1, X_2, \ldots, X_m)-\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_m)=0$, а если эти элементы не сравнимы, то получим неравенство

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_m)-\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_m)\neq 0.$$

Систему всех таких равенств и неравенств, переписанную в координатном виде, мы обозначим через $\mathfrak{N}_\Gamma$. Подчеркнем, что все элементы участвующих здесь матриц являются целочисленными полиномами от одного и того же множества переменных $x^i_{\alpha\beta}$.

Допустим теперь, что группа Γ обладает точным матричным представлением степени n над некоторым полем P, и пусть μ: $\Gamma\to\Gamma^\mu$ — одно из таких представлений. Если в этом представлении элементам σ_i отвечают матрицы $(a^i_{\alpha\beta})$, то очевидно, что система всех этих $a^i_{\alpha\beta}$ даст нам решение системы равенств и неравенств $\mathfrak{N}_\Gamma$.

Таким образом, если группа Γ допускает точное матричное представление над некоторым полем, то система $\mathfrak{N}_\Gamma$ разрешима в этом поле. Пусть, с другой стороны, система $\mathfrak{N}_\Gamma$ разрешима в некотором поле P и пусть $a^i_{\alpha\beta}$ — соответствующие значения переменных $x^i_{\alpha\beta}$. Сопоставляя каждому X_i элемент $(a^i_{\alpha\beta})$, мы получим гомоморфизм полугруппы F на матричную над P полугруппу. Выполнимость при этом системы $\mathfrak{N}_\Gamma$ означает, что эта последняя полугруппа есть группа, изоморфная Γ. Итак, система $\mathfrak{N}_\Gamma$ тогда и только тогда разрешима в некотором поле P, когда группа Γ допускает точное матричное представление в этом поле. Это означает, что проблема точной представимости группы Γ теперь уже может решаться средствами теории полей.

Далее нам понадобится одна теоретико-числовая лемма. Приведем эту лемму без доказательства.

3.1. *Пусть дана система, состоящая из конечного числа условий вида*

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_k)=0 \quad \textit{или} \quad f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_k)\neq 0,$$

где левые части являются целочисленными полиномами от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Если эта система разрешима в некотором поле характеристики нуль, то она разрешима в простых полях простых характеристик для бесконечного множества простых чисел.

Пользуясь этой леммой, докажем следующую теорему:

3.2. *Пусть группа Γ имеет конечную систему образующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ и допускает изоморфное представление степени n над полем характеристики нуль. Тогда в Γ имеется система нормальных делителей $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k, \ldots$ такая, что все Γ/Σ_k — конечные группы, допускающие точные представления той же степени в простых полях простой характеристики, и для любого конечного набора элементов из Γ найдется Σ_k, для которого образы всех этих элементов в фактор-группе Γ/Σ_k различны.*

В смешанной системе условий $\mathfrak{N}_\Gamma$ возьмем только равенства и обозначим эту совокупность через Q. Система Q содержит вообще бесконечное число уравнений относительно переменных $x^i_{\alpha\beta}$. Согласно хорошо известной теореме Гильберта из этой системы можно выделить такую конечную подсистему Q_0, что все остальные уравнения являются следствиями уравнений из Q_0. Расположим далее все элементы группы Γ в некоторую счетную последовательность

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$$

и возьмем в ней некоторый начальный отрезок $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. Пусть $\tau_i = f_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ — одно из выражений элемента τ_i через образующие. Добавим теперь к системе Q_0 конечную систему неравенств

$$f_i(X_1, X_2, \ldots, X_m) - f_j(X_1, X_2, \ldots, X_m) \neq 0,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

и новую систему обозначим через Q^*. Так как $Q^* \subset \mathfrak{N}_\Gamma$, то система Q^* разрешима в поле нулевой характеристики. Теперь можно применить предыдущую лемму. По этой лемме найдется такое простое поле P простой характеристики, что система Q^* разрешима в этом поле. Пусть $x^i_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta}$, $a^i_{\alpha\beta} \in P$ — одно из таких решений. Легко видеть, что соответствие $\sigma_i \to (a^i_{\alpha\beta})$ определяет представление группы Γ степени n в поле P. В этом

представлении образы элементов $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ все различны. Если дальше через Σ_k обозначить ядро такого представления, то ясно, что все эти Σ_k составят нужную последовательность нормальных делителей.

Следующая теорема параллельна предыдущей и относится уже к случаю представлений в полях простой характеристики.

3.3. *Если группа* Γ *с конечным числом образующих допускает точное представление степени* n *над некоторым полем* P *характеристики* $p > 0$, *то в* Γ *имеется система подгрупп* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k, \ldots$, *удовлетворяющая свойству, сформулированному в конце предыдущей теоремы, и такая, что все* Γ/Σ_k *допускают точное представление степени* n *над конечными полями той же характеристики* p.

Будем пользоваться уже введенными раньше обозначениями. Обозначим еще через K минимальное алгебраически замкнутое поле характеристики p. Если некоторая группа Γ с конечным числом образующих представлена матрицами из поля K, то она одновременно представлена и в некотором конечном подполе из K. Действительно, если образующим отвечают матрицы $(a^i_{\alpha\beta})$, то всем остальным элементам отвечают матрицы с элементами из подполя, порожденного всеми $a^i_{\alpha\beta}$. Но в поле K всякое подполе с конечным числом образующих конечно.

Возьмем теперь систему равенств и неравенств Q^*. Здесь имеется лишь конечное число неравенств и все их можно свести к одному вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \neq 0$. Что касается равенств, то, на этот раз, по теореме Гильберта о корнях, все они разрешимы в K. Обозначим через M соответствующее алгебраическое многообразие. Нужно показать, что в этом многообразии найдется точка, удовлетворяющая неравенству $f(x_1, x_2, \ldots, x_r) \neq 0$. Но если бы полином $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ обращался в нуль во всех точках многообразия M, то, по той же теореме Гильберта, так было бы при любом основном поле. Но так как в поле P соответствующая система равенств и неравенств разрешима, то и в M найдется точка, удовлетворяющая нужному неравенству. Следовательно, система Q^* разрешима в поле K. Решению этой системы

отвечает некоторое представление группы Г. Если Σ_k — ядро такого представления, то группа Γ/Σ_k обладает уже точным представлением, причем в конечном подполе из K. Все такие Σ_k и составят последовательность, удовлетворяющую требованиям теоремы.

Обратим еще внимание на то обстоятельство, что как в этой теореме, так и в предыдущей, получаемые здесь нормальные делители вообще не составляют двойственную локальную систему. Однако, беря всевозможные пересечения конечного числа их, мы получим уже двойственную локальную систему из нормальных делителей с конечными фактор-группами.

Обе приведенные теоремы вместе с теоремой 2.4 показывают, что рассмотрение представлений групп с конечным числом образующих теперь уже сводится к представлениям конечных групп некоторой заданной степени. Кроме того, мы имеем здесь следующее замечательное обстоятельство: бесконечные матричные группы с конечным числом образующих не могут быть простыми.

Покажем дальше, что знаменитая проблема Хопфа, которая решена отрицательно в общем случае, для матричных групп решается положительно.

Докажем вначале одно интересное свойство конечно-порожденных групп.

3.4. *Если группа* Г *с конечным числом образующих имеет бесконечную возрастающую цепочку нормальных делителей* $H_1 \subset H_2 \subset \ldots$, *то для каждого натурального* n *найдется такое* k, *что фактор-группы* Γ/H_s *при* $s \geqslant k$ *уже не будут допускать изоморфные представления степени* n *ни при какой характеристике поля.*

Возьмем в группе Г некоторую симметричную систему образующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ и возьмем еще некоторую последовательность элементов $g_1, g_2, \ldots, g_s, \ldots$ такую, что $g_{s+1} \in H_{s+1} \setminus H_s$. Для каждого g_s фиксируем некоторую запись через образующие $g_s = f_s(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ с неотрицательными степенями. Каждому σ_i мы сопоставим матрицу X_i порядка n, элементы которой $x^i_{\alpha\beta}$ рассматриваются как независимые переменные. Введем еще в рассмотрение следующие матрицы:

$$A_s = f_s(X_1, X_2, \ldots, X_m) - E.$$

Элементами этих матриц служат полиномы от $x^i_{\alpha\beta}$. Множество всех таких полиномов обозначим через $\mathfrak{F}$. По теореме Гильберта все полиномы из $\mathfrak{F}$ выражаются линейно через конечное число их. Пусть эти базисные полиномы обозначены через $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Каждый F_i есть элемент некоторой матрицы A_{s_i}. Обозначим через k натуральное число, большее всех $s_1, s_2, \ldots, s_r$. Будем доказывать, что для такого k выполняется нужное условие.

Допустим, что задано некоторое представление μ фактор-группы Γ/H_k степени n. Нужно показать, что это представление не может быть точным. Представлению μ отвечает также представление группы Γ. При этом элементам $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ отвечают некоторые матрицы $B_1, B_2, \ldots, B_m$, $B_i = (b^i_{\alpha\beta})$, где $b^i_{\alpha\beta}$ принадлежат полю представления. Элемент $b^i_{\alpha\beta}$ будем рассматривать как значение переменной $x^i_{\alpha\beta}$ в заданном представлении.

При этом, очевидно, выполняются соотношения $f_s(B_1, B_2, \ldots, B_m) - E = 0$, $s = 1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, все полиномы $F_1, F_2, \ldots, F_r$ обращаются в нуль. Но тогда и все разности $f_s(B_1, B_2, \ldots, B_m) - E$, s — любое, также обращаются в нуль. Это означает, что при заданном представлении, например, элемент g_{k+1} переходит в единицу, т. е. представление группы Γ/H_k не является точным.

Проблема Хопфа решается теперь следующим образом. Допустим, что матричная группа Γ имеет конечное число образующих, и пусть она изоморфна некоторой своей истинной фактор-группе Γ/H. Тогда в Γ имеется возрастающий бесконечный ряд нормальных делителей $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots$, такой, что все Γ/H_i изоморфны группе Γ. Это невозможно в силу предыдущей теоремы. Отсюда же следует, что всякий автоэпиморфизм матричной группы с конечным числом образующих является автоморфизмом этой группы.

С другой стороны, для конечнопорожденных матричных групп пока не решен следующий интересный вопрос: верно ли, что каждая нетерова матричная группа содержит разрешимую подгруппу конечного индекса. В связи с этим вопросом отметим следующий любопытный факт: если в матричной группе выполняется хотя бы

одно нетривиальное тождество, то в такой группе имеется разрешимый нормальный делитель конечного индекса. Доказательство последнего утверждения получено В. П. Платоновым (работа печатается) с помощью структурной теории алгебраических матричных групп. Здесь используется тот факт, что замыкание (в топологии Зарисского) матричной группы, удовлетворяющей некоторому тождеству, также удовлетворяет этому тождеству (ср. п. 4.4.2). Из этой же теории следует, что алгебраическая матричная группа, удовлетворяющая условию максимальности, содержит разрешимую подгруппу конечного индекса. Пользуясь далее результатами Е. Колчина, отсюда можно вывести, что алгебраичность и нетеровость влекут даже конечность группы.

Как уже отмечалось, большой цикл задач связан с конкретизациями полей представлений. Приведем несколько замечаний по этому поводу.

Допустим, что группа Γ с образующими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ допускает точное матричное представление $\sigma_i \to (a^i_{\alpha\beta})$ степени n над некоторым полем нулевой характеристики. Отнесем еще каждому σ_i матрицу $X_i = (x^i_{\alpha\beta})$, где все $x^i_{\alpha\beta}$ рассматриваются как независимые переменные. Пусть дальше $C[x^i_{\alpha\beta}]$ — кольцо целочисленных полиномов от всех этих переменных и J — идеал в этом кольце, состоящий из всех полиномов, обращающихся в нуль в точке $x^i_{\alpha\beta} = a^i_{\alpha\beta}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что J — простой идеал, и поэтому для фактор-кольца $C[x^i_{\alpha\beta}]/J$ существует поле отношений K. Если теперь через $\bar{x}$ обозначить образ элемента x в фактор-кольце $C[x^i_{\alpha\beta}]/J$, то нетрудно понять, что соответствие $\sigma_i \to (\bar{x}^i_{\alpha\beta})$ определяет изоморфное представление группы Γ уже над полем K. Поле K имеет вид $K = R(x_1, x_2, \ldots, x_r, y)$, где R — поле рациональных чисел, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — независимые переменные и y — алгебраическая функция от этих переменных.

Если повысить здесь степень представления, то можно прийти и к представлению над конечным чисто трансцендентным расширением поля рациональных чисел.

Если здесь Γ — конечная группа и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ — все ее элементы, то аналогично, и пользуясь еще тео-

ремой Гильберта о корнях, можно показать, что Г допускает точное представление той же степени n и над полем алгебраических чисел. Известно также, что каждое представление конечной группы над полем комплексных чисел эквивалентно некоторому унитарному представлению.

В заключение пункта заметим, что при рассмотрении вопроса о существовании точного представления группы часто оказывается полезным изучение групповых алгебр данной группы над различными полями и таких гомоморфизмов этих алгебр, которые не склеивают элементы группы. По поводу точных конечномерных представлений самих групповых алгебр имеется работа Д. М. Смирнова [6]. Общей теории точных представлений ассоциативных линейных алгебр посвящена статья А. И. Мальцева [4], во многом параллельная работе [3]. При этом следует иметь в виду, что здесь речь идет, конечно, о таких представлениях, когда поле представления, вообще говоря, шире, чем основное поле представляемой алгебры.

4. Характеры. Как уже отмечалось, теория матричных представлений групп находит многочисленные применения и в самой абстрактной теории групп: она позволяет привлечь к исследованию групп вычислительную технику теории полей, а иногда даже и классический анализ. Важную роль при этом играет теория характеров. Мы не намерены здесь входить в детали классической теории представлений и характеров и выделим лишь некоторые важные для нас моменты. Заметим только, что самой обстоятельной сейчас книгой по теории представлений является книга Кэртиса—Райнера [1]. Значительное место в ней уделено целочисленным и модулярным представлениям.

Пусть G — конечномерное векторное пространство над некоторым полем P и пусть задано представление группы Г относительно G. Если выбрать в G определенный базис, то элементам из Г будут отвечать матрицы над полем P:

$$\sigma \to A(\sigma) = (a_{ij}(\sigma)), \quad \sigma \in \Gamma, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Характер представления — это функция на группе Г. Значениями этой функции служат элементы поля P, определяемые как след матрицы:

$$\chi(\sigma) = \mathrm{Sp}(A(\sigma)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\sigma).$$

Легко видеть, что характер представления не зависит от выбора базиса, и характеры эквивалентных представлений совпадают. Отметим еще, что след матрицы является линейной функцией относительно линейных операций над матрицами. Сила характеров демонстрируется, в частности, следующей классической теоремой (Фробениус—Шур [1]):

4.1. *Пусть основное поле P имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнуто. Тогда, если два конечномерных представления группы* Г *имеют одинаковые характеры, то оба эти представления состоят из одинаковых* (*с точностью до эквивалентности*) *неприводимых частей.*

Напомним, что если задано представление группы Г относительно векторного пространства G, то неприводимые части этого представления — это индуцированные представления в Г-композиционных факторах. Если пространство G конечномерно, то в нем имеется конечный Г-композиционный ряд, и все неприводимые части заданного представления исчерпываются (ввиду теоремы Жордана—Гельдера) индуцированными представлениями, связанными с факторами произвольного такого ряда.

Из этих замечаний следует, что с учетом кратностей неприводимых частей утверждение, обратное теореме, тривиально. Действительно, пусть $A_1(\sigma)$, $A_2(\sigma)$, ..., $A_k(\sigma)$ — все неприводимые части заданного представления $A(\sigma)$. Если все эти неприводимые части считать попарно неэквивалентными, то им следует приписать определенные кратности — число вхождений каждого из них в Г-композиционный ряд. Если эти кратности обозначить соответственно через α_i, то мы приходим к формуле

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ \mathrm{Sp}(A_i(\sigma)),$$

и, следовательно, характеры группы определяются полностью характерами неприводимых частей.

Доказательству теоремы 4.1 мы предпошлем некоторые предварительные рассмотрения, представляющие и самостоятельный интерес.

Пусть задано представление группы Γ относительно векторного пространства G, не обязательно конечномерного, над полем P; если $\sigma \in \Gamma$, то через σ^f будем обозначать линейный оператор пространства G, отвечающий элементу σ. Этому представлению мы сопоставим представление группы Γ уже относительно векторного пространства $H = H(G)$ всех линейных операторов пространства G.

Сделаем это следующим образом. Если $\sigma \in \Gamma$ и $u \in H$, то полагаем:

$$u \circ \sigma = u\sigma^f,$$

где справа — умножение в H. Очевидно, что так мы действительно определим представление группы Γ относительно векторного пространства H.

Пусть, далее, a — произвольный элемент в G. Мы знаем, что отображение $\mu_a = \mu : u \to au$ есть гомоморфизм — линейное отображение $H(G)$ в G. При этом имеем:

$$(u \circ \sigma)^\mu = a(u\sigma^f) = (au)\sigma^f = (au) \circ \sigma = u^\mu \circ \sigma.$$

Следовательно, если через $H^\mu = G'$ обозначить образ H в G при отображении μ, то подпространство G' допустимо в G относительно Γ и отображение μ определяет гомоморфизм пары (H, Γ) на пару (G', Γ).

Допустим далее, что исходное представление Γ относительно G неприводимо, и пусть еще (F, Γ) — подпара в (H, Γ) с $F^\mu \neq 0$. Тогда ясно, что $F^\mu = G$, и получается гомоморфное отображение пары (F, Γ) на пару (G, Γ). Если еще и пара (F, Γ) неприводима, то лемма Шура дает здесь эквивалентность представлений группы Γ относительно G и F.

Нетрудно понять, что приведенные сейчас построения можно повторить и в много более общей ситуации.

Предположим теперь, что пространство G конечномерно — n-мерно, и переведем все сказанное раньше на матричный язык. Пусть в G и F выбраны некоторые

базисы, соответственно $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $u_1, u_2, \ldots, u_m$, и пусть a — один из базисных элементов: $a = e_i$. Соответствующий гомоморфизм μ_a мы обозначим через μ_i. Ясно, что если $F \neq 0$, то при некотором i $\mu_i \neq 0$. Допустим, что оператору u_k по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ отвечает (n, n)-матрица $U_k = (u^k_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Легко понять, что в таком случае отображению μ_i отвечает (m, n)-матрица $M_i = (u^k_{ij})$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть, далее, $A(\sigma)$ — матрица, отвечающая σ в представлении Γ относительно G, построенная по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и $B(\sigma)$ — соответствующая матрица для σ — по базису $u_1, u_2, \ldots, u_m$ в отмеченном выше представлении Γ относительно H. Согласно предыдущему для этих матриц имеет место следующее соотношение:

$$B(\sigma) \cdot M_i = M_i \cdot A(\sigma).$$

Теперь допустим, что оба представления, $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$, неприводимы. Тогда, если $\mu_i \neq 0$, то M_i — обратимая матрица и $M_i A(\sigma) M_i^{-1} = B(\sigma)$. Это значит, что в F можно выбрать новый базис $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$, такой, что по этому базису все $B(\sigma)$ оказываются равными соответствующим $A(\sigma)$. Будем считать, что уже $u_1, u_2, \ldots, u_m$ есть такой базис. Тогда получим $M_i A(\sigma) M_i^{-1} = A(\sigma)$. Согласно лемме Шура и учитывая, что основное поле алгебраически замкнуто, получаем отсюда, что матрица M_i является скалярной матрицей $M_i = \alpha_i E$. В свою очередь для матриц U_k мы имеем теперь следующий вид:

$$U_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Все эти матрицы являются (n, n)-матрицами и α_i заполняют k-й столбец.

В дальнейшем все время будем предполагать, что представление $A(\sigma)$ неприводимо. Мы покажем, что если U — такая постоянная матрица, что при всех $A(\sigma)$ тождественно выполняется $\mathrm{Sp}(UA(\sigma)) = 0$, то U — нулевая матрица. С этой целью воспользуемся приведенными сейчас рассуждениями (а также и обозначениями). Обо-

значим еще через F множество всех матриц U, удовлетворяющих условию $\mathrm{Sp}(UA(\sigma))=0$. Так как след — линейная функция, то F есть подпространство в пространстве всех матриц — операторов H. Кроме того, очевидно, что это F допустимо относительно Γ в определенном выше представлении Γ относительно H, так что мы получаем подпару (F, Γ) в паре (H, Γ). Мы должны показать, что F состоит только из нулевых операторов. Допустим, что это не так. В таком случае в F имеется ненулевое допустимое относительно Γ подпространство F', неприводимое относительно Γ. Согласно предыдущему в F' можно выбрать базис из матриц $U_1, U_2, \ldots, U_n$ вида (*). По условию следы всех этих матриц должны равняться нулю. Но это означает, что все α_i — нули. Таким образом, все U_k — нулевые матрицы, и мы получили противоречие с тем, что $F\neq 0$.

Теперь мы займемся обобщением доказанного сейчас свойства.

Пусть задано r неприводимых представлений группы Γ — $A_1(\sigma), A_2(\sigma), \ldots, A_r(\sigma)$ соответственно относительно векторных пространств $G_1, G_2, \ldots, G_r$. Утверждается, что никакие два из этих представлений не эквивалентны в том и только в том случае, когда тождество

$$\mathrm{Sp}(U^{(1)}A_1(\sigma))+\mathrm{Sp}(U^{(2)}A_2(\sigma))+\ldots+\mathrm{Sp}(U^{(r)}A_r(\sigma))=0 \quad (**)$$

возможно лишь для нулевых постоянных матриц $U^{(1)}$, $U^{(2)}, \ldots, U^{(r)}$ соответствующих порядков.

Пусть все заданные r представлений попарно не эквивалентны.

Введем следующие обозначения: $G=\sum G_i$ — прямая сумма всех G_i, $i=1, 2, \ldots, r$. $H=\sum H_i$, где $H_i=H(G_i)$. Векторное пространство H можно рассматривать как пространство операторов, действующих в G, причем здесь все G_i H-допустимы. Отметим еще, что элементы из H нам удобно трактовать как последовательности вида $(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})$, где $u^{(i)}\in H_i$. Кроме того, все исходные пары (G_i, Γ) и (H_i, Γ), $i=1, 2, \ldots, r$, определяют пары (G, Γ) и (H, Γ) (через прямые произведения-суммы представлений).

Пусть теперь F — подпространство в H, состоящее из последовательностей $(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)})$, для которых (после перехода к матрицам) имеет место тождество (**). Ясно, что это подпространство инвариантно относительно Γ. Допустим, что $F \neq 0$. В таком случае в F имеется некоторое минимальное Γ-допустимое подпространство. Мы его также обозначим через F. Пара (F, Γ) неприводима. Пусть еще F_i — i-я компонента пространства F, $i = 1, 2, \ldots, r$. Хотя бы одна из этих F_i отлична от нуля; допустим, что уже $F_1 \neq 0$. Легко понять, что отсюда следует, что в G_1 найдется такой элемент e, что $eF = G_1$. Теперь можно утверждать, что пары (F, Γ) и (G_1, Γ) эквивалентны. Если бы оказалось, что при некотором $j \neq 1$ $F_j \neq 0$, то тогда мы получили бы также эквивалентность пар (F, Γ) и (G_j, Γ). Но это противоречит тому, что представления $A_1(\sigma)$ и $A_j(\sigma)$ не эквивалентны. Следовательно, все F_j с $j \neq 1$ — нули. Теперь уже из предыдущего вытекает, что и F_1 есть нуль. В одну сторону утверждение доказано. С другой стороны, если, например, $A_1(\sigma)$ и $A_2(\sigma)$ — эквивалентные представления, то $\mathrm{Sp}(E \cdot A_1(\sigma)) = \mathrm{Sp}(E \cdot A_2(\sigma))$ и, следовательно, возможно нетривиальное тождество типа (**).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4.1.

Пусть заданы два представления группы Γ над полем P с одинаковыми характерами: $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$. Обозначим через $C_1(\sigma), C_2(\sigma), \ldots, C_r(\sigma)$ все попарно неэквивалентные неприводимые части этих представлений. Имеем:

$$\mathrm{Sp}(A(\sigma)) = \chi(\sigma) = \sum \alpha_i \,\mathrm{Sp}(C_i(\sigma)),$$
$$\mathrm{Sp}(B(\sigma)) = \chi(\sigma) = \sum \beta_i \,\mathrm{Sp}(C_i(\sigma)),$$

здесь α_i и β_i — кратности соответствующих неприводимых частей, некоторые из них могут быть нулями. Из равенства характеров получаем тождество типа (**):

$$0 = \sum (\alpha_i - \beta_i)\,\mathrm{Sp}(C_i(\sigma)).$$

Согласно доказанному свойству такое тождество может выполняться лишь при условии $\alpha_i = \beta_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, r$. Теорема доказана.

В качестве применения этой теоремы мы докажем сразу же следующее предложение (Е. Колчин [1], доказательство принадлежит А. И. Мальцеву [5]):

4.2. *Если каждый элемент некоторой конечномерной линейной группы над полем является стабильным элементом, то и вся группа стабильна.*

Вначале отметим тот очевидный факт, что если Г — конечномерная линейная группа, то ее элемент σ тогда и только тогда является стабильным элементом, когда все характеристические корни этого элемента — единицы.

Пусть теперь пространство G задано над полем P и все элементы действующей группы Г имеют характеристическими корнями только единицы. Рассмотрим вначале случай нулевой характеристики. Если поле P не является алгебраически замкнутым, то через Δ обозначим его минимальное алгебраическое замкнутое расширение, и соответственно перейдем к пространству $\overline{G}$ над Δ. В таком случае группа Г уже начинает действовать в $\overline{G}$, и по-прежнему каждый элемент из Г является стабильным. Рассмотрим теперь два представления группы Г над Δ. Первое представление — тождественное в том смысле, что каждому элементу из Г отвечает этот же элемент. В качестве второго представления мы возьмем нулевое представление, т. е. представление всей группы Г одним тождественным оператором.

Итак, мы имеем два представления группы Г, причем очевидно, что характеры этих представлений совпадают. По предыдущей теореме все неприводимые части группы Г должны быть такими же, как и у единицы. Другими словами, группа Г в некотором базисе состоит из треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Это означает, что Г стабильна относительно $\overline{G}$.

Если, далее, пространство G рассматривать как подгруппу в $\overline{G}$, то очевидно, что Г стабильна и относительно G. Но тогда группа Г стабильна и относительно пространства G. В частности, уже над полем P группа Г приводима к совместному треугольному виду, специальному в том смысле, что на главной диагонали каждый раз стоят только единицы.

При переходе к полю P простой характеристики мы ссылаемся на результаты, доказываемые во второй части.

Прежде всего, легко видеть, что каждая матрица над таким полем, имеющая единичные характеристические корни, является периодической матрицей. Следовательно, рассматриваемая здесь группа Г является периодической группой. Согласно теореме Шура из п. 9.2.1 такая группа локально конечна, и по теореме 7.2.3.4 она локально стабильна. Теперь остается сослаться на п. 8.2.1.

Теорема 4.2 легко обобщается и на тот случай, когда пространство рассматривается над телом, имеющим конечный ранг над своим центром. Было бы интересно выяснить, верна ли эта теорема в общем случае тел. А. И. Токаренко обобщил теорему 4.2 на случай, когда P — коммутативное кольцо с единицей.

Для бесконечномерного случая мы имеем также следующее предложение:

4.3. *Если G — векторное пространство над некоторым полем P и группа* Г *действует в G локально ограниченно, то из того, что, каждый элемент из* Г *действует в G стабильно, следует, что вся группа* Г *локально стабильна.*

Требование локальной ограниченности существенно.

В работе Е. Р. Колчина [1] теорема 4.2 доказывается с помощью теоремы Бернсайда, также играющей важную роль в теории конечномерных представлений. Мы приведем сейчас эту теорему без доказательства (см., например, Ван дер Варден [2]).

4.4. *Пусть* Г — *неприводимая линейная группа степени n над алгебраически замкнутым полем. В такой группе имеется n^2 линейно независимых элементов.*

Нетрудно понять, что свойство представления быть приводимым или неприводимым зависит от основного поля. Так, если представление неприводимо над некоторым полем P, то оно может уже оказаться приводимым при переходе к более широкому полю. В связи с этим вводится следующее определение: представление группы Г называется *абсолютно неприводимым*, если оно неприводимо и остается таковым при всяком расширении основного поля. Если основное поле алгебраически замкнуто, то неприводимость и абсолютная неприводимость совпадают. Это последнее замечание легко вывести, например, из теоремы Бернсайда.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

1. Алгебраические элементы и локальная конечномерность. Если $\mathfrak{G}$ — линейная группа, т. е. группа, действующая точно в некотором векторном пространстве, и если еще пространство рассматривается над полем, то эту группу $\mathfrak{G}$ естественно считать лежащей в алгебре всех эндоморфизмов данного пространства, и наличие такой линейной оболочки мы не можем игнорировать. Всюду дальше в этом параграфе слова «линейная группа $\mathfrak{G}$» будут означать, что вместе с группой $\mathfrak{G}$ фиксирована еще некоторая линейная алгебра с единицей K, содержащая $\mathfrak{G}$ в группе всех своих обратимых элементов. Группу $\mathfrak{G}$ мы будем рассматривать теперь с точки зрения этой K. Одна и та же абстрактная группа может, конечно, по-разному рассматриваться как линейная группа. В частности, каждую группу можно рассматривать как линейную, если исходить из соответствующей групповой алгебры. При этом очевидно, что групповые алгебры здесь свободны в следующем смысле: если $\mathfrak{G}$ — линейная группа с алгеброй $L = \langle\mathfrak{G}\rangle$ и K — групповая алгебра группы $\mathfrak{G}$ над тем же полем, то L есть гомоморфный образ алгебры K при сопоставлении элементов из $\mathfrak{G}$ самим себе.

В теории линейных групп имеется дополнительная возможность характеризовать свойства элементов и подгрупп группы в зависимости от свойств их линейных оболочек. Можно, например, ставить задачу изучения линейных групп, в том или ином смысле близких к конечномерным. В предыдущем параграфе мы уже определяли локально конечномерные группы — линейная группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда локально конечномерна, когда ее линейная оболочка $\langle\mathfrak{G}\rangle$ является локально конечной алгеброй. Отметим, что из теоремы 2.5.4.4 следует, что во всякой линейной группе имеется локально конечномерный радикал.

Линейная группа $\mathfrak{G}$ называется *алгебраической* (ср. п. 2.5.4), если каждый ее элемент является алгебраическим элементом соответствующей алгебры. Мы уже

отмечали результат А. Е. Залесского, согласно которому всякая разрешимая алгебраическая группа локально конечномерна. Этот же результат верен и для радикальных (в смысле п. 5.3.2) алгебраических групп.

Сейчас приведем теорему, параллельную хорошо известному факту о периодической части локально нильпотентных групп (М. П. Седнева [1]).

1.1 *Если $\mathfrak{G}$ — линейная локально нильпотентная группа, то множество всех ее алгебраических элементов является подгруппой, инвариантной и локально конечномерной. Ясно, что эта подгруппа содержит как периодическую, так и унипотентную части группы $\mathfrak{G}$.*

Напомним, что унипотентный элемент линейной группы — это такой элемент g, что $\varepsilon - g$ — нильпотентный элемент линейной оболочки. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.6.2 из второй главы, и мы его опускаем. Из общих соображений п. 3.3.1 следует, что в локально нильпотентной линейной группе множество всех унипотентных элементов является инвариантной подгруппой. Кроме того, нужно учитывать следующее свойство: если g — алгебраический элемент линейной группы, то подалгебра, порожденная этим элементом, содержит всю циклическую подгруппу $\{g\}$. Докажем это свойство. Пусть

$$\alpha_0 g^i + \alpha_1 g^{i+1} + \ldots + \alpha_k g^{i+k} = 0$$

и $\alpha_0 \neq 0$. Умножая обе части на $g^{-(i+1)}$ будем иметь:

$$\alpha_0 g^{-1} + \alpha_1 \varepsilon + \ldots + \alpha_k g^{k-1} = 0,$$

что означает, что элемент g^{-1} принадлежит подалгебре, порожденной элементом g. Из этого замечания следует, что если g — алгебраческий элемент, то циклическая подгруппа $\{g\}$ конечномерна.

Дальше нам понадобится следующее определение: пусть $\mathfrak{G}$ — линейная группа и H — ее нормальный делитель. Мы скажем, что H имеет *конечный линейный индекс в* $\mathfrak{G}$, если среди всевозможных подпространств $\langle H\rangle g$, $g \in \mathfrak{G}$, найдется конечное число линейно порождающих алгебру $\langle\mathfrak{G}\rangle$. Здесь через $\langle H\rangle g$ мы обозначили множество всех элементов вида hg, $h \in \langle H\rangle$.

Ясно, что $\langle H\rangle g$ есть линейная оболочка смежного класса Hg.

Очевидны следующие замечания. Если подгруппа H имеет обычный конечный индекс в $\mathfrak{G}$, то и линейный индекс H в $\mathfrak{G}$ конечен. Если фактор-группа $\mathfrak{G}/H$ — циклическая, $\mathfrak{G}=\{H, g\}$, и g — алгебраический элемент, то H имеет в $\mathfrak{G}$ конечный линейный индекс.

Легко также проверить следующее свойство. Если H — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$, и U — идеал в $\langle\mathfrak{G}\rangle$, порожденный множеством $H-\varepsilon$, то конечность линейного индекса H в $\mathfrak{G}$ влечет конечность ранга фактор-алгебры $\langle\mathfrak{G}\rangle/U$. Обратное также верно, если $H=\varepsilon+U$.

Докажем теперь следующую лемму:

1.2. *Если $\mathfrak{G}$ — линейная группа, H — ее нормальный делитель конечного линейного индекса, то из того, что H является локально конечномерной группой, следует, что и $\mathfrak{G}$ — локально конечномерная группа.*

Пусть выполнены условия леммы и H — локально конечномерная группа. Согласно этим условиям найдется такое конечное множество $X=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ элементов из $\mathfrak{G}$, что

$$\langle\mathfrak{G}\rangle = g_1\langle H\rangle + g_2\langle H\rangle + \ldots + g_n\langle H\rangle.$$

Можно считать, что X — симметрическое множество. Возьмем теперь в $\mathfrak{G}$ конечное симметрическое множество элементов, $u_1, u_2, \ldots, u_r$, и пусть A — подгруппа, порожденная этими элементами. Нужно показать, что $\langle A\rangle$ — конечномерная алгебра. Имеем:

$$u_i = \sum g_i h_{ij},$$

где $h_{ij}\in\langle H\rangle$. Элементов h_{ij} — конечное число.

Пусть еще $g_i g_j = \sum g_k h_{kij}$. Всех этих h_{kij} также конечное множество. Согласно условию в H можно так выделить конечное множество элементов $v_1, v_2, \ldots, v_m$, что линейная оболочка всех этих элементов есть подалгебра, содержащая подгруппу, порожденную всеми v_i, и содержащая все h_{ij} и все h_{kij}. Мы можем также считать, что выбранное так множество $V=(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ является симметрическим множеством. Возьмем, далее,

конечное множество элементов вида $c_{ik}=g_k^{-1}v_ig_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=1, 2, \ldots, m$. Всеми v_i и c_{ik} породим подгруппу H' в H. Линейная оболочка этой подгруппы $\langle H'\rangle$ конечномерна. Рассмотрим теперь n конечномерных подпространств $g_i\langle H'\rangle$, $i=1, 2, \ldots, n$, и пусть F — линейная оболочка всех $g_i\langle H'\rangle$. F — конечномерное подпространство в $\langle\mathfrak{G}\rangle$. Будем показывать, что F — подалгебра.

Прежде всего, покажем что каждый элемент вида hg_i, $h\in H'$, принадлежит F. Если $h=v_k$, то $hg_i=g_i\cdot c_{ki}\in F$. Пусть теперь $h=c_{jk}$. Тогда

$$hg_i=g_k^{-1}v_jg_k\cdot g_i=g_k^{-1}\sum_t v_jg_th_{tki}=g_s\sum g_tc_{jt}h_{tki}=$$
$$=\sum_{r,t} g_rh_{rst}c_{jt}h_{tki}\in F.$$

Если, наконец, $h=h_1h_2\ldots h_k$, где все сомножители — это v_i или c_{ik}, то, применяя индукцию по числу таких сомножителей, мы легко убедимся, что и в общем случае hg_i принадлежит F.

Подпространство F линейно порождается элементами вида g_ih_i, $g_i\in X$, $h_i\in H'$. Пусть g_ih_i и g_kh_k — два таких элемента. Тогда

$$g_ih_i\cdot g_kh_k=g_i\cdot f\cdot h_k\in F, \text{ так как } f\in F,$$

и следовательно, F — подалгебра.

Так как эта подалгебра содержит подгруппу A, то одновременно доказано, что $\langle A\rangle$ — конечномерная алгебра. Этим лемма доказана.

Введем еще такое определение. Если H — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$, то будем говорить, что фактор-группа $\mathfrak{G}/H$ линейно локально конечна, если в $\mathfrak{G}$ имеется локальная система из содержащих H подгрупп $\mathfrak{G}_\alpha$ таких, что каждый раз подгруппа H имеет конечный линейный индекс в $\mathfrak{G}_\alpha$.

Легко понять, что в том случае, когда $H=E$, линейная локальная конечность означает, что группа $\mathfrak{G}$ локально конечномерна.

Применяя индукцию, с помощью доказанной сейчас леммы непосредственно получаем следующую теорему (М. П. Седнева [1]):

1.3. *Если линейная группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим нормальным рядом с линейно локально конечными факторами, то такая группа локально конечномерна.*

Ясно, что эта теорема содержит в качестве частного случая упоминавшийся ранее результат А. Е. Залесского.

Линейную группу $\mathfrak{G}$ условимся называть *PI-группой*, если соответствующая линейная оболочка $\langle\mathfrak{G}\rangle$ является *PI*-алгеброй, т. е. алгеброй, удовлетворяющей некоторому нетривиальному полиномиальному тождеству. Соответственно можно говорить и о локально *PI*-группах. Конечномерные линейные группы являются частным случаем *PI*-групп. С рассмотрением *PI*-групп связана интересная проблематика. Так, например, из работы А. И. Ширшова [1] непосредственно следует, что всякая периодическая *PI*-группа локально конечномерна и, следовательно, локально конечна. Некоторые другие результаты о *PI*-группах содержатся в работе В. П. Платонова [6] (см. также п. 9.2.4). Отметим еще, что *PI*-группы можно считать в некотором смысле близкими к конечномерным. Другой случай такой близости — это группы, у которых линейная оболочка обладает возрастающим рядом идеалов с конечномерными факторами.

2. Радикалы линейной группы и радикалы ее оболочки. Пусть H — нормальный делитель линейной группы $\mathfrak{G}$ с алгеброй $L=\langle\mathfrak{G}\rangle$. Найдем условия, при которых существует такой идеал U алгебры L, что фактор-группа $\mathfrak{G}/H$ естественно вкладывается в алгебру L/U. В таком случае эту фактор-группу мы сможем рассматривать как линейную группу с алгеброй $\langle\mathfrak{G}/H\rangle=L/U$. Естественный гомоморфизм $L\to L/U$ индуцирует гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в мультипликативную часть алгебры L/U. Наша цель — выяснить, когда ядром этого гомоморфизма служит нормальный делитель H. Ядро указанного гомоморфизма совпадает с множеством всех таких $h\in\mathfrak{G}$, для которых $\varepsilon-h\in U$. Если $\varepsilon-h=u\in U$, то $h=\varepsilon-u\in\mathfrak{G}\cap(\varepsilon-U)$. С другой стороны, если $h\in\mathfrak{G}\cap(\varepsilon-U)$, $h=\varepsilon-u$, то $\varepsilon-h\in U$ и h принадлежит ядру. Поэтому это ядро совпадает с пересече-

нием $\mathfrak{G} \cap (\varepsilon - U)$, и, следовательно, нужно, чтобы нормальный делитель H совпадал с этим пересечением. Легко понять, что если отмеченное равенство выполняется для некоторого U, то оно выполняется и для U, равного идеалу, порожденному множеством $\varepsilon - H$. Обозначим этот идеал через $U(H)$. В общем же случае, если для нормального делителя H взять идеал $U(H) = U$, то группа $\mathfrak{G}/H$ только гомоморфно вкладывается в L/U.

Рассмотрим теперь один конкретный случай.

Пусть $\mathfrak{G}$ — линейная группа. Через L, как и раньше, обозначается алгебра, совпадающая с линейной оболочкой группы $\mathfrak{G}$. Группу $\mathfrak{G}$ будем рассматривать также как действующую относительно (правого) регулярного представления алгебры L. Через $\alpha(\mathfrak{G})$ и $\gamma(\mathfrak{G})$ мы обозначим α- и γ-радикалы действующей группы $\mathfrak{G}$, связанные с таким представлением. Можно также определить и β-радикал, но, как мы увидим, этот радикал совпадает с γ-радикалом. Ясно, что $\gamma(\mathfrak{G})$ — локально нильпотентная группа. Пусть еще $\alpha(L)$ обозначает радикал Джекобсона алгебры L. Мы знаем (п. 3.1.3), что имеет место следующее соотношение:

$$\alpha(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} \cap (\varepsilon - \alpha(L)).$$

Согласно предыдущему теперь можно говорить и о линейной группе $\mathfrak{G}/\alpha(\mathfrak{G})$ — ее линейной оболочкой служит полупростая алгебра $L/\alpha(L)$. В этом смысле группу $\mathfrak{G}/\alpha(\mathfrak{G})$ будем называть полупростой линейной группой.

Если линейная группа $\mathfrak{G}$ полупростая, то очевидно, что $\alpha(\mathfrak{G})$ совпадает с единицей. Обратное, вообще говоря, неверно. Можно лишь утверждать следующее. Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}$ группу всех обратимых элементов из $\langle\mathfrak{G}\rangle$. Если $\alpha(\overline{\mathfrak{G}})$ совпадает с единицей, то как $\overline{\mathfrak{G}}$, так и $\mathfrak{G}$ — полупростые группы. В самом деле, все элементы из $\varepsilon - \alpha(L)$ обратимы и, следовательно, принадлежат $\overline{\mathfrak{G}}$, так что имеем равенство $\alpha(\overline{\mathfrak{G}}) = \varepsilon - \alpha(L)$. Отсюда следует, что равенство единице $\alpha(\overline{\mathfrak{G}})$ равносильно равенству нулю радикала Джекобсона $\alpha(L)$. Заметим, что, хотя при $\alpha(\mathfrak{G}) = E$ группа $\mathfrak{G}$ может не быть полупростой, при естественном отображении $L \to L/\alpha(L)$ группа $\mathfrak{G}$ изоморфно вкладывается в полу-

простую алгебру $L/\alpha(L)$, т. е. может рассматриваться как полупростая.

Итак, изучение произвольных линейных групп существенно зависит от знания полупростых групп. Рассмотрим теперь тот частный случай, когда группа $\mathfrak{G}$ локально конечномерна.

В этом случае радикалы $\alpha(\mathfrak{G})$ и $\gamma(\mathfrak{G})$ совпадают (п. 4.1.4), а радикал Джекобсона $\alpha(L)$ совпадает с локально нильпотентным радикалом Левицкого. Мы докажем сейчас следующее предложение (А. Е. Залесский [1]):

2.1. *Если $\mathfrak{G}$ — локально конечномерная полупростая группа, то каждый нормальный делитель из $\mathfrak{G}$ также полупрост.*

Будем доказывать, что если H — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$, и U — его линейная оболочка, то имеет место включение

$$\alpha(U) \subset \alpha(L). \tag{1}$$

Так как H — нормальный делитель, то при любом $g \in \mathfrak{G}$ отображение $u \to g^{-1}ug$, $u \in U$, есть автоморфизм алгебры U. Следовательно, $g^{-1}\alpha(U)g = \alpha(U)$. Обозначим $S = L\alpha(U)$. S — левый идеал в L, и если мы докажем, что каждый элемент из S является нильпотентным элементом, то этим будет доказано включение $S \subset \alpha(L)$, а потому и включение (1). Каждый элемент x из S можно представить в виде $x = \Sigma g_i a_i$, $a_i \in \alpha(U)$, $g_i \in \mathfrak{G}$. Обозначим через L_0 локальную подалгебру в L, порожденную всеми этими g_i и a_i, и пусть $S_0 = \alpha(U) \cap L_0$. S_0 — нильпотентная алгебра, причем при любом g_i будет $g_i^{-1}S_0 g_i = S_0$. Пусть n — индекс нильпотентности S_0. Если теперь возвести x в степень n, то, очевидно, мы получим сумму, каждое слагаемое которой содержит в качестве сомножителя произведение из n элементов вида a_i или $g_i^{-1}a_j g_i$. Все такие слагаемые равны нулю, и $x^n = 0$. Включение (1), а вместе с ним и теорема доказаны.

Заметим еще, что если $\mathfrak{G}$ — «замкнутая» подгруппа, $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}}$, то теорема непосредственно следует из связи $\alpha(\overline{\mathfrak{G}}) = \varepsilon - \alpha(L)$. Нужно только перейти еще к замыканию $\overline{H}$, которое вместе с H будет инвариантно в $\overline{\mathfrak{G}}$.

Нетрудно проверить, что эта теорема остается справедливой и в том случае, когда вместо нормального делителя H рассматривается субинвариантная подгруппа H (ср. § 5.2).

Остановимся теперь на некоторых свойствах радикала $\gamma(\mathfrak{G})$. Этот радикал, как мы знаем, совпадает с множеством всех финитно стабильных элементов из $\mathfrak{G}$, лежащих в локально нильпотентном радикале $R(\mathfrak{G})$. С другой стороны, очевидно, что финитно стабильные и унипотентные элементы — это одно и то же. Следовательно, $\gamma(\mathfrak{G})$ — это совокупность всех унипотентных элементов $\mathfrak{G}$, принадлежащих $R(\mathfrak{G})$.

В частности, если группа $\mathfrak{G}$ локально конечномерна, то ее радикал $\alpha(\mathfrak{G})$ совпадает с множеством всех унипотентных элементов из $R(\mathfrak{G})$, и если в такой группе $\mathfrak{G}$ нет унипотентных элементов, то при переходе к алгебре $L/\alpha(L)$ группу $\mathfrak{G}$ можно рассматривать как полупростую группу.

Дальше мы заметим, что β-радикал группы $\mathfrak{G}$ совпадает с ее γ-радикалом.

Действительно, β-радикал порождается локально стабильными нормальными делителями из $\mathfrak{G}$. Поэтому достаточно установить, что каждый локально стабильный нормальный делитель из $\mathfrak{G}$ в действительности является локально финитно стабильным. Пусть H — локально стабильный нормальный делитель в $\mathfrak{G}$ и пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — конечное подмножество в H, порождающее подгруппу F. Возьмем теперь в L минимальное F-допустимое подпространство, содержащее элементы $\varepsilon - h_1$, $\varepsilon - h_2$, $\ldots$, $\varepsilon - h_k$, — обозначим его через L_0. L_0 конечномерно, и, следовательно, F действует в L_0 финитно стабильно. Отсюда вытекает, что существует такой показатель n, что произведение любых n элементов вида $\varepsilon - h_i$ есть нуль. Это означает, что группа F стабильна относительно всего пространства L, и H — локально финитно стабильная группа.

Отметим дальше следующее интересное свойство γ-радикала: если задано точное представление алгебры $L = \langle\mathfrak{G}\rangle$ относительно некоторого векторного пространства G, то имеет место равенство $\gamma_G(\mathfrak{G}) = \gamma(\mathfrak{G})$. Доказательство здесь достаточно очевидно. Для двух других

радикалов (α- и β-) выполняются только включения

$$\alpha(\mathfrak{G}) \subset \alpha_G(\mathfrak{G}) \text{ и } \beta(\mathfrak{G}) = \gamma(\mathfrak{G}) \subset \beta_G(\mathfrak{G}).$$

Теперь докажем следующую теорему:

2.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — локально нильпотентная линейная группа и H — ее нормальный делитель, принадлежащий унипотентной части $\gamma(\mathfrak{G})$. Если линейная оболочка H конечномерна, то внутренняя пара $(H, \mathfrak{G})$ финитно стабильна.*

Возьмем некоторое точное представление алгебры $L = \langle \mathfrak{G} \rangle$ относительно векторного пространства G. Будем считать, что условия теоремы выполнены и линейная оболочка нормального делителя H конечномерна. В таком случае нетрудно понять, что группа H действует в G финитно стабильно. Допустим, что ряд

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

является верхним H-стабильным рядом подпространств в G. Теорему будем доказывать индукцией по длине такого ряда. Для рядов с длиной 1 утверждение очевидно, так как в таком случае нормальный делитель H является единичным. Пусть уже установлено, что утверждение теоремы справедливо при длинах таких рядов, меньших n.

Обозначим через F H-централизатор подпространства G_{n-1}. Так как все G_i $\mathfrak{G}$-(и L-) допустимы, то ясно, что F — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$. Будем показывать, что внутренняя пара $(F, \mathfrak{G})$ финитно стабильна, а затем воспользуемся предположением индукции.

Обозначим еще через F^* линейную оболочку множества всех элементов вида $\varepsilon - f$, $f \in F$, и рассмотрим отображение

$$* : f \to \varepsilon - f = f^*.$$

Простая проверка показывает, что это отображение является изоморфным вложением группы F в векторное пространство F^*. Образ F при этом отображении в F^* обозначим через F'.

Зададим дальше представление группы $\mathfrak{G}$ автоморфизмами векторного пространства F^*, полагая

$$x \circ g = g^{-1} x g$$

для $x \in F^*$ и $g \in \mathfrak{G}$. Легко видеть, что при этом подгруппа $F' \subset F^*$ оказывается $\mathfrak{G}$-допустимой и что отображение $*$ определяет изоморфизм групповой пары $(F', \mathfrak{G})$ и внутренней пары $(F, \mathfrak{G})$. Так как группа $\mathfrak{G}$ локально нильпотентна, то внутренняя пара $(F, \mathfrak{G})$ локально стабильна. Следовательно, и пара $(F', \mathfrak{G})$, а вместе с ней и пара (F^*, G) локально стабильны. Учитывая дальше, что векторное пространство F^* конечномерно, теперь заключаем, что группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна относительно F^*. Но тогда $\mathfrak{G}$ нильпотентна и относительно F, и финитная стабильность пары $(F, \mathfrak{G})$ доказана.

Теперь остается показать, что пара $(H/F, \mathfrak{G}/F)$ финитно стабильна.

Исходное представление алгебры L индуцирует представление L относительно допустимого подпространства G_{n-1}. Пусть U — ядро такого представления. Естественный гомоморфизм $L \to L/U$ индуцирует гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в мультипликативную часть алгебры L/U. Если I — ядро такого гомоморфизма, то легко понять, что $I \cap H = F$. Итак, мы имеем точное представление алгебры L/U относительно векторного пространства G_{n-1}, и в L/U «лежит» группа $\mathfrak{G}/I$. $\mathfrak{G}/I$ содержит нормальный делитель HI/I, имеющий, очевидно, конечномерную линейную оболочку в L/U. Кроме того, ясно, что этот нормальный делитель обладает относительно G_{n-1} стабильным рядом длины $n-1$. На основании предположения индукции заключаем, что внутренняя пара $(HI/I, \mathfrak{G}/I)$ финитно стабильна. Следовательно, и пара $(H/F, \mathfrak{G}/F)$ финитно стабильна. Этим завершается доказательство теоремы.

Отметим два следствия доказанной сейчас теоремы.

По аналогии с абстрактной теорией групп линейную группу $\mathfrak{G}$ назовем локально нормальной, если в $\mathfrak{G}$ имеется локальная система из нормальных делителей $\mathfrak{G}_\alpha$, имеющих конечномерные линейные оболочки.

2.3. *Если группа $\mathfrak{G}$ совпадает со своим γ-радикалом и локально нормальна, то в ней имеется возрастающий центральный ряд длины, не большей первого предельного порядкового числа ω.*

Действительно, в рассматриваемом случае каждая локальная подгруппа $\mathfrak{G}_\alpha$ принадлежит некоторому члену

верхнего центрального ряда в $\mathfrak{G}$, имеющему конечный номер.

Другим следствием является обобщение одной известной теоремы Г. Цасенхауза [1]. (Ср. также п. 8.2.2).

2.4. *Пусть* Γ — *локально нильпотентная группа автоморфизмов векторного пространства* G (*над полем*), *и пусть радикал* $\gamma(\Gamma)$ *имеет конечную размерность. Тогда, если в* G *имеется конечный ряд* Γ-*допустимых подпространств, во всех факторах которого группа* Γ *действует как нильпотентная, то и сама группа* Γ *нильпотентна.*

Пусть $[G_i]$ — соответствующий ряд подпространств и Σ — его Γ-централизатор. Из условий, с помощью теоремы Ремака, сразу следует, что группа Γ/Σ нильпотентна.

Так как $\Sigma \subset \gamma(\Gamma)$ и $\gamma(\Gamma)$ — конечномерная группа, то из теоремы 2.2 следует, что в Σ имеется конечный центральный в Γ ряд. Это уже означает, что группа Γ нильпотентна.

Из теоремы 2.2 нетрудно также ввести следующее утверждение: если линейная оболочка $\langle G\rangle$ обладает возрастающим рядом идеалов с конечномерными факторами и группа $\mathfrak{G}$ локально нильпотентна, то такая группа обладает возрастающим центральным рядом.

Сделаем теперь одно замечание относительно полупростого случая.

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая линейная группа с алгеброй $L = \langle G\rangle$. Группа $\mathfrak{G}$ обладает подпрямым разложением на примитивные группы, а алгебра L раскладывается в подпрямую сумму примитивных алгебр.

Рассмотрим связь между такими разложениями.

Прежде всего, напомним, что как при определении радикала $\alpha(\mathfrak{G})$, так и для радикала Джекобсона $\alpha(L)$ мы имеем один и тот же набор композиционных факторов векторного пространства L, причем достаточно ограничиться рассмотрением композиционных факторов вида L/U_α, где U_α — некоторый максимальный правый идеал в L.

Пусть теперь Z_α и $\mathfrak{z}_\alpha$ — соответственно ядра индуцированных представлений группы $\mathfrak{G}$ и алгебры L относительно пространства L/U_α. Ясно, что при этом группа $\mathfrak{G}/Z_\alpha$ изоморфно вкладывается в алгебру $L/\mathfrak{z}_\alpha$. Этим и

устанавливается интересующая нас связь между двумя подпрямыми разложениями.

Заметим еще, что представляет интерес обобщение рассматривавшихся выше результатов на линейные группы над коммутативными кольцами. Соответствующая линейная оболочка при этом является алгеброй над кольцом.

§ 4. ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Линейные алгебраические системы. Линейная алгебраическая система — это модуль над некоторым ассоциативным кольцом, наделенный, возможно, некоторой дополнительной структурой. В частности, кольца (уже не обязательно ассоциативные), кольца с операторами являются линейными алгебраическими системами. Более общий случай — линейные Ω-системы — Ω-модули. Определяются они следующим образом.

Пусть задан некоторый левый L-модуль G и допустим еще, что на множестве G определена некоторая система алгебраических операций Ω. Будем говорить, что G есть Ω-модуль (точнее, L,Ω-модуль), если все операции из Ω соответственно полилинейны. Это значит, что если ω — принадлежащая Ω n-арная операция, то

$$a_1a_2 \ldots a_{i-1}(\alpha a_i + \beta a_i')\,a_{i+1} \ldots a_n\omega = \\ = \alpha\,(a_1a_2 \ldots a_{i-1}a_ia_{i+1} \ldots a_n\omega) + \beta\,(a_1a_2 \ldots a_{i-1}a_i'a_{i+1} \ldots a_n\omega); \\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

при α, $\beta \in L$ и соответствующих наборах аргументов в G. При этом, если $n > 1$, приходится также предполагать, что кольцо L коммутативно. Из определения следует, что Ω-модули являются частным случаем мультиоператорных групп. Примерами таких Ω-модулей служат Γ-(K-)модули, естественно возникающие из линейных пар типа (G, Γ) и двухсторонних модулей, связанных с представлениями колец.

Если L — тело или поле, то соответствующий Ω-модуль можно назвать Ω-пространством, или, лучше линейной Ω-алгеброй. В работе А. Г. Куроша [8], например, изучались свободные линейные Ω-алгебры.

Можно также рассматривать и многоосновные линейные алгебраические системы, в частности внешние линейные системы. Так, например, всякая (полилинейная) функция одной, двух и большего числа переменных, определенная на векторном пространстве и принимающая значения в основном поле, задает внешнюю линейную систему. Такие внешние линейные системы имеют, как правило, геометрическую природу.

Если на L-модуле G определена некоторая дополнительная система операций, внешних или внутренних, то группа всех автоморфизмов возникающей здесь линейной системы есть подгруппа полной линейной группы $\Gamma L(G)$. Так, в частности, возникают классические группы (см., например, Ван дер Варден [2]). При изучении групп автоморфизмов конечномерных линейных систем над полями важную роль играет понятие алгебраической группы, которому мы посвятим следующий пункт.

2. Алгебраические линейные группы. Сразу же заметим, что употребляемая здесь алгебраичность имеет другое содержание по сравнению с тем, что уже встречалось у нас раньше. Рассматриваемые в этом пункте алгебраические группы представляют большой интерес с различных точек зрения. Мы обязаны этим понятием тому обстоятельству, что элементы n-мерной матричной группы над полем можно рассматривать как векторы n^2-мерного векторного пространства. Приведем определения.

Пусть вначале H — некоторое m-мерное векторное пространство над бесконечным полем P, и допустим, что в H фиксирован некоторый базис. В таком случае каждый вектор из H — это m-строка с элементами из P. Обозначим еще через $P[x_1, x_2, \ldots, x_m] = Q$ кольцо полиномов над полем P от коммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in Q$ и $a \in H$, то имеет смысл $f(a)$ — это элемент поля P. Таким образом, мы приходим к отображению $f: a \to f(a)$ пространства H в поле P. Отображения такого типа называются *полиномиальными отображениями*. Нетрудно понять, что свойство отображения быть полиномиальным не зависит от базиса, хотя при переходе к другому базису меняется

соответствующий полином. Легко также проверить, что совокупность всех полиномиальных отображений из H в P есть подалгебра линейной ассоциативной алгебры P^H, и эта подалгебра инвариантна относительно действия группы $\Gamma L(H)$ в алгебре P^H. Кроме того, заметим, что из бесконечности поля P следует, что указанная алгебра полиномиальных функций изоморфна алгебре полиномов $Q = P[x_1, x_2, \ldots, x_m]$.

Допустим далее, что S — некоторое подмножество в Q, и M — совокупность всех элементов из H, являющихся корнями каждого полинома из S. Такое множество M называется *алгебраическим многообразием*, определяемым множеством полиномов S. Если, с другой стороны, M — некоторое подмножество в H, то можно говорить о множестве S всех полиномов из Q, которые обращаются в нуль в каждой точке из M. Очевидно, что S — идеал в Q. В силу теоремы Гильберта, каждый такой идеал имеет конечное число образующих, и это означает, что в H выполняется условие минимальности для алгебраических многообразий. Итак, мы приходим к отношениям типа соответствий Галуа между алгебраическими многообразиями в H и определяющими их идеалами в Q. Мы исходили сейчас из некоторого фиксированного базиса в H, однако ясно, что свойство подмножества $M \subset H$ быть алгебраическим многообразием инвариантно: если перейти к другому базису, то меняется только определяющий идеал. Возможно также и непосредственно инвариантное определение алгебраического многообразия, опирающееся на инвариантное определение полиномиальных функций (см., например, К. Шевалле [1]).

Отмеченное сейчас соответствие Галуа составляет, как известно, предмет алгебраической геометрии. Нас это соответствие интересует в применении к тому случаю, когда пространство H есть n^2-мерное пространство эндоморфизмов n-мерного векторного пространства G.

Если в такой ситуации M — некоторое алгебраическое многообразие в H, то совокупность всех обратимых матриц из M назовем *регулярной частью многообразия* M. Всякая матричная группа, являющаяся регулярной

частью некоторого алгебраического многообразия, называется *алгебраической матричной группой*. Другими словами, алгебраическая матричная группа — это такая подгруппа полной линейной группы которая является пересечением этой полной линейной группы и некоторого алгебраического многообразия. Это определение, очевидно, можно повторить для произвольных конечномерных линейных групп — групп, лежащих в конечномерных линейных алгебрах.

Теории алгебраических матричных групп посвящена значительная литература, в том числе и монографии. Уже исходные определения говорят о связях с алгебраической геометрией. Важные применения имеются и в дифференциальной алгебре (см., например, Е. Колчин [1] и И. Капланский [1]), где такие группы играют роль групп Галуа. В настоящем параграфе мы ограничиваемся простейшими фактами, имеющими отношение к нашей теме.

Перед тем как перейти к примерам, отметим следующий очевидный, но важный факт:

2.1. *Пересечение любого множества алгебраических групп также является алгебраической группой.*

Все рассматриваемые здесь группы лежат в одной общей полной линейной группе. Ясно, что сама полная линейная группа является алгебраической — определяющим идеалом служит при этом нулевой идеал. Рассмотрим другие примеры.

Легко видеть, что группа всех матриц, имеющих определитель, равный единице, есть алгебраическая группа. Действительно, если X — переменная матрица с элементами x_{ij}, то уравнение $\det X = 1$, расписанное в координатах, определяет указанную специальную группу матриц. Приведем дальше следующее предложение:

2.2. *Если σ — произвольный эндоморфизм пространства G, то централизатор этого эндоморфизма в $\Gamma L(G)$ есть алгебраическая группа.*

Прежде всего, заметим, что если это утверждение будет доказано для одного эндоморфизма σ, то ввиду 2.1 оно окажется верным и для любого множества эндоморфизмов. Как обычно, матрицу, отвечающую эндоморфизму σ, мы обозначаем через $(a_{\alpha\beta}(\sigma))$. Понятно, что

элемент $\varphi \in \Gamma L(G)$ тогда и только тогда принадлежит централизатору эндоморфизма σ, когда выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}(\sigma) a_{kj}(\varphi) - a_{ik}(\varphi) a_{kj}(\sigma)) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь левые части при фиксированном σ записываются как полиномы от координат вектора $(a_{\alpha\beta}(\varphi))$. Этим утверждение 2.2 доказано.

Из него, в частности, вытекает, что в матричной группе $\Gamma L(G)$ выполняется условие минимальности для централизаторов подмножеств. Опираясь на этот факт, в частности, легко строить примеры групп, не допускающих точного матричного (конечномерного) представления (ср. И. Капланский [1], стр. 71).

2.3. *Пусть A и B, $A \subset B$, — два подпространства в G и пусть $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(B/A)$ — $\Gamma L(G)$-централизатор факторпространства B/A. Тогда $\mathfrak{z}$ — алгебраическая группа.*

Возьмем в пространстве G специальный базис — «проходящий» через пару A, B; сначала возьмем базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ в A, затем дополним его до базиса $e_1, e_2, \ldots, e_s$ в B, а последний до базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в G. Теперь запишем уравнения:

$$x_{ii} = 1, \text{ если } i = k+1, \ldots, s,$$
$$x_{ij} = 0, \text{ если } i \leqslant s,\ k < j \text{ и } i \neq j.$$

Эти уравнения, очевидно, определяют группу $\mathfrak{z}$. Следовательно, $\mathfrak{z}$ — алгебраическая группа.

Из этого предложения, в частности, следует, что $\Gamma L(G)$-нормализатор любого подпространства из G является алгебраической группой. Отсюда же и из 2.1 следует, что $\Gamma L(G)$-централизатор любого нормального ряда в G является алгебраической группой. В свою очередь из последнего свойства и из определения α-радикала вытекает, что если Σ — произвольная алгебраическая подгруппа в $\Gamma L(G)$, то радикал $\alpha_G(\Sigma)$ также является алгебраической подгруппой. Особый интерес представляет для нас следующее предложение:

2.4. *Если в пространстве G определена еще некоторая система операций Ω, относительно которой G есть ли-*

нейная Ω-алгебра, то группа всех автоморфизмов такой алгебры является алгебраической группой.

Пусть $\omega \in \Omega$ — одна из таких операций, пусть эта операция m-арна и пусть Σ — указанная группа автоморфизмов. Для задания операции ω достаточно знать всевозможные разложения

$$e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}\omega = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_m k} e_k,$$

где e_{i_j} — элементы некоторого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в G и $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_m k}$ — соответствующие структурные константы. Кроме того, элемент $\sigma \in \Gamma L(G)$ тогда и только тогда принадлежит Σ, когда при всех $\omega \in \Omega$ и всевозможных наборах e_{i_j}

$$(e_{i_1}\sigma)(e_{i_2}\sigma)\ldots(e_{i_m}\sigma)\omega = (e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_m}\omega)\sigma.$$

Этим соотношениям отвечают координатные соотношения, левые части которых — некоторые полиномы из Q, в которых участвуют структурные константы. Такие полиномы определяют группу Σ, что и требовалось.

В частности, если на G определена еще ассоциативная или лиева алгебра, то группа всех автоморфизмов такой алгебры является алгебраической группой.

Понятно, что такое же утверждение применимо и к группам автоморфизмов внешних линейных систем, определяемых некоторыми полилинейными функциями.

В связи с этими замечаниями естественно возникает следующий вопрос: верно ли, что для всякой алгебраической подгруппы из $\Gamma L(G)$ можно так определить полилинейные операции в G (внешние или внутренние), чтобы заданная группа была группой всех автоморфизмов возникающей здесь линейной системы? Ситуация здесь аналогична той, которую мы имели в п. 2.3.3. Нетрудно проверить, что если Σ — группа всех треугольных матриц заданного порядка над полем P, — такая группа, очевидно, является алгебраической, — то каждая полилинейная Σ-инвариантная (внутренняя) операция ω одноместна и имеет вид $g\omega = \alpha g$, $g \in G$, $\alpha \in P$. Но все эти операции инвариантны относительно соответствующей полной линейной группы, так что нужной Галуа-замкнутости здесь нет.

Обозначим дальше через K алгебру всех полиномов от n переменных над полем P. Если выбрать базис в G, то все элементы из K можно трактовать как функции, определенные на G и со значениями в P. Как уже отмечалось, группа $\Gamma L(G)$ при этом действует в K в качестве группы автоморфизмов. Легко проверить следующее утверждение.

2.5. *Если $f \in K$, то $\Gamma L(G)$-централизатор f есть алгебраическая группа.*

Подобное утверждение можно сформулировать на основе регулярного представления и для элементов алгебры Q. Не каждая алгебраическая группа определяется такими своими инвариантами, однако известно (см. К. Шевалле), что каждая алгебраическая линейная группа определяется конечным набором своих полуинвариантов (собственных векторов) в Q. Опираясь на это важное свойство, Ю. И. Мерзляков показал, что *каждая алгебраическая линейная группа над полем нулевой характеристики рационально изоморфна некоторой группе матриц, определяемой конечным набором полилинейных операций.* Этот факт интересно сопоставить с приведенным выше замечанием об отсутствии Галуа-замкнутости, также принадлежащим Ю. И. Мерзлякову.

Докажем теперь следующую теорему:

2.6. *Пусть подгруппа $\Sigma \subset \Gamma L(G)$ содержит алгебраическую подгруппу Φ конечного индекса. Тогда и сама группа Σ является алгебраической. В частности, всякая конечная подгруппа из $\Gamma L(G)$ является алгебраической.*

Пусть группа Φ определяется идеалом S из Q и пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ — полная система представителей правых смежных классов Σ по Φ. Ясно, что элемент $\sigma \in \Gamma L(G)$ тогда и только тогда принадлежит Σ, когда при некотором $i = 1, 2, \ldots, k$ элемент $\sigma\sigma_i^{-1}$ принадлежит Φ. Обозначим еще через U идеал в Q, отвечающий группе Σ, т. е. состоящий из всех $f \in Q$, обращающихся в нуль на каждом элементе из Σ. Нужно показать, что если обратимый элемент принадлежит алгебраическому многообразию идеала U, то он принадлежит и Σ. Допустим, что это не так, и пусть ψ — противоречащий этому условию элемент. Тогда при любом $i = 1, 2, \ldots, k$ элемент $\psi\sigma_i^{-1}$ не принадлежит Φ, и следовательно, для

каждого такого i найдется $f_i \in S$, что $f_i(\psi\sigma_i^{-1}) \neq 0$. Пусть $f(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} f_i(\sigma\sigma_i^{-1})$. Ясно, что $f \in U$ и $f(\psi) \neq 0$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, идеал U определяет группу Σ, и Σ — алгебраическая группа.

Нетрудно также показать, что нормализатор любой алгебраической подгруппы из $\Gamma L(G)$ также является алгебраической подгруппой.

Понятие алгебраического многообразия позволяет ввести специальную топологию. Учитывая, что объединение конечного числа и пересечение любого числа алгебраических многообразий также является алгебраическим многообразием, алгебраические многообразия можно принять за систему замкнутых множеств. Так мы приходим к топологии Зарисского. В частности, можно говорить о топологии Зарисского в n^2-мерном пространстве всех линейных операторов n-мерного векторного пространства G. Эта топология индуцирует топологию в $\Gamma L(G)$, причем замкнутые подгруппы — это в точности алгебраические группы. Эта введенная алгебраическими средствами топология не так уж плоха. Во-первых, нетрудно проверить, что замыкание подгруппы есть подгруппа и замыкание нормального делителя — нормальный делитель. Из предложения 2.2 непосредственно следует также, что замыкание абелевой подгруппы также является абелевой подгруппой. Кроме того, из приведенного только что замечания легко вывести следующее утверждение: если Σ и Φ — подгруппы в $\Gamma L(G)$, причем Σ — нормальный делитель в Φ, то замыкание подгруппы Σ является нормальным делителем в замыкании подгруппы Φ.

Имеет место также следующая теорема:

2.7. *Замыкание разрешимой подгруппы из $\Gamma L(G)$ — также разрешимая подгруппа. Замыкание нильпотентной подгруппы снова является нильпотентной подгруппой.*

В действительности мы будем доказывать следующее более общее предложение: если матричная группа $\Sigma \subset \Gamma L(G)$ удовлетворяет некоторому групповому тождеству $w(x_1, x_2, \ldots, x_k) = e$, то этому же тождеству удовлетворяет и замыкание Σ'.

Возьмем в Σ фиксированный набор элементов $a_2, a_3, \ldots$ $\ldots, a_k$, и пусть X — подмножество в $\Gamma L(G)$, состоящее из всех x, удовлетворяющих условию $w(x, a_2, a_3, \ldots, a_k) = e$. Легко понять, что X — замкнутое подмножество в $\Gamma L(G)$. Так как $\Sigma \subset X$, то и $\Sigma' \subset X$. Следовательно, при любых $a_2, a_3, \ldots, a_k \in \Sigma$, и $x_1 \in \Sigma'$ выполняется соотношение $w(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = e$. Дальше применяем индукцию. Допустим, уже установлено, что при любых $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1} \in \Sigma'$ и $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k \in \Sigma$ выполняется $w(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = e$. Возьмем $a_{i+1}, \ldots, a_k \in \Sigma$ и $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1} \in \Sigma'$, и пусть X — множество всех x_i, удовлетворяющих условию $w(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = e$. Это множество замкнуто в $\Gamma L(G)$, и так как $\Sigma \subset X$, то и $\Sigma' \subset X$. Таким образом, индукция проведена, и теорема доказана.

Теорему 2.9 интересно сопоставить со следующими двумя теоремами, которые приведем без доказательств (см. В. П. Платонов [1]).

2.8. *Всякая периодическая алгебраическая матричная группа над полем нулевой характеристики конечна.*

2.9. *Локально нильпотентная алгебраическая группа (над любым полем) всегда нильпотентна.*

Первая из этих теорем означает, в частности, что замыкание периодической группы может уже не быть периодической группой, а из второй аналогичное замечание следует для локальной нильпотентности. Кроме того, мы видим, что алгебраичность выступает здесь в качестве условия конечности.

В упомянутой работе В. П. Платонова приводится также следующее предложение:

2.10. *Неприводимая нильпотентная группа Σ тогда и только тогда алгебраична, когда ее центр является алгебраическим.*

Отметим далее, что точка зрения топологии Зарисского позволила получить ряд очень глубоких фактов, параллельных структурным теоремам о лиевых группах. Этот топологический подход оказался весьма плодотворным в чисто алгебраической проблематике. По-видимому, было бы интересно в какой-то мере развить эти идеи и для бесконечномерного случая.

В заключение пункта приведем некоторые замечания о расщеплениях. Будем говорить, что эндоморфизм σ расщепляем, если его можно представить в виде $\sigma = \varphi + \psi$, где φ — полупростой (вполне приводимый) эндоморфизм и ψ — нильпотентный эндоморфизм, причем φ и ψ перестановочны. Из формы Жордана непосредственно следует, что если основное поле алгебраически замкнуто, то каждый эндоморфизм соответствующего пространства расщепляем. Имеет место также следующая теорема (К. Шевалле [1]):

2.11. *Если конечномерное векторное пространство G задано над совершенным полем, то каждый эндоморфизм такого пространства однозначно расщепляем, причем компоненты расщепления выражаются как полиномы от исходного эндоморфизма.*

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем и заметим только, что в работе Ч. Кертиса [3] приводится обобщение ее на локально алгебраические эндоморфизмы.

Если автоморфизм σ расщепляем и $\varphi + \psi$ — соответствующее расщепление, то φ — также автоморфизм и можно записать $\sigma = \varphi(\varepsilon + \varphi^{-1}\psi)$. При этом автоморфизм $\psi' = \varepsilon + \varphi^{-1}\psi$ является унипотентным и разложение $\sigma = \varphi \cdot \psi'$ называется *мультипликативным расщеплением* автоморфизма σ. Здесь φ и ψ' также перестановочны.

Приведем теперь следующее определение: линейная группа Γ называется *расщепляемой*, если все ее элементы (мультипликативно) расщепляемы, причем компоненты расщепления каждый раз также принадлежат Γ. Из 2.11 вытекает, что полная линейная группа над совершенным полем всегда расщепляема. В теории алгебраических групп важную роль играет следующая теорема (А. И. Мальцев [8], А. Борель [1]):

2.12. *Каждая алгебраическая группа над совершенным полем расщепляема.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующий интересный для нас факт: если основное поле совершенно и над G задана некоторая линейная алгебраическая система, *то компоненты расщепления каждого автоморфизма этой системы также являются ее автоморфизмами.*

3. Регулярные автоморфизмы линейных систем. Как уже отмечалось, одной из интересных задач теории алгебраических систем является изучение связей между абстрактными свойствами системы и симметриями этой системы.

В связи с этой задачей для групп, и вообще для мультиоператорных групп, особое значение приобретают *регулярные* автоморфизмы, т. е. автоморфизмы, оставляющие неподвижной только единицу (или, для Ω-групп, нуль) группы. Никакой нильавтоморфизм, конечно, не является регулярным автоморфизмом, и регулярные автоморфизмы и нильавтоморфизмы в некотором смысле противоположны.

Сейчас мы рассмотрим некоторые факты, связанные с регулярными автоморфизмами Ω-модулей, а в п. 6.1.5 пойдет речь о регулярных автоморфизмах групп.

Всюду дальше Ω-модули будут рассматриваться над полями; легко видеть, что в рассматриваемых здесь задачах основное поле всегда можно предполагать алгебраически замкнутым. Нам понадобятся вначале некоторые сведения об эндоморфизмах векторных пространств над алгебраически замкнутыми полями. Приведем эти сведения.

Пусть G — векторное пространство над полем P, и σ — эндоморфизм этого пространства. Как известно, элемент $\lambda \in P$ называется *собственным значением эндоморфизма* σ, если для некоторого $a \in G$, $a \neq 0$, будет $a\sigma = \lambda a$, или, что то же, $a(\sigma - \lambda\varepsilon) = 0$. Каждый такой элемент a называется *собственным вектором эндоморфизма* σ, отвечающим собственному значению λ. Если $\lambda \in P$ не является собственным значением для σ, то эндоморфизм $\sigma - \lambda\varepsilon$ является мероморфизмом. Для каждого собственного значения λ оператора σ через G_λ обозначим верхнее ядро оператора $\sigma - \lambda\varepsilon$ и, по аналогии с конечномерным случаем, это G_λ назовем корневым подпространством в G, отвечающим корню λ. G_λ состоит из всех таких $a \in G$, для которых при некотором k выполняется равенство $a(\sigma - \lambda\varepsilon)^k = 0$.

Допустим далее, что σ — локально алгебраический эндоморфизм (или, что то же, внешне алгебраический эндоморфизм, ср. п. 2.5.4).

Это означает, что для каждого $a \in G$ найдется такой полином $f(x)$ с коэффициентами из P, что $af(\sigma)=0$. Полином минимальной степени с таким свойством называется минимальным полиномом эндоморфизма σ относительно элемента a; обозначим его через $\varphi_a(x)$. Если $af(\sigma)=0$, то $f(x)$ делится на $\varphi_a(x)$. Теперь понятно, что если $a \in G_\lambda$, то минимальный полином относительно этого a имеет вид $(x-\lambda)^k$. Число k, входящее сюда, назовем порядком элемента a относительно $\sigma-\lambda\varepsilon$.

Имеет место следующая теорема:

3.1. *Если поле P алгебраически замкнуто, то эндоморфизм σ тогда и только тогда является локально алгебраическим, когда пространство G распадается в прямую сумму всех корневых подпространств оператора σ.*

Пусть P — алгебраически замкнутое поле и пусть вначале σ — локально алгебраический автоморфизм. Пусть дальше $G_{\lambda_0}, G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_m}$ — некоторое конечное множество корневых подпространств оператора σ. Допустим, что имеет место равенство

$$a_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_m,$$

где $a_i \in G_{\lambda_i}$, $i=0, 1, \ldots, m$. Для каждого a_i найдем показатель n_i такой, что $a_i(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{n_i}=0$. Пусть дальше $f(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\ldots(x-\lambda_m)^{n_m}$. Как $(\sigma-\lambda_0\varepsilon)^{n_0}$, так и $f(\sigma)$ аннулируют элемент a_0. Беря дальше $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $u(x)f(x)+v(x)(x-\lambda_0)^{n_0}=1$, мы получим:

$$a_0 = a_0(u(\sigma)f(\sigma)+v(\sigma)(\sigma-\lambda_0\varepsilon)^{n_0}) = \\ = a_0 f(\sigma)u(\sigma)+a_0(\sigma-\lambda_0\varepsilon)^{n_0}v(\sigma)=0.$$

Этим доказано, что сумма всех корневых подпространств оператора σ является прямой суммой. Нужно показать, что эта сумма совпадает с G. Пусть a — произвольный элемент в G. Так как σ — локально алгебраический эндоморфизм, то в G найдется конечномерное σ-инвариантное подпространство H, содержащее a. Согласно конечномерной теории H является прямой суммой корневых относительно σ подпространств. Но каждое корневое подпространство в H является частью соответствующего корневого подпространства в G. Таким образом, a принадлежит сумме корневых подпространств, и в одну сторону утверждение доказано.

В обратную сторону оно легко следует из общей теоремы 3.3.2.1.

Как известно, теория локально алгебраических эндоморфизмов во многом параллельна теории периодических абелевых групп. Так, в частности, приведенная сейчас теорема имеет своим аналогом утверждение о том, что каждую периодическую абелеву группу можно разложить на примарные компоненты. Нетрудно найти аналог и для следующего утверждения. Если σ — алгебраический эндоморфизм (т. е. являющийся корнем некоторого полинома), то ему отвечает конечное число корневых подпространств, и каждое G_λ есть прямая сумма инвариантных относительно σ конечномерных подпространств ограниченной в совокупности размерности, причем таких, что в каждом из них $\sigma - \lambda\varepsilon$ действует как нильпотентный эндоморфизм. Этот параллелизм находит объяснение в общей теории модулей над кольцами главных идеалов. Легко также понять, что если основное поле алгебраически замкнуто, то эндоморфизм σ тогда и только тогда является локально алгебраическим, когда в G имеется возрастающий σ-инвариантный ряд с одномерными факторами.

Допустим далее, что G — линейная Ω-алгебра над алгебраически замкнутым полем P относительно некоторой системы операций Ω, и пусть σ — локально алгебраический эндоморфизм алгебры G. Мы покажем, что если w — n-арная операция из Ω, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы в G, причем $a_i \in G_{\lambda_i}$, то $a_1a_2\ldots a_n\omega \in G_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$. При этом все λ здесь связаны с σ и не обязательно различны, и, кроме того, мы считаем, что $G_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} = 0$, если $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ не является собственным значением.

Введем обозначения: если $a_i \in G_{\lambda_i}$, то пусть $a_i^{(k)} = a_i(\sigma - \lambda_i\varepsilon)^k$. Из этих обозначений следует, что $a_i^{(k)}\sigma = \lambda_i a_i^{(k)} + a_i^{(k+1)}$, и кроме того, при некотором t будет $a_i^{(t)} = 0$. Для данного упорядоченного набора элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = X$ будем рассматривать всевозможные элементы вида $a_1^{(k_1)}a_2^{(k_2)}\ldots a_n^{(k_n)}\omega$. Такие элементы условимся называть здесь X-элементами, а сумму показателей $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ назовем степенью X-элемента. Используя тот факт, что σ — эндоморфизм, непосредственной проверкой убеждаемся, что элемент $a_1^{(k_1)}a_2^{(k_2)}\ldots$

$\ldots a_n^{(k_n)}\omega(\sigma-\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\varepsilon)$ есть линейная комбинация некоторых X-элементов, имеющих степени строго большие, чем Σk_i. Пусть теперь элемент a_i имеет относительно $\sigma-\lambda_i\varepsilon$ порядок t_i. Тогда, если $t=\Sigma t_i$, то элемент $a_1a_2\ldots$ $\ldots a_n\omega(\sigma-\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\varepsilon)^t=b$ есть линейная комбинация некоторых X-элементов, в каждом из которых среди «сомножителей» имеется хотя бы один нуль. Но тогда ясно, что $b=0$ и $a_1a_2\ldots a_n\omega\in G_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$.

Отметим далее, что регулярность автоморфизма σ означает, что среди собственных значений этого автоморфизма нет единицы.

Мы продемонстрируем теперь главную идею следующей теоремой (здесь и дальше мы следуем в основном работе Е. Патерсона [1]):

3.2. *Пусть G — ассоциативная линейная алгебра над некоторым полем P, допускающая алгебраический регулярный автоморфизм σ. В таком случае G нильпотентна.*

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — все собственные значения автоморфизма σ (будем считать, что поле P алгебраически замкнуто). Будем показывать, что произведение любых $k+1$ элементов из G есть нуль. Достаточно рассмотреть случай, когда все сомножители берутся из корневых подпространств. Допустим, что при некоторых $a_i\in G_{\lambda_i}$ произведение $a_1a_2\ldots a_{k+1}$ отлично от нуля. Тогда и все $a_1a_2\ldots a_r$ $(r\leqslant k+1)$ также отличны от нуля, и, следовательно, каждое произведение $\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\ldots\lambda_{\alpha_r}$ содержится в наборе $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Так как таких произведений достаточно много, то по крайней мере два из них совпадают. Последнее означает, что $\lambda_{\alpha_{p+1}}\lambda_{\alpha_q}=1$ для некоторых p и q, удовлетворяющих условию $1\leqslant$ $\leqslant p<q\leqslant k+1$. Так как единица не является собственным значением, то мы приходим к равенству нулю элемента $a_{p+1}\ldots a_q$. Это противоречит исходному предположению о том, что $a_1a_2\ldots a_{k+1}\neq 0$. Следовательно, всегда $a_1a_2\ldots a_{k+1}=0$ и G — нильпотентная алгебра.

Различные обобщения этой теоремы могут быть получены сведением этих обобщенных ситуаций к рассмотренной здесь.

Понятно также, что если в теореме 3.2 исходить из того, что σ — локально алгебраический регулярный автоморфизм и алгебра G локально конечномерна, то G при

этом — локально нильпотентная алгебра. Вообще же дополнительные ограничения на регулярный автоморфизм здесь необходимы. Действительно, если G — некоторый Ω-модуль и $\Gamma = \{\sigma\}$ — бесконечная циклическая группа, то, исходя из регулярного представления Γ (см. п. 2.1.4), мы можем рассматривать σ как автоморфизм дискретной прямой суммы $\widetilde{G} = \Sigma G_\varphi$, где G_φ — экземпляры G, сопоставляемые элементам φ из Γ. Такой σ является регулярным автоморфизмом Ω-модуля $\widetilde{G}$. Что касается $\widetilde{G}$, то здесь имеется достаточно большой произвол.

Приведем сейчас одно вспомогательное предложение.

3.3. *Пусть G — линейная Ω-алгебра* и *H — ее идеал, допустимый относительно автоморфизма σ, причем такой, что $H(\sigma - \varepsilon) = H$. Тогда, если σ — регулярный автоморфизм Ω-алгебры G, то σ действует как регулярный автоморфизм и в G/H.*

В самом деле, пусть $(a + H)\sigma = a + H$. Тогда $a(\sigma - \varepsilon) \in H$ и, следовательно, найдется $b \in H$ такой, что $a(\sigma - \varepsilon) = b(\sigma - \varepsilon)$ или $(a - b)\sigma = a - b$. Из регулярности σ в G теперь следует $a = b$ и $a + H = H$.

Покажем, что свойство $H(\sigma - \varepsilon) = H$ выполняется для каждого алгебраического и регулярного автоморфизма σ. Пусть σ — алгебраический регулярный автоморфизм. Тогда при некоторых коэффициентах выполняется соотношение

$$\alpha_0\varepsilon + \alpha_1(\sigma - \varepsilon) + \ldots + \alpha_n(\sigma - \varepsilon)^n = 0.$$

Так как σ — регулярный автоморфизм, то $\alpha_0 \neq 0$. Если теперь $h \in H$, то $\alpha_0 h = -h[\alpha_1\varepsilon + \ldots + \alpha_n(\sigma - \varepsilon)^{n-1}](\sigma - \varepsilon) \in H(\sigma - \varepsilon)$, т. е. $h \in H(\sigma - \varepsilon)$. Это означает, что $H \subset H(\sigma - \varepsilon)$ и $H = H(\sigma - \varepsilon)$.

Отмеченное сейчас свойство верно и для локально алгебраического регулярного автоморфизма.

В § 1.2 для произвольных Ω-групп с условием минимальности для идеалов был определен (ко-)радикал (Алберта) — пересечение всех идеалов, фактор-группы по которым вполне приводимы и без центра. В частности, можно говорить о таком радикале для линейных Ω-алгебр с условием минимальности для идеалов. Пусть G — такая Ω-алгебра и $\mathfrak{R}(G)$ — соответствующий радикал.

Тогда $G/\mathfrak{R}(G)$ — вполне приводимая Ω-алгебра без центра, и следовательно, в ней имеется единственное разложение на простые слагаемые.

Докажем теперь следующую лемму:

3.4. *Пусть G — линейная Ω-алгебра с условием минимальности для идеалов и σ — локально алгебраический регулярный автоморфизм G. Тогда либо $\mathfrak{R}(G)=G$, либо в G найдется такой идеал H, что G/H — простая Ω-алгебра, в которой некоторая степень σ индуцирует регулярный автоморфизм.*

Пусть $G \neq \mathfrak{R}(G)$ и пусть

$$G/\mathfrak{R}(G)=\bar{G}=\bar{G}_1+\bar{G}_2+\ldots+\bar{G}_s$$

— разложение фактор-алгебры на простые слагаемые. Автоморфизм σ индуцирует регулярный автоморфизм в $\bar{G}$, и так как разложение здесь единственно, то σ переставляет слагаемые. Следовательно, при некотором показателе k будет $\bar{G}_1\sigma^k=\bar{G}_1$. Пусть этот k является наименьшим с указанным свойством, и допустим, что для некоторого $\bar{x}\in\bar{G}_1$ имеем $\bar{x}\sigma^k=\bar{x}$. Очевидно, что если $\bar{y}=\bar{x}+\bar{x}\sigma+\ldots+\bar{x}\sigma^{k-1}$, то $\bar{y}\sigma=\bar{y}$. Так как σ действует в $\bar{G}$ регулярно, то $\bar{y}=0$. Учитывая, что все $\bar{x}\sigma_i$ при $\bar{x}\neq 0$ принадлежат различным слагаемым, заключаем отсюда, что $\bar{x}=0$ и σ^k действует регулярно на $\bar{G}_1$. Этим лемма доказана.

Эта лемма позволяет получить некоторые другие результаты о конкретных типах Ω-алгебр, допускающих регулярные автоморфизмы. Из нее, в частности, легко вывести, что если K — ассоциативное кольцо с условием минимальности, допускающее регулярный автоморфизм σ такой, что

$$\mathfrak{R}(K)(\sigma-\varepsilon)=\mathfrak{R}(K),$$

то K нильпотентно. Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить, что простое кольцо с условием минимальности содержит единицу и, следовательно, не имеет регулярных автоморфизмов. Поэтому $K=\mathfrak{R}(K)$. Кроме того, имеем следующую теорему:

3. 5. *Если G — конечномерная лиева алгебра над полем характеристики нуль, допускающая регулярный автоморфизм, то G разрешима.*

Простых алгебр с этим свойством нет, это доказано в работе Бореля—Мостова [1], и в силу 3.4 теперь имеем $G = \mathfrak{R}(G)$. С другой стороны, в теории лиевых алгебр известно, что $\mathfrak{R}(G)$ — разрешимая алгебра.

Результат, аналогичный теореме 3.5, для полей произвольной характеристики доказан в работе В. А. Крекнина [1] в предположении, что соответствующий регулярный автоморфизм имеет конечный порядок. При этом алгебра Ли не предполагается конечномерной. С другой стороны, как показал Г. Хигмен [2], каждая лиева алгебра, допускающая регулярный автоморфизм простого порядка, нильпотентна. Здесь же имеются некоторые оценки, связанные с классом нильпотентности. (См. также Крекнин—Кострикин [1].)

4. Разное. Пусть G — Ω-полугруппа с единицей (в том смысле, как она определена в первой главе) и a дистрибутивный и одновременно обратимый элемент в G. Легко видеть, что a^{-1} — также дистрибутивный элемент и отображение $x \to a^{-1}xa$ есть автоморфизм Ω-полугруппы G. Такой автоморфизм называется внутренним и обозначается через $\hat{a}$. Множество всех внутренних автоморфизмов Ω-полугруппы G есть подгруппа в группе $\mathrm{Aut}(G)$ всех автоморфизмов. Легко также видеть, что при любом $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ выполняется $\sigma^{-1}\hat{a}\sigma = \widehat{a\sigma}$, т. е. группа внутренних автоморфизмов является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов. Все сказанное сейчас применимо, в частности, к ассоциативным кольцам. Если же в кольце нет единицы, то при определении внутреннего автоморфизма можно исходить из обратимости в присоединенном умножении.

Идея внутреннего автоморфизма применима к различным классам общих алгебр, если под внутренними автоморфизмами понимать автоморфизмы, определяемые внутренними средствами. При этом каждый раз можно специально уточнять, что такое «внутренние средства».

Такого рода исследование проводилось, например, Б. Чакань, причем при подходящих определениях внутренние автоморфизмы составляют здесь нормальный делитель в группе всех автоморфизмов.

Приведем далее некоторые замечания об автоморфизмах полных колец линейных операторов. В этом вопросе существенную роль играют полулинейные преобразования, и мы остановимся на них несколько подробнее. Пусть G — левый L-модуль. Если этот модуль рассматривать как пару (тоже левую) (L, G), то в соответствии с общими рассмотрениями второй главы эндоморфизм такой пары — это отображение $\mu = (\tau, \sigma)$ такое, что: $\mu: G \to G^\mu = G^\sigma$ — эндоморфизм абелевой группы G, $\mu: L \to L^\mu = L^\tau$ — эндоморфизм кольца L и, кроме того, $(\lambda a)^\mu = \lambda^\mu a^\mu$ при любых $\lambda \in L$ и $a \in G$. Если $\mu_1 = (\tau_1, \sigma_1)$ и $\mu_2 = (\tau_2, \sigma_2)$ — такие эндоморфизмы, то и произведение $\mu_1\mu_2 = (\tau_1\tau_2, \sigma_1\sigma_2)$ также является эндоморфизмом. *Полулинейным преобразованием* L-модуля G называется такой $\mu = (\tau, \sigma)$, в котором σ — автоморфизм L. При этом в полулинейном преобразовании в первую очередь нужно видеть σ — эндоморфизм абелевой группы G, которому придан некоторый τ.

Полулинейные преобразования образуют полугруппу, а обратимые полулинейные преобразования составляют группу. Линейное преобразование — это частный случай полулинейного. Нетрудно понять, что если μ — обратимое полулинейное преобразование и σ — линейное преобразование, то $\mu^{-1}\sigma\mu$ — также линейное преобразование, и отображение $\sigma \to \mu^{-1}\sigma\mu$ есть автоморфизм кольца $K = H(G)$ всех линейных операторов модуля G. Таким образом, каждое полулинейное преобразование индуцирует автоморфизм кольца K. Замечательным является то обстоятельство, что в хороших случаях каждый автоморфизм кольца K получается указанным образом (см., например, Р. Бер [7]). Перейдем к матричному языку.

Пусть L — кольцо с единицей и модуль G представлен в виде прямой суммы свободных циклических модулей:

$$G = \Sigma L e_\alpha, \quad \alpha \in I.$$

Если, далее, τ — некоторый автоморфизм кольца L, то сопоставим ему автоморфизм σ_τ абелевой группы G по правилу: если $a = \Sigma\lambda_\alpha e_\alpha$, то $a\sigma_\tau = \Sigma\lambda_\alpha^\tau e_\alpha$. Легко видеть, что $\mu_\tau = (\tau, \sigma_\tau)$ есть обратимое полулинейное преобразование. Если теперь $\mu = (\tau, \sigma)$ — произвольное полулиней-

ное преобразование модуля G и $\mu_\tau = (\tau, \sigma_\tau)$, то $\mu \cdot \mu_\tau^{-1} = \nu$ — уже линейное преобразование, и мы получаем расщепление $\mu = \nu \cdot \mu_\tau$. Отсюда следует, что группа $\tilde{\Gamma}$ всех полулинейных (обратимых) преобразований представима в виде полупрямого произведения $\tilde{\Gamma} = \Gamma \leftthreetimes \Phi$, где Γ — полная линейная группа модуля G, и Φ — группа, изоморфная группе автоморфизмов кольца L.

Пусть теперь $\mu = (\tau, \sigma)$ — обратимое полулинейное преобразование и $\mu = \nu\mu_\tau$. Здесь ν — автоморфизм модуля G, и следовательно, автоморфизм в кольце K, индуцируемый μ, сводится к внутреннему автоморфизму в K и автоморфизму, индуцируемому специальным полулинейным преобразованием μ_τ. Рассмотрим, как реализуется такой специальный автоморфизм, если элементы из K рассматривать как матрицы. При этом элементы из G рассматриваются как строки.

Пусть $\bar{a}$ — строка, A — матрица из K, и $\mu = \mu_\tau$. Тогда для любого $\alpha \in I$ имеем:

$$(\bar{a}^{\mu^{-1}} \cdot A)^{\mu}(\alpha) = [(\bar{a}^{\mu^{-1}} \cdot A)(\alpha)]^{\tau} = \Big[\sum_{\beta \in I} \bar{a}^{\mu^{-1}}(\beta) \cdot A(\beta, \alpha)\Big]^{\tau} =$$
$$= \sum ((\bar{a}(\beta))^{\tau^{-1}} \cdot A(\beta, \alpha))^{\tau} = \sum \bar{a}(\beta) \cdot (A(\beta, \alpha))^{\tau} = (\bar{a} \cdot A)^{\tau}(\alpha).$$

Таким образом, указанный автоморфизм в каждой матрице A заменяет значения:

$$A(\beta, \alpha) \to (A(\beta, \alpha))^{\tau} = A^{\tau}(\beta, \alpha).$$

Пусть, далее, σ — некоторая подстановка на множестве I. Положим:

$$A^{\sigma} = A^{\sigma}(\alpha, \beta) = A(\alpha\sigma^{-1}, \beta\sigma^{-1}).$$

Простая проверка показывает, что отображение $A \to A^{\sigma}$ является автоморфизмом матричного кольца. Указанный автоморфизм является в действительности внутренним автоморфизмом кольца K.

Чтобы убедиться в этом, элементы из K, как и раньше, будем рассматривать как операторы пространства конечнозначных функций $\bar{a}(\alpha)$, определенных на I со значениями в L. При этом, если $A \in K$, то имеем:

$$(\bar{a}A)(\alpha) = \sum_{\gamma} \bar{a}(\gamma) A(\gamma, \alpha).$$

Дальше положим $\bar{a}^{\sigma}(\alpha)=\bar{a}(\alpha\sigma^{-1})$, и теперь имеем:

$$(\bar{a}A^{\sigma})(\alpha)=\sum_{\gamma\in I}\bar{a}(\gamma)A^{\sigma}(\gamma,\ \alpha)=\sum_{\gamma\in I}\bar{a}(\gamma)A(\gamma\sigma^{-1},\ \alpha\sigma^{-1})=$$
$$=\sum_{\gamma\in I}(\bar{a}^{\sigma^{-1}})(\gamma\sigma^{-1})A(\gamma\sigma^{-1},\ \alpha\sigma^{-1})=(\bar{a}^{\sigma^{-1}}A)(\alpha\sigma^{-1})=(\bar{a}^{\sigma^{-1}}A)^{\sigma}(\alpha).$$

Отсюда, если отображение $\bar{a}(\alpha)\to\bar{a}^{\sigma}(\alpha)$ реализуется матрицей B, то $\bar{a}B^{-1}AB=\bar{a}A^{\sigma}$ и $A^{\sigma}=B^{-1}AB$.

К группам автоморфизмов колец — ассоциативных и лиевых — применимы, конечно, общие рассмотрения предыдущей главы. В случае колец дополнительные факты могут быть получены, если учитывать структурные теории колец — радикалы и полупростоту, различные кольцевые конструкции. Однако общей теории групп автоморфизмов колец посвящено очень немного публикаций, и здесь имеется много интересных проблем. Так, например, было бы интересно более подробно изучать группы автоморфизмов стабильного типа при различных предположениях относительно колец. Наиболее многочисленные и содержательные исследования посвящены описанию автоморфизмов различных конкретных колец.

Мы не будем перечислять относящиеся сюда результаты и сошлемся на список литературы.

По поводу теории Галуа колец сошлемся на книгу Н. Джекобсона [4].

Приведем еще один результат А. И. Кострикина [1]. Отметим вначале, что линейная алгебраическая система называется однородной, если группа всех ее автоморфизмов действует транзитивно на множестве всех ненулевых элементов.

Пусть теперь G — векторное пространство над некоторым полем P и пусть еще на G определена некоторая бинарная ненулевая операция, относительно которой G уже становится линейной алгебраической системой. Тогда, если характеристика P равна нулю, то G не может быть однородной алгеброй. Если же характеристика $p>2$ и G — однородная алгебра, то G — антикоммутативная ниль-алгебра и P — конечное поле, в котором число элементов $q<\dim G-6$. Для характеристики, равной 2, существуют однородные алгебры произвольной конечной размерности.

При этом антикоммутативность означает здесь, что $xy+yx=0$, а «ниль» означает, что при любых x и $a \in G$ и при некотором n выполняется $(\ldots(\underbrace{(xa)\,a)\ldots)\,a}_{n \text{ раз}}=0$.

Отметим, далее, работу Д. М. Смирнова [7], где изучается группа автоморфизмов группового кольца и рассматриваются связи этой группы с группой автоморфизмов базисной группы кольца. До сих пор мало изучен следующий общий вопрос. Пусть K — кольцо и Γ — подгруппа его мультипликативной части, аддитивно порождающая все K. Интересующий нас вопрос посвящен отношениям между группой автоморфизмов кольца K и группами автоморфизмов таких Γ (при различных дополнительных предположениях).

§ 5. ПОЛНАЯ ЛИНЕЙНАЯ И ПОЛНАЯ СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППЫ

1. Полная симметрическая группа. Каждая группа автоморфизмов алгебраической системы есть подгруппа некоторой полной симметрической группы, а каждая группа автоморфизмов линейной алгебраической системы есть подгруппа соответствующей полной линейной группы. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства этих полных групп. Одновременно будет идти речь об автоморфизмах таких групп. Основное внимание при этом уделяется бесконечному случаю.

Если G — некоторое множество, то группу всех подстановок этого множества мы обозначаем через S_G. Группа S_G с точки зрения абстрактной определяется только мощностью множества G. Если $\varkappa_\mu = |G|$ — эта мощность, то S_G называется также полной симметрической группой степени $\varkappa_\mu$.

Допустим далее, что ν — некоторое трансфинитное число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$. Через S_ν мы обозначим совокупность всех подстановок из S_G, перемещающих менее $\varkappa_\nu$ элементов из G. S_ν является нормальным делителем в S_G. Таким образом, мы приходим к возрастающему инвариантному ряду

$$E \subset A \subset S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_\nu \subset \ldots \subset S_\mu \subset S_G. \qquad (1)$$

Здесь, в частности, S_0 — подгруппа, состоящая из всех конечных подстановок. Кроме того, через A мы обозначили здесь обобщенную знакопеременную группу, состоящую из всех конечных подстановок, представимых в виде произведения четного числа транспозиций.

Нашей ближайшей целью является следующая теорема:

1.1. *Если* $|G| > 4$, *то членами ряда* (1) *исчерпываются все нормальные делители группы* S_G, *и для каждого* ν *все нормальные делители в* S_ν — *это члены ряда* (1), *принадлежащие* S_ν.

Для конечного ν эта теорема доказана еще Галуа, для счетного случая она доказана в работе Шрейера — Улама [1], а в общем случае Р. Бером [1]. Конечный случай мы рассматривать не будем и начнем с предположения, что G — счетное множество. В этом предположении докажем несколько вспомогательных предложений.

Приведем вначале несколько определений. Пусть G — множество произвольной мощности и σ — подстановка из S_G. Для каждого натурального или счетного m через $k_\sigma(m)$ обозначим число (мощность множества) независимых циклов длины m, входящих в подстановку σ. Две подстановки σ и φ называются *эквивалентными*, если для этих подстановок функции $k_\sigma(m)$ и $k_\varphi(m)$ совпадают. Понятно, что подстановки σ и φ тогда и только тогда эквивалентны, когда они сопряжены в S_G. Если подстановки σ и φ принадлежат S_ν и эквивалентны, то они сопряжены уже в S_ν. Допустим дальше, что G — счетное множество, и пусть m — возможная длина циклов. Подстановку σ назовем *m-бесконечной*, если $k_\sigma(m) = \infty$. σ называется *вполне бесконечной*, если она m-бесконечна при каждом m. Бесконечная подстановка — это подстановка, перемещающая бесконечное число элементов из G.

1.2. *Для любой бесконечной подстановки* σ *существует эквивалентная ей подстановка* σ' *такая, что* $\sigma\sigma'$ — *2-бесконечная подстановка.*

Допустим вначале, что σ распадается в бесконечное число конечных циклов:

$$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_{k_1})(a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_2})\ldots(a_{k_i+1}, \ldots, a_{k_{i+1}})\ldots$$

В качестве σ' возьмем подстановку

$$\sigma' = (a_2, a_{k_1+1}, a_3, \ldots, a_{k_1})(a_{k_1+2}, a_1, a_{k_1+3}, \ldots, a_{k_2})\ldots$$
$$\ldots(a_{k_{2i}+2}, a_{k_{2i+1}+1}, a_{k_{2i}+3}, \ldots, a_{k_{2i+1}}) \times$$
$$\times (a_{k_{2i+1}+2}, a_{k_{2i}+1}, \ldots, a_{k_{2i+1}+3}, \ldots, a_{k_{2i+2}})\ldots,$$

и пусть $\varphi = \sigma\sigma'$. Непосредственно видно, что

$$a_{k_{2i}+1}\varphi = a_{k_{2i+1}+1} \text{ и } a_{k_{2i+1}+1}\varphi = a_{k_{2i}+1}.$$

Следовательно, $k_\varphi(2) = \infty$.

Пусть теперь σ содержит бесконечный цикл

$$(\ldots a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Введем теперь подстановку σ', совпадающую с σ для всех $a \neq a_i$ и содержащую бесконечный цикл

$$(\ldots a_0, a_2, a_3, a_4, a_1, \ldots, a_{4i+2}, a_{4i+3}, a_{4i+4}, a_{4i+1}, \ldots).$$

Легко проверить, что если $\varphi = \sigma\sigma'$, то

$$a_{4i+1}\varphi = a_{4i+3} \text{ и } a_{4i+3}\varphi = a_{4i+1}.$$

Это означает, что $k_\varphi(2) = \infty$.

1.3. *Если σ — 2-бесконечная подстановка, то найдется эквивалентная ей подстановка σ' такая, что $\sigma\sigma'$ — 1- и 2-бесконечная подстановка.*

Пусть (a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), ... — все 2-циклы, входящие в σ. В качестве σ' возьмем подстановку, совпадающую с σ для всех $a \neq a_i$ и содержащую 2-циклы

$$(a_1, a_2), (a_3, a_5), (a_4, a_6), \ldots, (a_{6k+1}, a_{6k+2}),$$
$$(a_{6k+3}, a_{6k+5}), (a_{6k+4}, a_{6k+6}), \ldots$$

Пусть $\varphi = \sigma\sigma'$. Легко видеть, что

$$a_1\varphi = a_1,\ a_2\varphi = a_2,\ a_7\varphi = a_7,\ a_8\varphi = a_8, \ldots,$$

и значит, $k_\varphi(1) = \infty$. Кроме того,

$$a_3\varphi = a_6,\ a_6\varphi = a_3,\ a_4\varphi = a_5,\ a_5\varphi = a_4, \ldots,$$

и следовательно, $k_\varphi(2) = \infty$.

1.4. *Если σ — 1- и 2-бесконечная подстановка, то найдется эквивалентная ей подстановка σ' такая, что $\sigma\sigma'$ — вполне бесконечная подстановка.*

Пусть

$$(a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6), \ldots$$

— все 2-циклы, входящие в подстановку σ. Эти циклы мы разобьем на счетное множество счетных подмножеств X_1, X_2, ... Циклы, входящие в X_{2q+1}, мы обозначим через

$$(b_1^q,\ b_2^q),\ (b_3^q,\ b_4^q),\ \ldots\ (q=1,\ 2,\ \ldots),$$

а циклы из X_{2q} — через

$$(c_1^q,\ c_2^q),\ (c_3^q,\ c_4^q),\ \ldots$$

Подстановку σ', эквивалентную σ, определяем следующим правилом. В нее входят следующие 2- и 1-циклы (по всем q):

$$(b_2^q,\ b_3^q),\ (b_4^q,\ b_5^q),\ \ldots,\ (b_{2q}^q,\ b_1^q),$$
$$(b_{2q+2}^q,\ b_{2q+3}^q),\ \ldots,\ (b_{4q}^q,\ b_{2q+1}^q),\ \ldots,$$
$$(b_{2sq+2}^q,\ b_{2sq+3}^q),\ \ldots,\ (b_{2(s+1)q}^q,\ b_{2sq+1}^q),\ \ldots,$$
$$(c_1^q),\ (c_2^q,\ c_3^q),\ (c_4^q,\ c_5^q),\ \ldots,$$

а в остальном σ' совпадает с σ. Эквивалентность σ и σ' вытекает из того, что σ 1-бесконечна. Пусть $\varphi=\sigma\sigma'$. Ясно, что $k_\varphi(1)=\infty$, а для $q>1$ последовательности b_{2sq+1}^q, b_{2sq+3}^q, b_{2sq+5}^q, ..., $b_{2(s+1)q-1}^q$ при каждом натуральном s составляют q-циклы в φ, так что $k_\varphi(q)=\infty$ при каждом натуральном q. Легко также проверить, что в φ входят бесконечные циклы

$$(\ldots c_6^q,\ c_4^q,\ c_2^q,\ c_1^q,\ c_3^q,\ c_5^q,\ \ldots).$$

Этим установлено, что φ — вполне бесконечная подстановка.

1.5. *Каждая 1-бесконечная подстановка может быть представлена в виде произведения двух вполне бесконечных подстановок.*

Пусть σ — 1-бесконечная подстановка и φ — произвольная вполне бесконечная подстановка. Пусть X — бесконечное множество неподвижных относительно φ элементов из G. Определим подстановку ψ: если $a\bar{\in}X$, то $a\psi=a$, а на множестве X эта подстановка действует так, что $k_\psi(m)=k_\sigma(m)$ для всех конечных и бесконечного m. В таком случае σ и ψ эквивалентны. Пусть $\varphi'=\psi\varphi$. Тогда для $a\bar{\in}X$ имеем $a\varphi'=a\varphi$, и, кроме того,

отсюда следует, что φ' — вполне бесконечная подстановка. Так как $\psi = \varphi'\varphi^{-1}$, а ψ и σ эквивалентны, то утверждение доказано.

1.6. *Каждая бесконечная подстановка может быть представлена в виде произведения 1-бесконечных подстановок.*

Пусть σ — бесконечная подстановка и пусть вначале она распадается в бесконечное число циклов. Разобьем эти циклы на два подмножества так, чтобы G соответственно разбивалось на два бесконечных подмножества X и Y. Пусть φ и ψ — две подстановки, определяемые равенствами: $x\varphi = x\sigma$ для $x \in X$ и $y\varphi = y$ для $y \in Y$; $x\psi = x$ для $x \in X$ и $y\psi = y\sigma$ для $y \in Y$. Обе эти подстановки 1-бесконечны и $\sigma = \varphi\psi$. Если в разложении σ имеется лишь конечное число циклов, то среди таких циклов должны быть и бесконечные. Мы уже видели, что каждый бесконечный цикл может быть представлен в виде произведения 1- и 2-бесконечных подстановок, и теперь рассматриваемое свойство становится очевидным.

Из всех этих лемм непосредственно вытекает справедливость теоремы 1.1 для счетного множества G. В самом деле, если Σ — нормальный делитель в S_G, содержащий бесконечную подстановку, то из 1.2—1.6 следует, что в Σ содержится каждая бесконечная подстановка, а из 1.5 вытекает, что Σ содержит и все конечные подстановки. Следовательно, $\Sigma = S_G$. Кроме того, как и в конечном случае, легко проверяется, что A и S_0/A — простые группы.

Для того чтобы доказать теорему 1.1 для множества G произвольной бесконечной мощности, сформулируем следующее предложение:

1.7. *Если Σ — нормальный делитель группы S_G, содержащий подстановку σ, перемещающую $\aleph_\nu$ элементов, то Σ содержит и всю подгруппу $S_{\nu+1}$.*

Доказывается это предложение в точности теми же рассуждениями, что и для счетного случая, только в соответствующих местах слово «бесконечность» нужно заменять словами «мощность $\aleph_\nu$». Из него следует, что члены ряда (1) являются единственными нормальными делителями группы S_G.

Пусть теперь Σ — нормальный делитель в S_ν, $\sigma \in \Sigma$ и $\varphi \in S_G$. Так как подстановки σ и $\varphi^{-1}\sigma\varphi$ эквивалентны

и принадлежат S_ν, то они сопряжены и в S_ν. Следовательно, $\varphi^{-1}\sigma\varphi \in \Sigma$, и Σ — нормальный делитель в S_G. Теорема 1.1 доказана.

Заметим еще, что согласно теореме 1.1 все фактор-группы $S_{\nu+1}/S_\nu$ при $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$ являются простыми группами. В работе А. Каррас и Д. Золитар [1] приводятся более подробные сведения об этих фактор-группах, и в частности приводится оценка их мощностей.

Теперь докажем следующую теорему (Шрейер — Улам [2]):

1.8. *Если* $|G| \neq 6$ *и* $|G| \geqslant 3$, *то все автоморфизмы группы* S_G *являются внутренними.*

Для конечного множества соответствующее исследование проведено еще Гельдером (см. книгу А. Г. Куроша [3]), и мы ограничимся бесконечным случаем.

Будем следовать изложению Г. Виландта из [3]. В действительности будет доказано следующее более сильное предложение:

1.9. *Если* Γ — *подгруппа в* S_G, *содержащая подгруппу* A, *то каждый автоморфизм группы* Γ *индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом группы* S_G.

Доказательство разобьем на несколько пунктов. Всюду дальше подгруппу Γ и ее автоморфизм τ будем считать фиксированными.

а) Вначале покажем, что если $\sigma = (a, b, c)$ — тройной цикл, то σ^τ — также тройной цикл. Так как $(\sigma^\tau)^3 = (\sigma^3)^\tau = \varepsilon$, то подстановка σ^τ может распадаться только в тройные циклы. Пусть сперва $k_{\sigma^\tau}(3) = 2$ и

$$\sigma^\tau = (a_1,\ a_2,\ a_3)(a_4,\ a_5,\ a_6).$$

Возьмем в Γ некоторый элемент φ с условием

$$\sigma \cdot \varphi^{-1}\sigma\varphi \neq \varphi^{-1}\sigma\varphi \cdot \sigma.$$

В этом случае среди символов a, b, c, $a\varphi$, $b\varphi$ и $c\varphi$ имеется не более пяти различных. Отсюда следует, что подгруппа $\{\sigma,\ \varphi^{-1}\sigma\varphi\}$ содержится в S_5 и имеет порядок, являющийся делителем числа 5! То же самое можно сказать и относительно подгруппы

$$\{\sigma,\ \varphi^{-1}\sigma\varphi\}^\tau = \{\sigma^\tau,\ (\varphi^\tau)^{-1}\sigma^\tau\varphi^\tau\}.$$

Ясно также, что

$$\sigma^\tau (\varphi^\tau)^{-1} \sigma^\tau \varphi^\tau \neq (\varphi^\tau)^{-1} \sigma^\tau \varphi^\tau \sigma^\tau.$$

Возьмем теперь $\varphi^\tau = (a_1, a_4, a_7) \in A$ (при этом $\varphi \in \Gamma$). Имеем:

$$(\varphi^\tau)^{-1} \sigma^\tau \varphi^\tau = (a_4, a_2, a_3)(a_7, a_5, a_6) = \\ = (a_2, a_3, a_4)(a_5, a_6, a_7),$$

и подгруппа $\{\sigma^\tau, (\varphi^\tau)^{-1} \sigma^\tau \varphi^\tau\}$ действует транзитивно на множестве $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Это в свою очередь означает, что порядок

$$|\{\sigma^\tau, (\varphi^\tau)^{-1} \sigma^\tau \varphi^\tau\}|$$

делится на 7. Мы пришли к противоречию с тем, что порядок этот делит 5!. Таким образом, $k_{\sigma^\tau}(3) \neq 2$.

Допустим далее, что $k_{\sigma^\tau}(3) \geqslant 3$ и $\sigma^\tau = (a_1, a_2, a_3) \times \times (a_4, a_5, a_6)(a_7, a_8, a_9)\ldots$ Используя $\varphi^\tau = (a_1, a_4, a_7)$, получим:

$$(\varphi^\tau)^{-1}\sigma^\tau\varphi^\tau = (a_4, a_2, a_3)(a_7, a_5, a_6)(a_1, a_8, a_9)\ldots = \\ = (a_2, a_3, a_4)(a_5, a_6, a_7)(a_8, a_9, a_1)\ldots$$

Здесь видно, что подгруппа $\{\sigma^\tau, (\varphi^\tau)^{-1}\sigma^\tau\varphi^\tau\}$ действует транзитивно уже на множестве $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Снова противоречие, так как 5! не делится на 9.

В дальнейшем мы воспользуемся следующими обозначениями: если X — некоторое подмножество в G, то через A_X обозначается знакопеременная группа, отнесенная к этому подмножеству, — все ее циклы записываются только через элементы из X. Через Γ_X будем обозначать Γ-централизатор множества X: $\Gamma_X = \mathfrak{z}_\Gamma(X)$. Если множество X состоит из элементов $a, b, c, \ldots$, то будем также писать $A_{abc\ldots}$ и $\Gamma_{abc\ldots}$

б) Если множество X состоит из четырех элементов, то $A_X^\tau = A_{X'}$, где X' также содержит четыре элемента.

Можно считать, что группа A_X порождается циклами (a_1, a_2, a_3) и (a_2, a_3, a_4). Порядок этой группы равен 12. По предыдущему, $A_X^\tau = \{(a, b, c)(d, e, f)\}$, и порядок этой подгруппы также равен 12. Если циклы (a, b, c) и (d, e, f) имеют два общих элемента, то множество X', состоящее

из элементов, входящих в эти циклы, содержит четыре элемента и $A_X^\tau = A_{X'}$. Если же здесь только один общий элемент, то подгруппа A_X^τ действует транзитивно на множестве X' из пяти элементов, что невозможно, так как 12 не делится на 5. Аналогично исключается случай, когда рассматриваемые циклы не содержат общих элементов.

в) Теперь покажем, что если X содержит четыре элемента, то $\Gamma_X^\tau = \Gamma_{X'}$, где X' также содержит четыре элемента.

Легко понять, что подгруппа Γ_X совпадает с централизатором в Γ подгруппы A_X: $\Gamma_X = \mathfrak{z}(A_X)$. Так как $A_X^\tau = A_{X'}$, то $(\mathfrak{z}(A_X))^\tau = \mathfrak{z}(A_{X'})$ и $\Gamma_X^\tau = \Gamma_{X'}$.

г) Покажем дальше, что если X состоит из трех элементов a, b, c, то при некоторых a', b' и c' будет $\Gamma_{abc}^\tau = \Gamma_{a'b'c'}$.

Возьмем произвольный $d \in G$ и подстановки

$$\sigma = (a)(b)(c)(d, \ e, \ f) \in \Gamma_{abc}$$

и

$$\varphi = (e, \ f, \ g) \in \Gamma_{abcd}.$$

Здесь $\{\sigma, \varphi\} = A_{defg}$ и подгруппа Γ_{abc} совпадает с $\{\Gamma_{abcd}, \sigma\}$. Имеем $\Gamma_{abc}^\tau = \{\Gamma_{a'b'c'd'}, \sigma^\tau\}$, где σ^τ, по предыдущему, есть тройной цикл. Так как $\sigma^\tau \bar{\in} \Gamma_{a'b'c'd'}$, то в этот цикл входит по крайней мере один из элементов a', b', c', d'. Учитывая, с другой стороны, что $\{\sigma^\tau, \varphi^\tau\} = A_Y$, где Y содержит четыре элемента, можно заметить, что никакие два из указанных элементов не входят в σ^τ. Отсюда следует, что $\Gamma_{abc}^\tau = \Gamma_{a'b'c'}$.

Аналогично устанавливается, что $\Gamma_{ab}^\tau = \Gamma_{a'b'}$ и, далее, $\Gamma_a^\tau = \Gamma_{a'}$.

Нетрудно также понять, что подгруппой Γ_a элемент a определяется однозначно: это следует из того, что Γ содержит дважды транзитивную подгруппу A. Таким образом, автоморфизм τ индуцирует подстановку на множестве подгрупп вида Γ_a, а последняя вызывает подстановку на множестве G. Обозначим эту подстановку через ψ: $\Gamma_a^\tau = \Gamma_{a'}$ тогда и только тогда, когда $a\psi = a'$.

Возьмем теперь произвольную подстановку

$$s = \begin{pmatrix} \dots a \dots \\ \dots b \dots \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Имеем:

$$s^{-1}\Gamma_a s = \Gamma_b,\ \Gamma_b^\tau = (s^{-1}\Gamma_a s)^\tau = (s^{-1})^\tau \Gamma_{a'} s^\tau.$$

Если, далее, $s^\tau = \begin{pmatrix} \dots a' \dots \\ \dots c \dots \end{pmatrix}$, то $\Gamma_b^\tau = \Gamma_{b'} = \Gamma_c$ и $b' = c$, $s^\tau = \begin{pmatrix} \dots a' \dots \\ \dots b' \dots \end{pmatrix}$. Это означает, что $s^\tau = \psi^{-1} s \psi$. Теорема доказана.

По поводу дальнейших свойств бесконечных полных симметрических групп и некоторых их подгрупп мы сошлемся на обстоятельный обзор Г. Виландта [3]; см. также статью И. Маурера [2] и уже упоминавшуюся статью А. Каррас и Д. Золитар [1]. Отметим еще, что в работе Р. Кроуча [2] рассматриваются неприводимые системы образующих бесконечных симметрических групп. Силовские подгруппы бесконечных симметрических групп рассматриваются в работе И. Д. Иванюты [1]; см. также Калужнин — Краснер [1]. Локально нильпотентные подгруппы бесконечной симметрической группы рассматриваются в новой работе Д. А. Супруненко [8]. Бесконечным простым группам подстановок посвящена интересная статья Г. Хигмена [1].

2. Полная мономиальная группа. Полная мономиальная группа имеет много общего с полной симметрической группой. Согласно п. 2.1.4 определяется эта группа следующим образом. Пусть I — множество, S_I — полная симметрическая группа этого множества и $\mathfrak{G}$ — произвольная группа. Соответствующая полная мономиальная группа есть сплетение $\mathfrak{G} \overset{I}{\sim} S_I$. Обозначим эту группу через $S = S(\mathfrak{G}, I)$. Группа S является полупрямым произведением базисной группы $\mathfrak{G}^I$ и симметрической группы S_I: $S = \mathfrak{G}^I \curlywedge S_I$. Здесь базисная группа $\mathfrak{G}^I$ является полной I-й степенью группы $\mathfrak{G}$. Если аналогично исходить из дискретной I-й степени, то соответствующую

полную мономиальную группу мы обозначим через $S^0 = S^0(\mathfrak{G}, I)$ и будем называть ее *дискретной мономиальной группой*.

Для полных мономиальных групп естественно возникает проблема нахождения их нормальных делителей и автоморфизмов. Для конечного множества I эта проблема решается в большом исследовании О. Оре [1].

При нахождении нормальных делителей в первую очередь, естественно, находятся все подгруппы базисной группы, инвариантные относительно подстановок из S_I. Что касается автоморфизмов полной мономиальной группы, то не все они являются внутренними, и в упомянутой работе О. Оре приводятся необходимые и достаточные условия, при которых все автоморфизмы внутренние. Все здесь зависит от группы $\mathfrak{G}$.

Обобщениям результатов О. Оре на случай бесконечного множества посвящены работы Р. Кроуча [1, 3]. В этих работах понятие дискретной мономиальной группы обобщается еще следующим образом. Пусть $\varkappa_\nu$ — произвольная бесконечная мощность, меньшая или равная мощности множества I. Через G_ν обозначим подгруппу в $G = \mathfrak{G}^I$, состоящую из всех элементов, у которых число неединичных компонент меньше $\varkappa_\nu$. Легко видеть, что G_ν — S_I-допустимая подгруппа в G, и таким образом, возникает полупрямое произведение $G_\nu \leftthreetimes S_I = S^\nu(\mathfrak{G}, I)$, лежащее в полной мономиальной группе. Если $\nu = 0$, то такая ν-мономиальная группа совпадает с дискретной мономиальной группой $S^0(\mathfrak{G}, I)$.

Для каждой подгруппы $S_\nu \subset S_I$ (см. предыдущий пункт) определяем еще подгруппы $G_\nu \leftthreetimes S_\mu$. Все эти подгруппы инвариантны относительно элементов из S_I. В указанных работах найдены все нормальные делители группы $G_0 \leftthreetimes S_0$ и доказано, что базисная подгруппа этой группы является характеристической. В тех же работах Р. Кроуча выделены и другие характеристические подгруппы мономиальных групп. Что же касается описания группы автоморфизмов полной мономиальной группы или отмеченных сейчас ее подгрупп, то эта задача, насколько нам известно, в бесконечном случае еще не решена.

Отметим в связи с этим, работу Ч. Хоугтона [1], где исследуется группа автоморфизмов сплетения групп. Еще более общей задачей является описание группы автоморфизмов обобщенного сплетения типа $\mathfrak{G} \overset{I}{\sim} \Gamma$ (см. п. 2.1.4).

3. Полная линейная группа. Обзор. Для полной линейной группы, так же как и для полной симметрической и полной мономиальной групп, большой интерес представляет вопрос о нормальных делителях и автоморфизмах. Этот вопрос интересен всегда, когда идет речь о конкретных группах, но в рассматриваемой ситуации играет роль уже и некоторая традиция.

Что касается нормальных делителей полной линейной группы, то для групп над телами, в частности над полями, имеется исчерпывающее решение. В конечномерном случае — это еще классические результаты Жордана, Бернсайда и Диксона, относящиеся к случаю полей, а в общем случае — результаты Ж. Дьёдонне [1, 2]. Как доказано, если Γ — конечномерная полная линейная группа над телом, действующая в пространстве размерности $n \geqslant 3$, и Σ — нормальный делитель в Γ, то либо Σ принадлежит подгруппе $Z \cdot E$, где Z — мультипликативная группа центра основного тела, либо Σ содержит коммутант Γ'. Кроме того, фактор-группа $\Gamma'/\Gamma' \cap Z \cdot E$ является простой группой. Заметим еще, что в доказательствах здесь важную роль играют особые элементы, называемые *трансвекциями*. Трансвекции — это операторы вида $1+u$, где 1 — единица, $u^2=0$ и u переводит всю область действия в одномерное пространство. Эти трансвекции порождают коммутант.

Бесконечномерный случай сравнительно недавно исследован А. Розенбергом [1], и результаты здесь оказываются параллельными во многом тому, что мы имели для полной симметрической группы. Сейчас мы изложим эти результаты без доказательств. В бесконечномерном случае оказалось, что коммутант совпадает со всей группой, но трансвекции теперь уже не дают систему образующих. Их роль здесь играют элементы вида $1+v$, где $v^2=0$: такие элементы порождают всю группу.

Допустим далее, что область действия G рассматриваемой полной линейной группы Γ имеет размерность $\varkappa_\mu$.

Через K обозначим кольцо всех эндоморфизмов пространства G, и пусть F_ν — множество всех $u \in K$, для которых образы Gu имеют размерность меньшую $\varkappa_\nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$. Известно, что все F_ν составляют полную систему идеалов кольца K. Обозначим еще через $\Gamma_{\nu(1)}$ подгруппу в Γ, состоящую из элементов вида $1+u$ с $u \in F_\nu$, и через Γ_ν — подгруппу из элементов вида $z \cdot 1 + u$, $z \in Z$ и $u \in F_\nu$. Легко видеть, что $\Gamma_\nu = \Gamma_{\nu(1)} \times Z \cdot E$ и что каждая подгруппа Σ, удовлетворяющая условию $\Gamma_{\nu(1)} \subset \Sigma \subset \Gamma_\nu$, является нормальным делителем в Γ.

Как показано в работе А. Розенберга [1], имеет место следующая теорема:

3.1. *Пусть* Σ — *собственный нормальный делитель группы* Γ. *Тогда либо при некотором* ν *выполняется* $\Gamma_{\nu(1)} \subset \Sigma \subset \Gamma_\nu$ *либо* $\Sigma \subset \Gamma_0$.

Кроме того, здесь же доказано, что все нормальные делители Σ группы Γ_ν являются нормальными делителями всей группы Γ. Нормальные делители, лежащие в Γ_0, исследованы еще Дьёдонне. Показано, что каждый такой Σ либо принадлежит подгруппе $Z \cdot E$, либо содержит коммутант $\Gamma'_{0(1)}$. При этом группа $\Gamma'_{0(1)}/\Gamma'_{0(1)} \cap Z \cdot E$ оказывается простой.

Отметим еще работу Дж. Клауса и К. Гирша [1], посвященную некоторым простым бесконечномерным линейным группам.

До сих пор, как нам известно, нет исследований относительно структуры нормальных делителей бесконечномерной полной треугольной группы.

Структура классических групп подробно рассматривается в книгах Дьёдонне [1, 2]. Здесь же изучаются автоморфизмы классических групп. Группам автоморфизмов классических групп посвящены некоторые другие работы (см. список литературы), содержащие значительные упрощения.

По поводу группы автоморфизмов полной линейной группы, как конечномерной, так и бесконечномерной, см. также обстоятельное исследование Р. Бера, содержащееся в его книге [7]. Ряд результатов о группах автоморфизмов треугольных линейных групп содержится

в работе Дж. Розеблада [1]. Мы не останавливаемся на интересных новых исследованиях относительно линейных групп над кольцами и об автоморфизмах таких групп. В списке литературы отмечены некоторые из этих работ.

Отметим далее, что параллельно исследованиям по матричным группам и кольцам изучались и матричные полугруппы. Автоморфизмам матричных полугрупп посвящены работы Е. А. Халезова [1] и Л. М. Глускина [1, 2]. Серия работ Л. М. Глускина посвящена группам автоморфизмов различных конкретных полугрупп. В этих работах для описания групп автоморфизмов используется один полезный критерий продолжаемости автоморфизма.

Некоторое число работ посвящено группам автоморфизмов квазигрупп и луп. Так, например, в работе Е. А. Халезова [2] исследуются группы автоморфизмов свободных квазигрупп и луп с конечным числом образующих (см. еще обзор Р. Брака [2] и Р. Круазо [1]).

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУПП

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЛАВА ПЯТАЯ

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП

§ 1. ГРУППОВЫЕ ПАРЫ

1. Групповые пары и полупрямые произведения. Здесь мы рассмотрим тот специальный тип пар (G, Γ), в которых вместе с Γ область действия G также является группой (без дополнительных операций Ω). Такие пары будем называть *групповыми парами*. Все приводившиеся раньше определения и факты, относившиеся к случаю, когда G — Ω-группа, применимы, конечно, и сейчас, — нужно лишь считать, что множество Ω пусто. Кроме того, сейчас уже используется мультипликативная запись для групповой операции в G. Благодаря однотипности структур G и Γ для групповых пар возникают новые конструкции. Групповые пары важны и с точки зрения абстрактной теории групп, где они встречаются следующим естественным образом. Если $\mathfrak{G}$ — группа и H — ее нормальный делитель, то мы получим представление $\mathfrak{G}$ относительно H, если положим: $h \circ g = g^{-1}hg$, $h \in H$, $g \in \mathfrak{G}$. Такое представление будем называть *внутренним*, а возникающую при этом пару $(H, \mathfrak{G})$ будем называть *внутренней парой*. Понятно, что результаты по групповым парам могут быть при этом использованы для изучения отношений между группой и ее нормальными делителями. Заметим, кстати, что введенные раньше Γ-централизаторы и Γ-нормализаторы превращаются здесь в обычные централизаторы и нормализаторы. Некоторые абстрактные теоретико-групповые свойства могут быть естественно определены и на языке внутренних групповых пар. Так, например, группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда нильпотентна, когда внутренняя пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ финитно стабильна. Легко также видеть, что квазистабильность пары $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ означает, что $\mathfrak{G}$ — локально нильпотентная группа, а слабая стабильность

$(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ означает, что $\mathfrak{G}$ — Z-группа, т. е. группа с центральной системой. Условимся в дальнейшем все подпары внутренних групповых пар также называть внутренними парами, и покажем, что всякая групповая пара изоморфна некоторой внутренней паре.

Сделаем это с помощью известной в теории групп конструкции полупрямого произведения групп. Пусть задана групповая пара (G, Γ). Построим группу, которую обозначим через $G \curlywedge \Gamma$ и элементами которой служат пары (a, σ), $a \in G$, $\sigma \in \Gamma$; умножение в этой группе определяется правилом: $(a, \sigma)(a', \sigma') = (a \cdot a' \circ \sigma^{-1}, \sigma\sigma')$. Легко видеть, что так действительно получается группа, и эта группа называется полупрямым произведением группы G и группы Γ. Совокупность G' всех элементов вида (a, ε) есть нормальный делитель в $G \curlywedge \Gamma$, изоморфный G, а множество Γ' всех (e, σ), $\sigma \in \Gamma$, есть подгруппа, изоморфная Γ. Пересечение $G' \cap \Gamma'$ совпадает с единицей в $G \curlywedge \Gamma$ и $G \curlywedge \Gamma = G'\Gamma'$.

Пусть теперь (G', Γ') — соответствующая внутренняя пара в группе $G \curlywedge \Gamma$ и пусть μ — отображение, определяемое через $g^\mu = (g, \varepsilon)$ и $\sigma^\mu = (\varepsilon, \sigma)$. Имеем $(g \circ \sigma)^\mu = (g \circ \sigma, \varepsilon) = (\varepsilon, \sigma)^{-1}(g, \varepsilon)(\varepsilon, \sigma) = g^\mu \circ \sigma^\mu$. Следовательно, групповая пара (G, Γ) изоморфна внутренней паре (G', Γ').

По поводу внутренних пар сделаем далее следующее очевидное замечание: гомоморфизмы групп влекут гомоморфизмы их внутренних пар, а гомоморфизмы пар влекут гомоморфизмы соответствующих полупрямых произведений.

Напомним, что согласно п. 2.1.4 каждое полупрямое произведение $G \curlywedge \Gamma$ можно вложить в сплетение $G \mathrm{Wr} \Gamma$. Если $(g, \sigma) \in G \curlywedge \Gamma$, то, сопоставляя этому элементу пару $(\bar{g}(x), \sigma)$, где $\bar{g}(x) = g \circ x^{-1}$ — функция, определенная на Γ и со значениями в G, мы осуществим нужное вложение.

Приведем теперь еще несколько замечаний о сплетениях групп.

Пусть заданы группа $\mathfrak{G}$ и еще групповая пара (H, Γ). Обозначим: $G = \mathfrak{G} \mathrm{Wr} H$. Покажем, что при этом естественно возникает групповая пара (G, Γ). Пусть $\bar{a}$ — элемент базисной подгруппы $\mathfrak{G}^H$, и $\sigma \in \Gamma$. Тогда $\bar{a} \circ \sigma$ мы определим формулой $(\bar{a} \circ \sigma)(x) = \bar{a}(x \circ \sigma^{-1})$, $x \in H$. Считая, что произвольный элемент из G имеет вид $\bar{a}h$, $h \in H$, мы

положим $(\bar{a}h)\circ\sigma = (\bar{a}\circ\sigma)(h\circ\sigma)$. Непосредственная проверка показывает, что так определенное действие задает групповую пару (G, Γ). Из этой конструкции вытекает, в частности, следующее замечание: если $G = \mathfrak{G}\mathrm{Wr}H$ — сплетение групп $\mathfrak{G}$ и H, и Γ — группа автоморфизмов группы H, то Γ можно вложить в группу автоморфизмов сплетения G*).

Допустим еще, что задана групповая пара $(\mathfrak{G}, \Sigma)$, и для $\sigma\in\Sigma$ положим $(\bar{a}h)\circ\sigma = (\bar{a}\circ\sigma)h$, где $(\bar{a}\circ\sigma)(x) = \bar{a}(x)\circ\sigma$. Легко видеть, что при этом возникает групповая пара (G, Σ). Отсюда, например, вытекает, что и группу автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$ можно вложить в $\mathrm{Aut}(G)$.

Рассмотрим, далее, тот частный случай, когда группа $\mathfrak{G}$ абелева. В этом случае можно говорить о группе $\mathrm{Hom}(H, \mathfrak{G})$. Эта группа является подгруппой в $\mathfrak{G}^H$, причем допустимой относительно Γ. Поэтому определенная выше пара (G, Γ) индуцирует пару $(\mathrm{Hom}(H, \mathfrak{G}), \Gamma)$ (ср. п. 2.3.2).

Заметим, наконец, что понятие групповой пары, как нетрудно видеть, тесно связано с беровской теорией расширений групп (см., например, А. Г. Курош [3]).

2. Голоморф. В случае, когда пара (G, Γ) является точной, группу $G\leftthreetimes\Gamma$ можно еще реализовать в виде подгруппы группы S_G всех подстановок множества G. Напомним эту хорошо известную конструкцию. Обозначим через μ естественное отображение группы G при ее регулярном представлении и группы Γ на ее проекцию относительно G. Ясно, что G^μ и Γ^μ — подгруппы в S_G. При этом для каждого $x\in G$ имеем:

$$x\circ(\sigma^\mu)^{-1}g^\mu\sigma^\mu = (x(\sigma^\mu)^{-1}\cdot g)\sigma^\mu = x\cdot g\sigma^\mu = x\circ(g\circ\sigma)^\mu.$$

Отсюда получаем формулу

$$(\sigma^\mu)^{-1}g^\mu\sigma^\mu = (g\circ\sigma)^\mu.$$

*) Этот факт допускает следующее обобщение. Пусть заданы группа $\mathfrak{G}$ и чистая пара (I, H). Тогда группа автоморфизмов пары (I, H) естественно вкладывается в группу автоморфизмов обобщенного сплетения $\mathfrak{G}\overset{I}{\sim}H$.

Эта формула показывает, что G^{μ} — нормальный делитель в подгруппе $H=\{G^{\mu}, \Gamma^{\mu}\}\subset S_G$ и что пара (G, Γ) и внутренняя пара (G^{μ}, Γ^{μ}) изоморфны. Отсюда также непосредственно следует, что группа $G\curlywedge\Gamma$ изоморфна H.

Подгруппа H называется *относительным голоморфом*, а если $\Gamma=\mathfrak{A}(G)$, то она называется *голоморфом*.

Приведем теперь несколько простейших фактов, связанных с понятием голоморфа.

Пусть G — группа и S_G — группа всех подстановок множества G. Через G^r обозначим образ G в S_G, определяемый правым регулярным представлением группы G. (Только что мы его обозначали через G^{μ}.) Найдем централизатор и нормализатор G^r в S_G,

Начнем с централизатора. Назовем *левым регулярным представлением* группы G отображение этой группы в группу S_G, определяемое правилом: элементу $g\in G$ сопоставляется подстановка: $x\to g^{-1}x$. Такое отображение, как легко заметить, является гомоморфизмом группы G в группу S_G, так что указанное правило действительно задает представление. Образ G в левом регулярном представлении будем обозначать через G^l. Справедливо следующее утверждение:

2.1. *Централизатор группы G^r в S_G совпадает с группой G^l.*

Пусть $a^r\in G^r$, $b^l\in G^l$, и x — произвольный элемент группы G. a и b — здесь также элементы группы G, а a^r и b^l — их образы соответственно в G^r и G^l. Имеем: $x\circ a^rb^l = (xa)\circ b^l=b^{-1}(xa)=(b^{-1}x)a=(x\circ b^l)a=x\circ b^la^r$. Таким образом, ассоциативность операции в G означает перестановочность элементов a^r и b^l. Одновременно мы видим, что каждый элемент из S_G, являющийся внутренним автоморфизмом группы G, представим в виде g^lg^r.

Пусть теперь s — подстановка множества G, перестановочная с каждым элементом из G^r, и пусть e — единица в G, а $e\circ s=g^{-1}$. Тогда при любом $x\in G$ будет:

$$x\circ s=(ex)\circ s=e\circ x^rs=(e\circ s)\circ x^r=(e\circ s)x=g^{-1}x.$$

Следовательно, $s=g^l\in G^l$ *).

Теперь о нормализаторе.

---

* Теорему 2.1 полезно сопоставить с доказательством теоремы Биркгофа из п. 2.2.3.

2.2. *Нормализатор подгруппы G^r в S_G совпадает с голоморфом группы G.*

Мы уже видели, что если $H = H(G)$ — нормализатор G^r в S_G, то $\mathfrak{A}(G) \subset H$. Очевидно также, что пересечение $G^r \cap \mathfrak{A}(G)$ совпадает с единицей группы S_G. Дальше покажем, что $H(G) = G^r\mathfrak{A}(G)$. Пусть $\sigma \in H(G)$. Тогда при любом $y^r \in G^r$ элемент $\sigma^{-1}y^r\sigma$ принадлежит G^r, и поэтому он равен некоторому $(y^*)^r$. Отображение $y \to y^*$ является автоморфизмом группы G, так как отображение $y^r \to (y^*)^r$ есть автоморфизм группы G^r. Следовательно, найдется $\varphi \in \mathfrak{A}(G)$ такой, что $y^* = y\varphi$. Мы получим $\sigma^{-1}y^r\sigma = (y\varphi)^r = \varphi^{-1}y^r\varphi$, так что элемент $\sigma\varphi^{-1}$ принадлежит централизатору подгруппы G^r: $\sigma\varphi^{-1} = a^l$. Так как a^la^r — внутренний автоморфизм, то $a^l \in G^r\mathfrak{A}(G)$. Отсюда $\sigma \in G^r\mathfrak{A}(G)$, что и требовалось.

Отметим теперь следующий признак автоморфизма в группе $H(G)$.

2.3. *Элемент σ из $H(G)$ в том и только в том случае является автоморфизмом группы G, когда он оставляет неподвижной единицу из G.*

Действительно, каждый элемент σ из $H(G)$ имеет вид $\sigma = g^r \cdot \varphi$, где $g \in G$ и φ — автоморфизм. Если этот элемент оставляет неподвижной единицу, то ясно, что g^r — необходимо тождественная подстановка, и остается автоморфизм $\sigma = \varphi$. Обратное очевидно.

Рассмотрим дальше один способ представления голоморфа прямого произведения групп, основанный на матричном представлении автоморфизмов. Пусть группа G представлена в виде прямого произведения:

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n.$$

Элементы из G будем рассматривать как строки, причем если $g = \prod_{i=1}^{n} g_i$, то соответствующую строку запишем через $\bar{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Согласно п. 3.5.3 группа всех автоморфизмов группы G может быть представлена матрицами вида $M = (\sigma_{ij})$, где $\sigma_{ij} \in \operatorname{Hom}(G_i, G_j)$, удовлетворяющими некоторым дополнительным условиям. Такие матрицы будем здесь называть допустимыми матрицами. Если φ — автоморфизм группы G, то соответствующую

допустимую матрицу обозначим через $\bar{\varphi}$. Определим дальше (ср. п. 3.5.3) умножение строки $\bar{g}$ на допустимую матрицу $\bar{\varphi}=(\sigma_{ij})$ по обычным правилам матричного умножения

$$\bar{g}\bar{\varphi}=(g_1\sigma_{11}\cdot g_2\sigma_{21}\cdots g_n\sigma_{n1},\ g_1\sigma_{12}\cdot g_2\sigma_{22}\cdots g_n\sigma_{n2},\ \ldots \\ \ldots,\ g_1\sigma_{1n}\cdot g_2\sigma_{2n}\cdots g_n\sigma_{nn}).$$

Понятен смысл произведения $g_i\sigma_{ij}$ — это результат применения к g_i гомоморфизма σ_{ij}. Результатом такого умножения также является строка, причем очевидно, что выполняется формула $\overline{g\varphi}=\bar{g}\cdot\bar{\varphi}$.

Дальше рассмотрим матрицы вида

$$M(\bar{\sigma},\ \bar{g})=\begin{pmatrix}\bar{\sigma} & 0\\ \bar{g} & 1\end{pmatrix},$$

где 0 — столбец из нулевых гомоморфизмов и 1 — единица в G.

Для таких матриц умножение определяется по обычным законам матричного умножения с учетом сказанного об умножении строки на допустимую матрицу. Непосредственно проверяется справедливость формул:

$$M(\bar{\sigma},\ \bar{a})\,M(\bar{\varphi},\ \bar{b})=M(\bar{\sigma}\bar{\varphi},\ \bar{a}\bar{\varphi}\cdot\bar{b}),$$

$$M(\bar{\sigma},\ \bar{a})=M(\bar{\sigma},\ \bar{1})\,M(E,\ \bar{a})$$

и

$$M^{-1}(\bar{\sigma},\ \bar{1})\,M(E,\ \bar{a})\,M(\bar{\sigma},\ \bar{1})=M(E,\ \bar{a}\bar{\sigma}).$$

Отсюда следует, что совокупность всех матриц указанного вида может рассматриваться как голоморф группы G.

Здесь только мы воспользовались «левой», а не «правой», как раньше, записью полупрямого произведения, что, конечно, несущественно.

Аналогичную конструкцию можно применить и для бесконечного прямого произведения.

В случае, когда группа G является векторной группой (над простым полем), приведенное матричное представление для голоморфа превращается в обычное матричное представление (ср. п. 4.1.2).

Отметим еще, что аналогичная теория голоморфа строится также для лиевых и ассоциативных колец (см. Редеи [1]). При этом в первом случае роль группы авто-

морфизмов играет лиево кольцо дифференцирований. Для лиева случая можно определить аналог групповой пары — лиеву пару: так же как и групповая пара, лиева пара состоит из двух однотипных структур — двух лиевых алгебр, и еще представления одной из них дифференцированиями другой. Такие лиевы пары изучаются в работах Л. А. Симоняна [1—4]. Многое здесь аналогично тому, что делается в групповых парах.

3. Связи с группой внутренних автоморфизмов. Пусть (G, Γ) — некоторая групповая пара и пусть μ — естественное отображение группы G на группу ее внутренних автоморфизмов и группы Γ на ее проекцию относительно G. Покажем, что μ есть гомоморфизм пары (G, Γ) на внутреннюю (в $\mathrm{Aut}(G)$) пару (G^μ, Γ^μ).

Для любых $g \in G$ и $\sigma \in \Gamma$ $(g \circ \sigma)^\mu$ — это внутренний автоморфизм, определяемый формулой $x \to (g\sigma^\mu)^{-1} x (g\sigma^\mu)$. Преобразуя правую часть, получим:

$$(g\sigma^\mu)^{-1} x (g\sigma^\mu) = (g^{-1}) \sigma^\mu x (\sigma^\mu)^{-1} \cdot \sigma^\mu \cdot g\sigma^\mu = (g^{-1} x (\sigma^\mu)^{-1} g) \sigma^\mu = \\ = x (\sigma^\mu)^{-1} g^\mu \sigma^\mu.$$

Отсюда $(g \circ \sigma)^\mu = (\sigma^\mu)^{-1} g^\mu \sigma^\mu$, что и требовалось.

Легко видеть, что ядром гомоморфизма μ служит подпара (Z, Σ), состоящая из центра Z группы G и ядра Σ представления Γ относительно G. Теперь понятно, что если G — группа без центра и пара (G, Γ) является точной, то μ будет уже изоморфизмом, и мы получаем новую реализацию такой пары (G, Γ) в виде внутренней пары.

Как известно, частичным автоморфизмом группы G называется всякий изоморфизм между подгруппами этой группы. Ряд работ (см., например, Чехата [1—4]) был посвящен условиям продолжаемости частичного автоморфизма до полного. Приведем сейчас один пример существования такого продолжения, связанный с рассмотрениями этого пункта.

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа без центра и пусть эта группа рассматривается как подгруппа в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G}) = G$ всех ее автоморфизмов. Пусть дальше A и B — две подгруппы в G, содержащие $\mathfrak{G}$, и допустим, что существует частичный автоморфизм — изоморфизм μ

между A и B, отображающий подгруппу $\mathfrak{G}$ на себя. Покажем, что такой μ индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом группы G.

В самом деле, μ индуцирует некоторый автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, который в свою очередь индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом группы G. Пусть элемент $g \in G$ определяет этот внутренний автоморфизм. Тогда при любом $h \in \mathfrak{G}$ будет $h^\mu = g^{-1}hg$. Покажем, что аналогичное соотношение выполняется для любого $a \in A$. Имеем:

$$(a^{-1}ha)^\mu = g^{-1}(a^{-1}ha)\,g = (a^{-1})^\mu h^\mu a^\mu = (a^{-1})^\mu g^{-1}hga^\mu.$$

Отсюда следует, что элемент $ga^\mu g^{-1}a^{-1}$ принадлежит централизатору подгруппы $\mathfrak{G}$. Но этот централизатор, в силу отмеченного выше изоморфизма пары $(\mathfrak{G}, G)$ и соответствующей внутренней пары, равен единице. Поэтому $a^\mu = g^{-1}ag$, что и требовалось.

Частичный автоморфизм μ группы G, переводящий ее инвариантную подгруппу A в другую инвариантную подгруппу B, называется *нормальным*, если при любых $a \in A$ и $g \in G$ выполняется $(g^{-1}ag)^\mu = g^{-1}a^\mu g$. Легко понять, что такой μ устанавливает эквивалентность внутренних пар (A, G) и (B, G). Очевидно также, что всякая эквивалентность внутренних пар (A, G) и (B, G) получается таким путем.

Пусть теперь пары (A, G) и (B, G) изоморфны и μ — некоторый изоморфизм между ними. Этот изоморфизм индуцирует некоторый автоморфизм σ группы G. При любых $a \in A$ и $g \in G$ имеем:

$$(g^{-1}ag)^\mu = (g^\sigma)^{-1} a^\mu g^\sigma = (g^{-1}(a^\mu)^{\sigma^{-1}} g)^\sigma;$$
$$(g^{-1}ag)^{\mu\sigma^{-1}} = g^{-1}a^{\mu\sigma^{-1}}g,$$

и $\mu\sigma^{-1}$ есть нормальный частичный автоморфизм, переводящий A в $B\sigma^{-1}$.

Если, с другой стороны, A — нормальный делитель в G, σ — автоморфизм группы G, и μ — частичный автоморфизм, переводящий A в B, такой, что $\mu\sigma^{-1}$ — нормальный частичный автоморфизм, то μ и σ определяют изоморфизм пар (A, G) и (B, G).

Аналогично можно решить вопрос об изоморфизме и эквивалентности фактор-пар $(G/A, G)$ и $(G/B, G)$, где A

и B — нормальные делители в G. При этом уже используется понятие *частичного автоморфизма второго рода*. Под этим понимается всякий изоморфизм двух произвольных фактор-групп группы G.

Приведем еще одно простое предложение, которым в дальнейшем воспользуемся. Пусть группа G двумя способами представлена в виде полупрямого произведения: $G = B \leftthreetimes A = C \leftthreetimes A$ с общим дополнительным множителем A, и допустим, что частичный автоморфизм μ: $B \to C$ определяет эквивалентность пар (B, A) и (C, A). В таком случае μ продолжаем до автоморфизма группы G. Нужный автоморфизм определяем следующим образом. Если $g \in G$ и $g = ba$, то полагаем $g^{\eta} = b^{\mu} \cdot a$. Непосредственно проверяется, что отображение $g \to g^{\eta}$ действительно определяет автоморфизм группы G.

4. Два замечания о приводимости в групповых парах. Вначале докажем одну лемму. Пусть (G, Γ) — групповая пара, H — допустимый нормальный делитель в G, $\mathfrak{z}(H)$ — централизатор H в G, и Σ — ядро представления Γ относительно H. $\mathfrak{z}(H)$ — Γ-допустимая подгруппа.

4.1. *Ядро* Σ *принадлежит ядру представления* Γ *относительно* $G/\mathfrak{z}(H)$.

Нужно показать, что для любых $g \in G$ и $\sigma \in \Sigma$ элемент $g^{-1}(g \circ \sigma)$ принадлежит $\mathfrak{z}(H)$. Пусть $h \in H$. Тогда

$$h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot (g \circ \sigma) \cdot h = h^{-1}g^{-1}((gh) \circ \sigma) = h^{-1}g^{-1}((ghg^{-1} \cdot g) \circ \sigma) =$$
$$= h^{-1}g^{-1}ghg^{-1}(g \circ \sigma) = g^{-1}(g \circ \sigma),$$

т. е. $g^{-1}(g \circ \sigma) \in \mathfrak{z}(H)$.

Нормальный делитель H называется *ограничивающим группу* G, если $\mathfrak{z}(H) \subset H$. Из 4.1 непосредственно получаем, что если (G, Γ) — точная пара, H — Γ-допустимый нормальный делитель в G, ограничивающий группу G, то ядро Σ является абелевой группой. Действительно, так как $\mathfrak{z}(H) \subset H$, то элементы из Σ индуцируют тождественные автоморфизмы в $\mathfrak{z}(H)$ и в $G/\mathfrak{z}(H)$. Отсюда согласно п. 7.1.2 следует, что Σ — абелева группа.

Введем теперь следующие определения. Будем говорить, что H *точно приводит* Γ, если подпара (H, Γ) является точной.

4.2. *Пусть* (G, Γ) — *точная групповая пара и* H — *допустимый нормальный делитель в* G, *ограничивающий группу* G *и не имеющий центра. Тогда* H *точно приводит* Γ.

В самом деле, пусть $\mathfrak{z}$ — ядро представления Γ относительно H. По предыдущему, $[G, \mathfrak{z}]$ принадлежит централизатору H, а в силу условий, $[G, \mathfrak{z}]$ совпадает с единицей E группы G. Поэтому $\mathfrak{z}$ принадлежит ядру представления Γ относительно G. Так как это ядро совпадает с единицей, то $\mathfrak{z}$ — единица в Γ, что и требовалось.

Это и есть первое замечание.

Второе замечание относится к случаю, когда H — допустимая подгруппа в G, не обязательно являющаяся нормальным делителем.

Мы уже имеем здесь пару (H, Γ), и кроме того, ясно, что смежные классы Hx, $x \in G$, составляют конгруэнцию относительно элементов из Γ: если $h \in H$, то имеет место утверждение

$$(hx) \circ \sigma = (h \circ \sigma)(x \circ \sigma) = h' \cdot x \circ \sigma \in H(x \circ \sigma).$$

Таким образом, пара (G, Γ) индуцирует представление группы Γ относительно фактор-множества G/H. Ядро Σ этого представления состоит из таких $\sigma \in \Gamma$, что при любом $g \in G$ $g \circ \sigma = hg$, или, что то же, $(g \circ \sigma) g^{-1} \in H$. В п. 7.1.1 будет показано, что подгруппа в G, порожденная всевозможными элементами $(g \circ \sigma) g^{-1}$, $g \in G$, $\sigma \in \Sigma$, является нормальным делителем в G, совпадающим со взаимным коммутантом $[G, \Sigma]$. Таким образом, ядро представления группы Γ относительно фактор-множества G/H совпадает с ядром представления Γ относительно фактор-группы $G/[G, \Sigma]$.

В заключение параграфа отметим еще следующий признак локальной ограниченности групповой пары:

4.3. *Групповая пара* (G, Γ) *тогда и только тогда локально ограничена, когда для любого конечного симметрического подмножества* $Y \subset \Gamma$ *и любого элемента* $g \in G$ *подгруппа, порожденная всевозможными сложными коммутаторами* $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, $\sigma_i \in Y$, *имеет конечное число образующих.*

Это предложение достаточно очевидно.

§ 2. РАДИКАЛЫ В ГРУППАХ

1. Радикалы и субинвариантность. Как известно, существует много различных исходных принципов, лежащих в основе глубокого проникновения в природу групп. Это, например, изучение групп с точки зрения определяющих и тождественных соотношений, изучение нормальной структуры группы, структуры всех ее подгрупп и связей этой структуры со строением группы, рассмотрение алгоритмических вопросов и теория элементарных свойств — элементарная теория. Важная роль принадлежит также идее радикала, радикального класса и полупростоты. Как уже отмечалось, радикалы являются характеристическими подгруппами, во многом определяющими строение всей группы, поведение в ней отдельных элементов, подгрупп и нормальных делителей. С другой стороны, идея радикального класса групп играет существенную роль в проблеме классификации групп. В этом параграфе мы будем исходить из общих определений, относящихся к радикалам и приводившихся в первой главе. Теория радикалов в группах во многом выигрывает за счет совпадения двух характеристичностей, о которых говорилось в п. 1.2.6. Важную роль здесь играет также принадлежащая Г. Виландту идея субинвариантности и достижимости подгруппы в группе. Подгруппа H группы G называется *субинвариантной*, если в G имеется возрастающий нормальный ряд, соединяющий H и G. H называется *достижимой*, если имеется такой ряд конечной длины.

Условимся еще, что в дальнейшем всегда будет предполагаться, что в определение радикального теоретико-группового свойства θ входит требование, чтобы каждый нормальный делитель θ-группы также являлся θ-группой. Кроме того, все рассматриваемые нами абстрактные классы таковы, что они всегда содержат единичную группу.

Имеет место следующая теорема:

1.1. *Для любого радикального свойства* θ, *если* H — *достижимая подгруппа группы* G, *то* $\mathfrak{R}(H, \theta) = \mathfrak{R}(G, \theta) \cap H$.

Вначале рассмотрим случай, когда H — нормальный делитель в G. Так как $\mathfrak{R}(H, \theta)$ — характеристическая

подгруппа в H, то эта подгруппа является инвариантной θ-подгруппой в G. Поэтому $\mathfrak{R}(H, \theta) \subset \mathfrak{R}(G, \theta)$. С другой стороны, пересечение $\mathfrak{R}(G, \theta) \cap H$ является инвариантной θ-подгруппой в H, так что $\mathfrak{R}(G, \theta) \cap H \subset \subset \mathfrak{R}(H, \theta)$. Сопоставляя оба включения, получаем требуемое равенство.

Если теперь задан нормальный ряд

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G, \tag{1}$$

то имеем:

$$\mathfrak{R}(H, \theta) = \mathfrak{R}(H_1, \theta) \cap H = \mathfrak{R}(H_2, \theta) \cap H = \ldots$$
$$\ldots = \mathfrak{R}(H_{n-1}, \theta) \cap H = \mathfrak{R}(G, \theta) \cap H,$$

что и требовалось.

Назовем дальше радикальное (теоретико-групповое) свойство θ *нормально наследственным*, если: а) всякая субинвариантная подгруппа θ-группы также является θ-группой и б) объединение возрастающей нормальной цепи θ-подгрупп группы — снова θ-подгруппа.

Точнее говоря, это последнее условие означает следующее. Пусть группа G есть объединение подгрупп G_α, где индексы — трансфинитные числа, $\alpha < \gamma$, γ — предельное, и все G_β с $\beta < \alpha$ составляют в G_α возрастающий нормальный ряд. В таком случае, если все G_α — θ-группы, то и G — θ-группа. Докажем теперь теорему.

1.2. *Если θ — нормально наследственное радикальное свойство, H — субинвариантная подгруппа в G, то выполняется равенство $\mathfrak{R}(H, \theta) = \mathfrak{R}(G, \theta) \cap H$.*

По условию в группе имеется возрастающий нормальный ряд, первый член которого H, а последний — G. Пусть

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = G \tag{2}$$

— такой ряд. Индукцией по длине этого ряда будем доказывать, что если $\alpha \leqslant \beta$, то $\mathfrak{R}(H_\alpha, \theta) \subset \mathfrak{R}(H_\beta, \theta)$, и кроме того, если β — предельное, то $\mathfrak{R}(H_\beta, \theta) = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{R}(H_\alpha, \theta)$.

Сразу допустим, что утверждение доказано для всех $\alpha \leqslant \beta \leqslant \mu$, если $\mu < \gamma$. Докажем его для случая $\mu = \gamma$.

Пусть γ — непредельное порядковое число. Согласно предыдущему, $\mathfrak{R}(H_{\gamma-1}, \theta) \subset \mathfrak{R}(H_\gamma, \theta)$. Если теперь $\alpha < \gamma$, то $\alpha \leqslant \gamma - 1$, и, по предположению индукции, для $\beta =$

$=\gamma-1$ имеем включение $\mathfrak{R}(H_\alpha, \theta) \subset \mathfrak{R}(H_{\gamma-1}, \theta)$. Но тогда $\mathfrak{R}(H_\alpha, \theta) \subset \mathfrak{R}(H_\gamma, \theta)$.

Допустим теперь, что γ — предельное. По предположению индукции, ряду (2) отвечает возрастающий нормальный ряд

$$\mathfrak{R}(H_0, \theta) \subset \mathfrak{R}(H_1, \theta) \subset \ldots \subset \mathfrak{R}(H_\alpha, \theta) \subset \mathfrak{R}(H_{\alpha+1}, \theta) \subset \ldots \quad (3)$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ теоретико-множественное объединение всех членов этого ряда. В силу предположений относительно свойства θ, $\mathfrak{R}$ является θ-подгруппой. $\mathfrak{R}$ — также нормальный делитель в G. Действительно, пусть $h \in \mathfrak{R}$ и $g \in G$. Тогда при некотором $\beta < \gamma$ будет $h \in \mathfrak{R}(H_\beta, \theta)$ и $g \in H_\beta$. Так как $\mathfrak{R}(H_\beta, \theta)$ — нормальный делитель в H_β, то $g^{-1}hg \in \mathfrak{R}(H_\beta, \theta) \subset \mathfrak{R}$, т. е. $\mathfrak{R}$ — нормальный делитель. Итак, имеем $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}(H_\gamma, \theta)$.

Рассмотрим теперь пересечение $\mathfrak{R}(H_\gamma, \theta) \cap H_\alpha$, $\alpha < \gamma$. Эта подгруппа субинвариантна в $\mathfrak{R}(H_\gamma, \theta)$ и, следовательно, является θ-группой. Так как она инвариантна также в H_α, то получим $\mathfrak{R}(H_\gamma, \theta) \cap H_\alpha \subset \mathfrak{R}(H_\alpha, \theta)$. Ввиду доказанного только что включения $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}(H_\gamma, \theta)$ получаем совпадение $\mathfrak{R}(H_\gamma, \theta) \cap H_\alpha = \mathfrak{R}(H_\alpha, \theta)$. Отсюда также следует, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(H_\gamma, \theta)$, что и доказывает теорему.

Из доказанной теоремы, между прочим, вытекает следующий признак существования в группе G нетривиального θ-радикала: если группа G обладает нетривиальной субинвариантной θ-подгруппой, то $\mathfrak{R}(G, \theta) \neq E$.

Будем говорить, что подгруппа $H \subset G$ *локально субинвариантна* в G, если в группе G имеется локальная система $[G_\alpha]$ из подгрупп, содержащих H и таких, что всегда H субинвариантна в G_α. Напомним еще, что через $L\theta$ обозначается свойство группы обладать локальной системой из θ-подгрупп.

1.3. *Если свойство θ — такое же, как и в предыдущей теореме, и, сверх того, $\theta = L\theta$, то для всякой локально субинвариантной подгруппы H из группы G выполняется включение* $\mathfrak{R}(H, \theta) \subset \mathfrak{R}(G, \theta)$.

Пусть H — локально субинвариантная подгруппа в G и пусть $[G_\alpha]$ — соответствующая локальная система.

Обозначим $H_0 = \mathfrak{R}(H, \theta)$. Мы покажем, что H_0 принадлежит радикалу $\mathfrak{R}(G, \theta)$, если будет доказано, что инвариантная подгруппа H_0^G является θ-группой. Легко видеть, что система подгрупп вида $H_0^{G_\alpha}$ является локальной системой в H^G. В силу предыдущей теоремы, H_0 содержится в $\mathfrak{R}(G_\alpha, \theta)$. Следовательно, и $H_0^{G_\alpha}$ принадлежит $\mathfrak{R}(G_\alpha, \theta)$, и поэтому $H_0^{G_\alpha}$ является θ-группой. Но тогда H_0^G—$L\theta$-группа. А так как $L\theta = \theta$, то H_0^G — θ-группа, что и требовалось. Обратное включение $\mathfrak{R}(G, \theta) \cap H \subset \subset \mathfrak{R}(H, \theta)$ получается, если дополнительно предполагать, что подгруппы θ-групп также являются θ-группами.

Параллельно понятию локально субинвариантной подгруппы естественно говорить и о *локально достижимых* подгруппах. Точно так же, как это делалось только что, можно показать, что если θ — произвольное радикальное свойство с условием $\theta = L\theta$, и H — локально достижимая подгруппа группы G, то $\mathfrak{R}(H, \theta) \subset \mathfrak{R}(G, \theta)$.

Приведем теперь следующую теорему:

1.4. *Если θ — замкнутое относительно гомоморфизмов нормально наследственное свойство, то из того, что группа G обладает возрастающим нормальным рядом, все факторы которого — θ-группы, следует, что в G имеется возрастающий ряд характеристических подгрупп с факторами, являющимися θ-группами.*

Достаточно показать, что группа, удовлетворяющая условиям теоремы, θ-радикальна. Пусть G — такая группа и пусть возрастающий нормальный ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G$$

таков, что все его факторы $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ являются θ-группами. Пусть еще $\widetilde{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mathfrak{R}}(G, \theta)$ — верхний θ-радикал группы G. Нужно показать, что $\widetilde{\mathfrak{R}} = G$. Пусть это не так и пусть μ — первое порядковое число с тем свойством, что $G_\mu \not\subset \widetilde{\mathfrak{R}}$. Число μ не является предельным, и $G_{\mu-1} \subset \widetilde{\mathfrak{R}}$. В группе $G/\widetilde{\mathfrak{R}}$ рассмотрим подгруппу $G_\mu\widetilde{\mathfrak{R}}/\widetilde{\mathfrak{R}}$. В силу изоморфизма

$$G_\mu\widetilde{\mathfrak{R}}/\widetilde{\mathfrak{R}} \approx G_\mu/G_\mu \cap \widetilde{\mathfrak{R}}$$

и поскольку правая часть здесь является гомоморфным образом группы $G_\mu/G_{\mu-1}$, то $G_\mu\widetilde{\mathfrak{R}}/\widetilde{\mathfrak{R}}$ — θ-группа. Очевидно также, что эта подгруппа субинвариантна в $G/\widetilde{\mathfrak{R}}$. Сле-

довательно, что $G/\widetilde{\mathfrak{R}}$ имеется нетривиальный θ-радикал, что невозможно. Следовательно, $G=\widetilde{\mathfrak{R}}(G, \theta)$. Верхний θ-радикальный ряд в G и является нужным характеристическим рядом.

Из этой теоремы следует, что если θ — замкнутое относительно гомоморфизмов нормально наследственное свойство, то в произвольной группе G верхний радикал $\widetilde{\mathfrak{R}}(G, \theta)$ является θ-радикальной подгруппой, порожденной всеми θ-радикальными нормальными делителями группы. Таким образом, этот верхний радикал оказывается строгим радикалом, отвечающим классу θ-радикальных групп.

2. Некоторые конкретные радикалы. Начнем с локально нетерова радикала (Р. Бер [11], Б. И. Плоткин [6]).

2.1. *Во всякой группе имеется локально нетеров радикал.*

Достаточно показать, что в произвольной группе произведение двух локально нетеровых нормальных делителей также является локально нетеровым нормальным делителем. Пусть A и B — локально нетеровы нормальные делители группы G. Так как пара (A, B) является локально ограниченной (см. п. 3.3.1), то в произведении AB имеется локальная система из подгрупп вида $C_\alpha=A_\alpha B_\alpha$, где A_α и B_α — подгруппы с конечным числом образующих, $A_\alpha\subset A$, $B_\alpha\subset B$ и A_α — нормальный делитель в C_α. По условию, A_α и B_α — нетеровы группы, а так как расширение нетеровой группы с помощью нетеровой также является нетеровой группой, то и C_α — нетерова группа. Следовательно, AB — локально нетерова группа.

Допустим теперь, что θ — такое абстрактное теоретико-групповое свойство, что подгруппа θ-группы также является θ-группой (наследственность θ), всякая θ-группа является нетеровой группой и в произвольной группе произведение двух инвариантных θ-подгрупп — снова θ-подгруппа. При указанных предположениях имеет место следующая теорема:

2.2. *В произвольной группе имеется $L\theta$-радикал.*

Пусть A и B — две инвариантные $L\theta$-подгруппы группы G. Группа AB является локально нетеровой, и

в этой группе, очевидно, имеется локальная система из подгрупп с конечным числом образующих вида $C_\alpha = A_\alpha B_\alpha$, где $A_\alpha \subset A$ и $B_\alpha \subset B$. Обозначим $\bar{A}_\alpha = C_\alpha \cap A$ и $\bar{B}_\alpha = C_\alpha \cap B$. $\bar{A}_\alpha$ и $\bar{B}_\alpha$ — инвариантные подгруппы в C_α, и так как C_α — нетерова группа, то обе эти подгруппы имеют конечное число образующих. Следовательно, $\bar{A}_\alpha$ и $\bar{B}_\alpha$ — θ-группы. По условию, произведение $C_\alpha = \bar{A}_\alpha \bar{B}_\alpha$ также является θ-группой. Этим доказано, что AB — $L\theta$-группа. Остальное очевидно.

Примером свойства θ, удовлетворяющего условиям теоремы 2.2, является, в частности, свойство быть S-группой Гирша, т. е. разрешимой группой с условием максимальности. Таким образом, в произвольной группе произведение инвариантных LS-подгрупп — снова такая же подгруппа.

Отметим, с другой стороны, что, как недавно было установлено в работе Г. Баумслага, Л. Ковача и Б. Неймана [1] (см. также п. 3.4), произведение произвольных локально разрешимых нормальных делителей группы может уже не быть локально разрешимым нормальным делителем.

2.3. *Всякая локально нильпотентная группа является локально нетеровой группой.*

Мы покажем, что всякая нильпотентная группа с конечным числом образующих G является нетеровой группой. Пусть A — циклическая подгруппа в G. Так как A субинвариантна в G, то для θ = «локальная нетеровость» имеем: $A = \mathfrak{R}(A, \theta) \subset \mathfrak{R}(G, \theta)$, так что все циклические подгруппы из G принадлежат локально нетерову радикалу группы G. Это значит, что сама группа G локально нетерова. Так как G имеет конечное число образующих, то G — нетерова группа.

Мы видим, что если в качестве θ взять свойство группы быть нильпотентной группой с конечным числом образующих, то к такому θ применима теорема 2. 2. Отсюда следует теорема:

2.4. *Во всякой группе имеется локально нильпотентный радикал.*

С помощью этой теоремы легко показать, что всякая группа с нормализаторным условием, в частности, всякая ZA-группа локально нильпотентна.

Действительно, в такой группе всякая циклическая подгруппа субинвариантна и, будучи локально нильпотентной, содержится в локально нильпотентном радикале группы. Следовательно, группа с нормализаторным условием совпадает со своим локально нильпотентным радикалом, т. е. она сама локально нильпотентна.

В дальнейшем локально нильпотентный радикал группы G будет обозначаться через $R(G)$.

Пусть S_1 и N_1 обозначают соответственно свойства группы быть конечным расширением S-группы Гирша и нильпотентной группы с конечным числом образующих. Оба эти свойства являются наследственными, и S_1- и N_1-группы являются нетеровыми группами.

Как известно, до сих пор не найдены нетеровы группы, не являющиеся S_1-группами. Эта тайна нетеровости давно привлекает внимание теоретико-групповиков, однако пока к ней нет никаких подходов. Мы уже говорили о том, что было бы интересно решить его хотя бы для линейных групп, однако и здесь нет существенных продвижений.

2.5. *В произвольной группе G произведение двух инвариантных S_1-(N_1-)-подгрупп есть S_1-(соответственно N_1-)-подгруппа.*

Доказательство мы приведем только для свойства N_1. Для S_1 доказательство аналогично. Пусть A и B — две инвариантные N_1-подгруппы в группе G и пусть A_0 и B_0 — нильпотентные нормальные делители конечного индекса соответственно в A и B. Подгруппы A_0 и B_0 субинвариантны в AB, и поэтому обе они принадлежат радикалу $R(AB)$. Теперь покажем, что этот радикал имеет конечный индекс в AB. (Очевидно, что $R(AB)$ — нетерова группа.) Фактор-группа $AB/R(AB)$ порождается своими нормальными делителями $AR(AB)/R(AB)$ и $BR(AB)/R(AB)$. Нужно показать, что эти группы конечны. Сделаем это, например, для $AR(AB)/R(AB)$. Имеем:

$$AR(AB)/R(AB) \approx A/A \cap R(AB).$$

Но так как $A_0 \subset A \cap R(AB)$, то $A/A \cap R(AB)$ — конечная группа. Следовательно, и $AR(AB)/R(AB)$ — конечная группа, так что AB — N_1-группа.

Применяя теперь к свойствам S_1 и N_1 теорему 2.2, получаем следующее предложение:

2.6. *В произвольной группе имеются* LN_1- и LS_1-*радикалы.*

Очевидно также, что в произвольной группе имеется локально конечный радикал.

Все перечисленные выше радикалы определяются нормально наследственными радикальными свойствами. Покажем еще, что свойство группы быть RN^*-группой также является нормально наследственным радикальным свойством. Прежде всего это свойство наследственно, и в произвольной группе произведение двух инвариантных RN^*-подгрупп также есть RN^*-подгруппа. Пусть дальше в некоторой группе G задана возрастающая нормальная цепь RN^*-подгрупп

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots,$$

где на предельных местах стоят объединения предыдущих членов, и пусть H — объединение всех этих H_α.

Приведенная цепь является возрастающим нормальным рядом в H. Легко видеть, что такой ряд можно уплотнить до нормального разрешимого ряда в H. Действительно, если

$$E = A_1^{\alpha+1} \subset A_2^{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\beta^{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\gamma^{\alpha+1} = H_{\alpha+1}$$

— разрешимый нормальный ряд в $H_{\alpha+1}$, то подгруппы $H_\alpha A_\beta^{\alpha+1}$ по всем α и β после удаления повторений составят нужный ряд.

Все это и означает, что свойство RN^* является нормально наследственным радикальным свойством. Такое свойство является также строго радикальным.

В заключение пункта приведем еще без доказательства один результат из работы Б. И. Плоткина и Ш. С. Кемхадзе [1], имеющий отношение к рассматриваемым здесь вопросам.

Если θ — некоторое абстрактное теоретико-групповое свойство, то пусть здесь θ' и θ^* обозначают соответственно свойство группы быть порожденной достижимыми (субинвариантными) θ-подгруппами. Оба эти свойства, очевидно, являются всегда радикальными свойствами. Если дополнительно предположить, что для θ выполняются

требования теоремы 2.2, то при этом условии справедлива следующая теорема:

2.7. 1) *Группа G тогда и только тогда является θ'-группой (θ^*-группой), когда в ней имеется локальная система из достижимых (субинвариантных) θ-подгрупп. Свойство θ^* является нормально наследственным радикальным свойством.* 2) *Если G — произвольная группа, то элемент $g \in G$ тогда и только тогда принадлежит радикалу $\mathfrak{R}(G, \theta^*)$ ($\mathfrak{R}(G, \theta')$), когда этот элемент принадлежит некоторой субинвариантной (достижимой) θ-подгруппе из G.*

Ясно, что при этом выполняются включения

$$\mathfrak{R}(G, \theta') \subset \mathfrak{R}(G, \theta^*) \subset \mathfrak{R}(G, L\theta).$$

Нетрудно будет заметить, что некоторые из приводимых в следующем пункте теорем содержатся в общей схеме теоремы 2.7.

3. Радикал Бера и наднильпотентный радикал. Оба эти радикала содержатся в локально нильпотентном радикале $R(G)$. Так же как и последний, они представляют особый интерес в теории групп автоморфизмов групп.

Начнем с определений.

Группу G назовем *группой Бера* или *беровской группой*, если любая подгруппа из G, имеющая конечное число образующих, достижима в G.

Группу G будем называть *наднильпотентной*, если каждая ее подгруппа с конечным числом образующих субинвариантна в G.

Так как в наднильпотентной группе каждая циклическая подгруппа субинвариантна, то такая группа локально нильпотентна. Тем более локально нильпотентна всякая беровская группа.

Очевидно, что счетная локально нильпотентная группа наднильпотентна.

3.1 (Р. Бер [6]). *Свойство группы быть беровской группой является радикальным свойством.*

Для доказательства этой теоремы удобно воспользоваться внутренней парой (G, G). Покажем, что нормальный делитель $H \subset G$ в том и только в том случае

является группой Бера, когда он действует как локально финитно стабильная группа.

Пусть A — подгруппа с конечным числом образующих в H и пусть вначале H — беровская группа. По условию, A достижима в H, а так как H — нормальный делитель, то и в G. Кроме того, A — нильпотентная группа, так что существует конечный нормальный ряд вида

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A \subset A_{n+1} \subset \ldots \subset A_m = G,$$

где часть ряда до A есть центральный ряд в A. Очевидно, что указанный ряд является стабильным рядом относительно действующей группы A. Этим установлено, что H — локально финитно стабильная группа. Допустим, с другой стороны, что выполнено последнее свойство. Пусть, как и раньше, A — подгруппа в H с конечным числом образующих и пусть

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

— конечный A-стабильный ряд в G. Непосредственно проверяется, что ряд, составленный из подгрупп AG_i, является конечным нормальным рядом, соединяющим A с G, так что A достижима в H, и H — беровская группа. После этих замечаний сформулированная теорема непосредственно вытекает из теоремы 3.3.1.2: радикал, определяемый свойством группы быть беровской, совпадает с γ-радикалом $\gamma_G(G) = \gamma(G)$ действующей группы G.

3.2. *Свойство группы быть наднильпотентной является нормально наследственным радикальным свойством* (К. Грюнберг [3], Ш. С. Кемхадзе [1], Р. Бер [17]).

Вначале докажем следующее вспомогательное утверждение. Пусть в локально нильпотентной группе G задан некоторый возрастающий нормальный ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\gamma = G$$

и пусть b — произвольный элемент в G. Для каждого α через B_α обозначим пересечение подгрупп $b^{-i}A_\alpha b^i$ по всем целым i. Все подгруппы B_α инвариантны относительно элемента b. Покажем, что все эти подгруппы составляют в G возрастающий нормальный ряд, возможно,

с повторениями. Ясно, что $B_\alpha \subset B_{\alpha+1}$. Кроме того, поскольку подгруппа $b^{-i}A_\alpha b^i$ инвариантна в $b^{-i}A_{\alpha+1}b^i$, то $B_{\alpha+1}$ принадлежит нормализатору этой подгруппы. Отсюда следует, что B_α — нормальный делитель в $B_{\alpha+1}$. Остается показать, что если $\beta \leqslant \gamma$ — предельное, то B_β есть объединение всех B_α с $\alpha < \beta$. Пусть $g \in B_\beta$. Это значит, что для каждого целого i найдется $a_i \in A_\beta$ такое, что $g = b^{-i}a_i b^i$. Последнее равносильно тому, что все элементы $b^i g b^{-i}$ принадлежат A_β. Пусть C — подгруппа, порожденная всевозможными $b^i g b^{-i}$. Так как эта подгруппа принадлежит нильпотентной подгруппе с двумя образующими $\{g, b\}$, то она сама имеет конечное число образующих. Это, в частности, означает, что найдется $\alpha < \beta$, при котором $C \subset A_\alpha$. Но тогда при любом i элементы $b^i g b^{-i}$ принадлежат A_α и $g \in \bigcap b^{-i}A_\alpha b^i = B_\alpha$. Этим доказано, что подгруппа B_β является объединением предыдущих B_α.

Теперь будем доказывать, что в произвольной группе произведение двух инвариантных наднильпотентных подгрупп также является наднильпотентной подгруппой.

Пусть A и B — две такие подгруппы в G. Так как обе эти подгруппы лежат в локально нетеровой подгруппе $R(G)$, то они составляют локально ограниченную пару. Пусть $C_\alpha = A_\alpha B_\alpha$, $\alpha \in I$, — локальная система в $C = AB$ из таких подгрупп, что $A_\alpha \subset A$, $B_\alpha \subset B$, обе эти подгруппы имеют конечное число образующих, и A_α инвариантна относительно B_α. Так как B_α — нильпотентная группа, то существует конечный возрастающий нормальный ряд

$$A_\alpha = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_i \subset C_{i+1} \subset \ldots \subset C_m = C_\alpha,$$

где $C_{i+1} = \{C_i, b_i\}$, $b_i \in B_\alpha$.

По условию, подгруппа A_α субинвариантна в C. Дальше по индукции покажем, что все члены отмеченного ряда, в том числе и C_α, субинвариантны в C. Пусть это установлено для C_i и пусть

$$C_i = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\gamma = C$$

— соответствующий нормальный ряд. В соответствии с предыдущим для элемента $b = b_i$ построим нормаль-

ный ряд

$$C_i = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\alpha \subset B_{\alpha+1} \subset \ldots \subset B_\gamma = C.$$

Так как B — наднильпотентная группа, то существует возрастающий нормальный ряд в C, первым членом которого является циклическая подгруппа $\{b_i\} = H$. Пусть ряд

$$E \subset H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots H_\beta \subset \ldots \subset H_\nu = C$$

является таким рядом. Легко проверяется, что если теперь предпоследний ряд уплотнить с помощью последнего, а затем каждый член нового ряда «умножить» на H, то получится возрастающий нормальный ряд в C, первый член которого совпадет с подгруппой C_{i+1}. Индукция проходит, и следовательно, C_α — субинвариантная в C подгруппа.

Если теперь H — произвольная подгруппа с конечным числом образующих в C, то H содержится в некоторой C_α, и так как C_α — нильпотентная группа, то H достижима в C_α и субинвариантна в C. Мы доказали, что C — наднильпотентная группа.

Теперь допустим, что в некоторой группе G имеется возрастающий нормальный ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset \bigcup H_\alpha = H,$$

все члены которого наднильпотентны. Нужно показать, что и его объединение H — наднильпотентная группа. Пусть A — подгруппа с конечным числом образующих в H. Эта подгруппа содержится в некоторой H_α. Так как A субинвариантна в H_α, а H_α субинвариантна в H, то и A субинвариантна в H. Следовательно, H — наднильпотентная группа. Этим ввиду п. 1.2.6 завершается доказательство теоремы.

В дальнейшем наднильпотентный радикал группы G будем обозначать через $\beta^*(G)$. Введем еще следующие определения. Пусть G — произвольная группа, $g \in G$ и $H = \{g\}$. Элемент g назовем *достижимым* (в G), если H — достижимая подгруппа в G. Если же H субинвариантна в G, то в таком случае g называется *субинвариантным* элементом в G. Соответственно определяются *локально достижимые* и *локально субинвариантные* элементы.

Следующая теорема показывает, что рассматриваемые в этом пункте радикалы допускают элементную характеристику — они могут быть охарактеризованы как множества элементов специального типа (Р. Бер [6], К. Грюнберг [3], Ш. С. Кемхадзе [1], В. Г. Виляцер [4], Б. И. Плоткин [3]).

3.3. а) *Радикал Бера* $\gamma(G)$ *совпадает с множеством всех достижимых элементов из* G; б) *наднильпотентный радикал есть множество субинвариантных элементов из* G; в) *локально нильпотентный радикал* $R(G)$ *совпадает с множеством всех локально субинвариантных элементов группы.*

Каждый элемент из $\gamma(G)$ и $\beta^*(G)$ обладает, очевидно, соответствующим свойством. Пусть теперь g — достижимый элемент и

$$H \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$$

— соответствующий конечный нормальный ряд. Тогда

$$\gamma(H) = H \subset \gamma(G),$$

т. е. $g \in \gamma(G)$. Для субинвариантного элемента, пользуясь тем, что свойство группы быть наднильпотентной является нормально наследственным радикальным свойством, выводим аналогично, что каждый такой элемент содержится в $\beta^*(G)$. Теперь докажем в).

Пусть $g \in R(G)$ и H — подгруппа в G с конечным числом образующих, содержащая g. $R(H)$ является счетной локально нильпотентной подгруппой и также содержит g. Из счетности $R(H)$ следует, что в этой подгруппе имеется возрастающий нормальный ряд, первым членом которого является циклическая подгруппа $\{g\}$. Отсюда следует, что такой g — локально субинвариантный элемент в G.

Если, с другой стороны, g — локально субинвариантный элемент, то согласно лемме 1.3 этот g принадлежит радикалу $R(G)$.

Легко видеть, что множество всех локально достижимых элементов также является (характеристической) подгруппой. Эта подгруппа содержит радикал Бера и содержится в локально нильпотентном радикале. Как мы увидим в п. 3.4, она меньше, чем $R(G)$.

Еще отметим следующий, почти очевидный факт. Элемент g группы G тогда и только тогда достижим, субинвариантен, локально достижим или локально субинвариантен, когда порожденный этим элементом внутренний автоморфизм соответственно финитно стабилен, стабилен, квазифинитно стабилен или квазистабилен.

В следующей теореме приводится еще одна характеристика наднильпотентных групп.

3.4. *Группа G тогда и только тогда наднильпотентна, когда она является локально нильпотентной RN^*-группой* (Ш. С. Кемхадзе [1], Р. Бер [17]).

Допустим вначале, что G — наднильпотентная группа. Мы знаем, что такая группа локально нильпотентна. Пусть теперь $g \in G$, $\{g\} = H$. Так как H — субинвариантная подгруппа в G, то, учитывая, что свойство RN^* является нормально наследственным радикальным свойством, мы заключаем, что $H = RN^*(H) \subset RN^*(G)$ (здесь и дальше через $RN^*(G)$ обозначен RN^*-радикал группы G), так что каждая циклическая подгруппа из G принадлежит $RN^*(G)$, т. е. $G = RN^*(G)$. Для доказательства обратного утверждения считаем, что G — локально нильпотентная RN^*-группа, и пусть ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\gamma = G$$

— разрешимый нормальный ряд в G. Покажем, что каждый элемент из G является субинвариантным элементом. Ввиду предыдущей теоремы этого будет достаточно. Пусть $g \in G$. Образуем для этого элемента, как и в доказательстве теоремы 3. 2, ряд

$$E = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\alpha \subset B_{\alpha+1} \subset \ldots \subset B_\gamma = G.$$

Легко видеть, что этот второй ряд также является разрешимым рядом.

Действительно, если $a,\ b \in B_{\alpha+1}$, то при любом i $a,\ b \in g^{-i}A_{\alpha+1}g^i$ и $[a,\ b] \in g^{-i}A_\alpha g^i$, так что коммутатор $[a,\ b]$ принадлежит пересечению всех таких $g^{-i}A_\alpha g^i$, т. е. $[a,\ b] \in B_\alpha$.

Обозначим дальше $\{g\} = H$ и будем исходить из внутренней пары $(G,\ H)$. Так как G — локально нильпотентная группа, то эта пара квазистабильна. Учитывая, что разрешимый ряд из подгрупп B_α является

H-допустимым рядом, на основании теоремы 3.3.4.5 мы можем заключить, что группа H стабильна относительно G. Но это, очевидно, равносильно тому, что H — субинвариантная подгруппа в G. Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно получаем следующее соотношение:

$$R(G) \cap RN^*(G) = \beta^*(G).$$

Отметим еще один нерешенный вопрос, связанный с группами Бера. Группа G называется *фиттинговой*, если она порождается своими нильпотентными нормальными делителями. Всякая фиттинговая группа, очевидно, является беровской. Верно ли обратное — это и есть тот вопрос, который мы имеем в виду. Неизвестно даже, обладает ли всякая беровская группа нетривиальными абелевыми нормальными делителями.

4. Минимальные радикальные классы. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый набор свойств, которыми могут обладать классы групп. Если в некотором классе $\mathfrak{K}$ все эти свойства выполняются, то такой класс групп назовем $\mathfrak{M}$-классом. Если, далее, $\mathfrak{K}$ — произвольный класс групп, то говорят (ср. А. Г. Курош [6]), что класс групп $\mathfrak{K}^{\mathfrak{M}}$ является *минимальным* $\mathfrak{M}$-классом над $\mathfrak{K}$, если: а) каждая $\mathfrak{K}$-группа является и $\mathfrak{K}^{\mathfrak{M}}$-группой, б) класс $\mathfrak{K}^{\mathfrak{M}}$ является $\mathfrak{M}$-классом и в) класс $\mathfrak{K}^{\mathfrak{M}}$ содержится во всех $\mathfrak{M}$-классах групп, содержащих класс $\mathfrak{K}$. Понятно, что не для всяких наборов $\mathfrak{M}$ такие минимальные классы существуют. В этом пункте мы заметим, что из предыдущих результатов легко выводятся следующие утверждения:

4.1. *Беровские группы являются минимальным радикальным классом над классом абелевых групп.*

4.2. *Наднильпотентные группы являются минимальным нормально наследственным радикальным классом над классом абелевых групп.*

Проверим, например, 4.2. Нужно проверить только пункт в) определения минимального класса. Пусть группа G является наднильпотентной группой и пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп, являющийся нормально наследственным радикальным классом, содержащим все абелевы группы. Определяемый этим классом радикал обозначим

через $\mathfrak{K}(G)$. Теперь, точно так же, как это делалось для RN^*, получаем, что каждая циклическая подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{K}(G)$.

Следовательно, вся группа G является $\mathfrak{K}$-группой. Аналогично показывается, что

4.3. *Верхний радикальный класс, определяемый классом беровских групп, является минимальным строго радикальным классом над классом абелевых групп* (К. К. Щукин [5]). (См. также Р. Бер [6], где такие группы называются субразрешимыми группами.)

Такую же роль по отношению к нормально наследственному строго радикальному свойству играет верхний радикальный класс, определяемый наднильпотентными группами. Ввиду теоремы 3.4 группы этого класса — это в точности RN^*-группы.

Здесь под верхним радикальным классом, отвечающим радикальному классу θ-групп, мы понимаем класс групп, у которых верхний θ-радикал совпадает с группой.

5. Локально ограниченные группы. Группа G называется *локально ограниченной*, если внутренняя пара (G, G) локально ограничена. Другими словами, G локально ограничена, если для любого $g \in G$ и любого конечного симметричного множества $X \subset G$ подгруппа, порожденная всевозможными коммутаторами $[g;\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]$, $x_{i_j} \in X$, имеет конечное число образующих.

Из теоремы 3.3.2.1, если применить ее к внутренней паре, непосредственно следует, что всякая группа, обладающая возрастающим инвариантным рядом с нетеровыми факторами, является локально ограниченной группой. Ясно также, что всякая локально нетерова группа является локально ограниченной.

В соответствии с п. 2.4.6 назовем еще группу G *алгебраической*, если для любых x и $g \in G$ подгруппа, порожденная всевозможными коммутаторами вида $[g;\ x, x, \ldots, x]$, имеет конечное число образующих.

Легко доказывается следующая лемма:

5.1. *Если алгебраическая группа G является циклическим расширением локально нетеровой группы, то и G — локально нетерова группа.*

Пусть H — локально нетеров нормальный делитель в G и $G=\{H, g\}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого конечного множества элементов h_1. $h_2, \ldots, h_k$ из H подгруппа $M=\{g, h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ удовлетворяет условию максимальности. Обозначим через A подгруппу, порожденную всеми $h_1, h_2, \ldots, h_k$, всеми $[h_i;\ \underbrace{g, g, \ldots, g}_{n \text{ раз}}]$, $i=1, 2, \ldots, k$; $n=1, 2, \ldots$, и всеми $[h_i;\ g^{-1}, g^{-1}, \ldots, g^{-1}]$. Эта подгруппа содержится в H, имеет конечное число образующих и инвариантна относительно g и g^{-1}. Из этих свойств следует, что A удовлетворяет условию максимальности, и так как расширение группы с условием максимальности с помощью такой же снова удовлетворяет условию максимальности, то и группа $\{g, A\}$ удовлетворяет этому условию. Но $M \subset \{g, A\}$. Лемма доказана.

Опираясь на эту лемму, получаем, что

5.2. *Всякая локально разрешимая алгебраическая группа является локально нетеровой* (*и, следовательно, локально гиршевой*).

Достаточно ограничиться случаем разрешимой группы. Такая группа обладает возрастающим нормальным рядом с циклическими факторами. Теперь наше утверждение по индукции следует из леммы.

Аналогично доказывается, что если алгебраическая группа является расширением локально гиршевой группы с помощью локально гиршевой, то и сама группа является локально гиршевой. Отсюда следует, что свойство группы быть локально гиршевой является строго радикальным свойством относительно класса алгебраических групп.

Нам неизвестно, будет ли верно такое же утверждение для свойства группы быть локально нетеровой. Не решен и более простой вопрос: будет ли свойство группы быть локально нетеровой строго радикальным относительно класса локально ограниченных групп. Оба эти вопроса решались бы легко, если бы оказалось справедливым предположение о том, что всякая нетерова группа является конечным расширением гиршевой группы.

6. α-радикал группы. Радикалы, связанные с внутренней парой. Раньше мы уже видели, что если группе G сопоставить внутреннюю групповую пару (G, G), то γ-радикал действующей здесь группы G — это в точности радикал Бера абстрактной группы G. Легко также понять, что и β-радикал здесь существует, и он совпадает с локально нильпотентным радикалом $R(G)$. В п. 7.5.1 будет рассмотрен еще один внешний радикал ($\beta^*_G(\Gamma)$), который при переходе к внутренней паре дает наднильпотентный радикал $\beta^*(G)$. Обозначим дальше через $\alpha(G)$ α-радикал действующей группы G. Согласно определению, это есть множество всех таких $x \in G$, что для любого фактора B/A произвольной главной системы группы G выполняется $[B, x] \subset A$. Из теоремы 7.5.2.1 непосредственно следует, что в локально конечной группе G локально нильпотентный радикал $R(G)$ совпадает с $\alpha(G)$. Этот факт показывает, в частности, что в локально конечных группах фактор-группа по локально нильпотентному радикалу обладает хорошей характеристикой — она распадается в подпрямое произведение групп автоморфизмов, индуцируемых группой в факторах ее главных систем. Для конечных групп это свойство хорошо известно.

Из теоремы 7.5.2.1 для случая локально нетеровых групп получаем следующее включение: $R(G) = \beta(G) \subset \alpha(G)$. Покажем, что такое же включение выполняется и в том случае, когда группа G является расширением ZA-группы с помощью локально нетеровой группы.

Пусть H — подгруппа с конечным числом образующих в G. Тогда подгруппа $H \cap R(G)$ является ZA-группой. Действительно, пусть G' — такая инвариантная ZA-подгруппа в G, что G/G' — локально нетерова группа. Тогда $G' \subset R(G)$ и группа $(H \cap R(G))\,G'/G'$ имеет конечное число образующих. Так как $H \cap R(G) \subset R(G)$, то отсюда следует, что $(H \cap R(G))\,G'$ — ZA-группа. Но тогда и $H \cap R(G)$ как подгруппа в $(H \cap R(G))\,G'$ является ZA-группой.

Дальше для произвольного композиционного фактора B/A группы G рассмотрим пару $(B/A, G)$, и пусть $(C/A, H)$ — ее подпара, имеющая конечную систему образующих. Пусть еще $g_1A, g_2A, \ldots, g_nA$ — конечная

система H-образующих группы C/A. Все представители $g_1, g_2, \ldots, g_n$ мы присоединим к H и будем дальше считать, что уже H содержит все эти элементы. Кроме того, можно считать, что все эти g_i принадлежат радикалу $R(G)$. В самом деле, если $B \cap R(G) \subset A$, то $[B, R(G)] \subset R(G) \cap B \subset A$, и поэтому можно предположить, что $(R(G) \cap B) A = B$. Отсюда следует, что можно считать, что все g_i принадлежат $R(G)$ и, значит, и пересечению $R(G) \cap H$. Если дальше $[Z_\alpha]$ — верхний центральный ряд в $R(G) \cap H$, то подгруппы $(Z_\alpha \cap C) A/A$ составят в C/A (после удаления повторений) $R(G) \cap H$-стабильный ряд, причем ясно, что все члены такого ряда допустимы относительно H. Применяя теперь лемму 3.3.5.1, получаем, что в B/A имеется стабильная относительно $R(G)$ система из G-допустимых подгрупп, т. е. из нормальных делителей группы G/A. Это возможно лишь в случае, когда $[B, R(G)] \subset A$, что и доказывает включение $R(G) \subset \alpha(G)$.

Некоторые случаи совпадения α- и β-радикалов приводятся в работе Ф. Холла [4] (см. также п. 8.1.6).

В обзорной статье Б. И. Плоткина [7] были определены так называемые относительные радикалы — гиперцентры в группах. Нетрудно понять, что если группу G рассматривать с точки зрения внутренней пары (G, G), то относительные радикалы этой группы — это радикалы области действия G относительно действующей группы G в том смысле, как они были определены в п. 2.1.5. Так, в частности, локально ограниченный радикал области действия (см. п. 3.3.6) превращается в соответствующий относительный радикал группы G. В дальнейшем будут названы другие относительные радикалы.

Сюда же применимы и теоремы из п. 2.4.1, позволяющие выделять серии относительных радикалов.

§ 3. РАДИКАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И W-ГРУППЫ

1. Полупростота. Вполне приводимый радикал. Каждому радикальному свойству отвечает определенная полупростота. В дальнейшем, однако, под полупростотой группы мы будем понимать полупростоту, связанную

с локально нильпотентным радикалом. Итак, группа называется *полупростой* группой, если в ней нет нетривиальных локально нильпотентных нормальных делителей. В теории таких полупростых групп важную роль играет понятие вполне приводимого радикала. В связи с этим мы сейчас рассмотрим свойство группы быть вполне приводимой группой без центра. Это свойство обозначим здесь через B. Всякая B-группа является полупростой группой. Единичную группу можно считать B-группой, и тогда это свойство оказывается радикальным свойством (П. А. Гольберг [1]). Покажем вначале, что объединение возрастающей нормальной цепи B-подгрупп любой группы снова является B-подгруппой. Пусть группа G является объединением членов возрастающего нормального ряда своих подгрупп

$$H_0 = E \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset \bigcup H_\alpha = G$$

и пусть все члены этого ряда являются B-группами. Покажем, что все члены этого ряда являются нормальными делителями группы G. Возьмем H_α и рассмотрим все H_β с $\beta > \alpha$. Индукцией по β будем доказывать инвариантность H_α в H_β. Пусть это уже доказано для всех $\alpha \leqslant \beta < \mu$. Если μ — предельное число, то инвариантность H_α в H_μ очевидна. Пусть существует $\mu - 1$. Так как H_μ и $H_{\mu-1}$ — B-группы, то H_α — прямой множитель в $H_{\mu-1}$, а $H_{\mu-1}$ — прямой множитель в H_μ, так что H_α — нормальный делитель в H_μ. Теперь ясно, что H_α — нормальный делитель в каждом H_μ, $\mu > \alpha$, и поэтому H_α — нормальный делитель в G.

Так как, далее, каждая подгруппа H_α однозначно раскладывается в прямое произведение простых групп и так как из инвариантности H_α в H_β при $\alpha < \beta$ следует, что разложение H_β является продолжением разложения H_α, то в G имеется однозначно определенный набор простых нормальных делителей, порождающий всю группу. Отсюда, очевидно, следует, что G—B-группа. Теперь будем доказывать, что если группа порождается двумя инвариантными B-подгруппами, то такая группа сама является B-группой.

Пусть группа G порождается своими нормальными делителями H и F, являющимися B-группами. Допустим еще, что $H \cap F = D$, и пусть $H = D \times H'$. Покажем, что H' — нормальный делитель в G. Для этого достаточно показать, что если $g \in F$, то $g^{-1}H'g \subset H'$. Подгруппа $g^{-1}H'g$ является нормальным делителем в H. Из равенства

$$g^{-1}H'g \cap D = g^{-1}(H' \cap D)\,g$$

следует, что подгруппа $g^{-1}H'g$ пересекается с D только по единице. Это означает, что $g^{-1}H'g \subset H'$, т. е. H' — нормальный делитель в G. Теперь группа G представима в виде $G = H' \times F$, где H' и F являются B-группами. Ясно, что в таком случае и G—B-группа. Мы можем сейчас утверждать, что

1.1. *Во всякой группе имеется B-радикал.*

Определяемый свойством B радикал группы G мы обозначим через $B(G)$ и назовем его *вполне приводимым радикалом*. Докажем дальше следующую теорему:

1.2. *Если H — субинвариантная подгруппа группы G, то $B(H)$ является нормальным делителем в $B(G)$.*

Пусть

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = G$$

— возрастающий нормальный ряд в G с первым членом H. Допустим, что для всех $\mu < \gamma$ уже доказано, что если $\alpha < \beta \leqslant \mu$, то $B(H_\alpha)$ — нормальный делитель в $B(H_\beta)$. Нужно перейти к случаю $\mu = \gamma$. Если γ непредельное, то рассуждения такие же, как и в теореме 1.1, с учетом имеющейся здесь транзитивности нормальности. Пусть γ предельное. Система подгрупп $B(H_\alpha)$ с $\alpha < \gamma$ является вполне упорядоченной по возрастанию системой подгрупп.

Через B'_γ обозначим объединение всех $B(H_\alpha)$. Так как все $B(H_\alpha)$ являются вполне приводимыми нормальными делителями в B'_γ, то и их объединение B'_γ — вполне приводимая группа. Кроме того, легко видеть, что B'_γ — нормальный делитель в G, так что $B'_\gamma \subset B(G)$. Дальнейшее очевидно.

Из теоремы 1.2 непосредственно следует, что если группа G обладает субинвариантной простой некоммута-

тивной подгруппой $H \neq G$, то $B(G) \neq E$ и G — не простая группа.

Свойство B не является нормально наследственным свойством: достаточно воспользоваться примером Ф. Холла простой, но не строго простой группы. Пусть G — простая группа, обладающая нетривиальной субинвариантной подгруппой H. G — вполне приводимая группа без центра, а H таковой не является: если бы и H была вполне приводима, то в G имелась бы собственная простая субинвариантная подгруппа, а это противоречило бы простоте G.

2. Радикальные группы и W-группы. Группа G называется *радикальной*, если она обладает возрастающим нормальным рядом с локально нильпотентными факторами. По теореме 2.1.4 каждая радикальная группа совпадает со своим верхним локально нильпотентным радикалом и поэтому обладает характеристическим рядом с локально нильпотентными факторами. Свойство группы быть радикальной является нормально наследственным радикальным свойством. Радикал, определяемый этим свойством, является строгим радикалом, и так как он совпадает с верхним радикалом, отвечающим $R(G)$, он обозначается через $\tilde{R}(G)$. Каждая группа является расширением радикальной группы с помощью полупростой. Некоторые свойства радикальных групп будут отмечены позднее, а сейчас речь пойдет о полупростоте.

Группу G условимся называть *F-полупростой группой* (полупростой по Фиттингу), если в G имеется нетривиальный вполне приводимый радикал, централизатор которого равен единице. Такие группы были выделены П. А. Гольбергом в работе [1], посвященной обобщениям результатов Фиттинга. Легко проверяется (см., например, Б. И. Плоткин [7]), что группа G тогда и только тогда F-полупроста, когда для каждого неединичного нормального делителя $H \subset G$ радикал $B(H)$ не равен единице. Всякая F-полупростая группа полупроста, но обратное, к сожалению, не всегда верно. Мы говорим «к сожалению», так как F-полупростые группы допускают хорошее описание, сводящее их рассмотрение к простым группам и группам автоморфизмов вполне

приводимых групп без центра. Напомним, что такие группы автоморфизмов рассматривались в п. 3.2.4; теория этих групп сводится к теории групп автоморфизмов простых групп. В конечных группах F-полупростота и полупростота — это одно и то же, и описание таких групп, полученное Фиттингом, приводится в книге А. Г. Куроша [3]. На общий случай F-полупростоты конструкция Фиттинга обобщена П. А. Гольбергом. Одной из интересных задач, относящихся к бесконечным группам, является выявление случаев, при которых полупростота и F-полупростота — равносильные понятия.

Условимся дальше группу G называть *W-группой*, если в G имеется возрастающий нормальный ряд, все факторы которого локально нильпотентны или F-полупросты. Класс W-групп является довольно широким классом групп, причем на такие группы переносятся наиболее существенные части фиттинговой структурной теории конечных групп. Радикальные группы являются, конечно, W-группами. Приведем некоторые другие примеры W-групп.

1. Если группа обладает возрастающим нормальным рядом с конечными или локально нильпотентными факторами, то такая группа является W-группой.

2. Группа, удовлетворяющая условию минимальности для убывающих нормальных цепочек, является W-группой.

Оба эти класса охватываются следующим.

3. Если группа обладает возрастающим нормальным рядом с простыми или локально нильпотентными факторами, то такая группа есть W-группа.

Для нас здесь важна следующая теорема:

2.1. *Полупростая W-группа является F-полупростой группой. Группа G тогда и только тогда является W-группой, когда она является расширением радикальной группы с помощью F-полупростой группы.*

Пусть G — полупростая W-группа и пусть

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\gamma = G$$

— ее возрастающий нормальный ряд, все факторы которого F-полупростые или локально нильпотентные группы. H_1 — F-полупростая некоммутативная группа, так

как если бы H_1 была локально нильпотентной, она содержалась бы в нетривиальном радикале $R(G)$, что противоречило бы полупростоте группы.

Используя теорему 1.2, мы заключаем, что $B(H_1) \subset B(G) \neq E$.

Покажем, что $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(B(G)) = E$. Пусть $\mathfrak{z} \neq E$ и пусть α — первый порядковый номер, такой, что $\mathfrak{z} \cap H_\alpha \neq E$. Ясно, что число $\alpha - 1$ существует и $\mathfrak{z} \cap H_\alpha = E$.

Подгруппа $H_{\alpha-1}(\mathfrak{z} \cap H_\alpha)$ является нормальным делителем в H_α, расположенным между $H_{\alpha-1}$ и H_α. Легко также видеть, что подгруппа $\mathfrak{z} \cap H_\alpha$ субинвариантна в $\mathfrak{z}$. Дальше, пользуясь теоремой об изоморфизмах, получим:

$$\mathfrak{z} \cap H_\alpha \approx (\mathfrak{z} \cap H_\alpha) H_{\alpha-1}/H_{\alpha-1}.$$

Пусть теперь $H_\alpha/H_{\alpha-1}$ — F-полупростая группа. В этом случае $\mathfrak{z} \cap H_\alpha$ также является F-полупростой группой. Так как эта подгруппа субинвариантна в $\mathfrak{z}$, то $B(\mathfrak{z}) \neq E$. Но последняя подгруппа содержится в $B(G)$. Это противоречит тому, что пересечение $\mathfrak{z} \cap B(G)$ должно совпадать с единицей (ибо $B(G)$ не имеет центра).

Если теперь $H_\alpha/H_{\alpha-1}$ — локально нильпотентная группа, то и $\mathfrak{z} \cap H_\alpha$ — локально нильпотентная группа. Так как эта подгруппа субинвариантна в $\mathfrak{z}$, то и $R(\mathfrak{z}) \neq E$. Но тогда и сама группа G обладает нетривиальным радикалом $R(G)$. Снова противоречие. Остается заключить, что $\mathfrak{z} = E$.

Пусть теперь G — произвольная W-группа и пусть $\tilde{R}(G)$ — ее верхний радикал. Тогда $\tilde{R}(G)$ — радикальная группа и $G/\tilde{R}(G)$ — полупростая W-группа. По предыдущему, эта фактор-группа является F-полупростой. Остальное очевидно, и теорема доказана.

Легко видеть, что инвариантная подгруппа W-группы также является W-группой и расширение W-группы с помощью W-группы есть снова W-группа.

Из определений следует, что теория W-групп зависит от теории простых групп. С другой стороны, как уже отмечалось, в бесконечном случае мы имеем три существенно различных типа простоты: обычная простота, строгая простота и абсолютная простота. Для каждого из этих типов простоты можно было бы определять

свои «W-группы». При этом было бы интересно знать, в каких случаях обычная простота влечет строгую простоту или даже абсолютную простоту. Очень большой интерес представляет рассмотрение условий, при которых простота группы влечет ее конечность. Что касается конечных простых групп, то в последнее время здесь получены важные результаты. В частности, для некоторых конкретных простых групп найдена абстрактная характеристика.

3. Одна теорема об изоморфизмах рядов. Опираясь на рассмотрения этого параграфа, докажем здесь одну теорему типа Жордана — Гельдера. Пусть задано представление некоторой группы Г автоморфизмами группы G. По поводу этого представления мы допустим, что проекция Г относительно G инвариантна относительно внутренних автоморфизмов. Группу G теперь будем рассматривать как Ω-группу с $\Omega = \Gamma$. Будем ее называть Г-группой. Легко видеть, что при этом идеалы — это Г-допустимые нормальные делители, абелева группа G является также абелевой Г-группой, центр в G — это также и центр Г-группы G. Пусть, далее, G — Г-группа и H — ее Г-подгруппа. Тогда, если H обладает одним из следующих свойств: а) является RN^*-Г-группой или б) является простой Г-группой, то и всякая сопряженная с H подгруппа является Г-подгруппой, и для нее сохраняется соответствующее свойство.

Опираясь на эти утверждения, можно заметить, что доказанная ранее теорема 2.1.2 сохраняется и для Г-групп, если в качестве θ взять свойство группы быть RN^*-группой. Для Г-групп полностью имеют силу и рассмотрения из п. 3.1, относящиеся к вполне приводимому радикалу. При этом каждый раз под подгруппой нужно, конечно, понимать Г-подгруппу.

Кроме того, в дальнейшем будет предполагаться, что представление группы Г относительно G является локально ограниченным. Такое ограничение понадобится по следующим соображениям. Нам придется рассматривать простые RN^*-Г-группы. При указанном ограничении такие группы оказываются строго простыми. Действительно, если RN^*-Г-группа G является простой, то она

должна быть локально нильпотентной. Согласно теореме 3.3.5.1 при нашем ограничении в G имеется центральная система из Г-допустимых подгрупп. Это возможно лишь в том случае, когда G — абелева Г-группа. Такая Г-группа является строго простой.

Теперь сформулируем теорему.

3.1. *Если в Г-группе G имеются возрастающие нормальные ряды с простыми факторами, то любые два таких ряда изоморфны.*

Эта теорема не следует из соответствующей теоремы А. Г. Куроша (см. п. 1.2.3), так как в силу результата Ф. Холла простые факторы ряда могут не быть строго простыми.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма:

3.2. *Если в Г-группе G имеется возрастающий нормальный ряд, все факторы которого либо абелевы, либо простые неабелевы Г-группы, то в G имеется и инвариантный ряд, факторы которого либо вполне приводимые Г-группы без центра, либо RN^*-Г-группы.*

Допустим, что ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\gamma = G \qquad (1)$$

удовлетворяет условиям леммы. Если A_1 — абелева Г-подгруппа, то эта подгруппа содержится в RN^*-радикале всей Г-группы, и этот RN^*-радикал мы обозначим через B_1. Если же A_1 — простая Г-подгруппа, то она принадлежит вполне приводимому радикалу, и в данном случае B_1 — этот радикал. Если уже определены B_α при всех $\alpha < \beta$, то для предельного β B_β есть объединение всех предыдущих B_α, а для непредельного β поступаем следующим образом. В фактор-группе $G/B_{\beta-1}$ имеется ряд такого же типа, как и ряд (1). Следовательно, если RN^*-радикал этой фактор-группы равен единице, то там есть нетривиальный вполне приводимый радикал. Тогда в качестве B_β возьмем Г-подгруппу, для которой $B_\beta/B_{\beta-1}$ — не равный единице вполне приводимый радикал или RN^*-радикал в $G/B_{\beta-1}$, если он не равен единице. Так будет построен инвариантный ряд

$$E = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_\beta \subset B_{\beta+1} \subset \ldots \subset B_\nu = G, \qquad (2)$$

доходящий до G и удовлетворяющий нужным условиям.

Теперь будем доказывать теорему 3.1.

Если в Г-группе G имеются возрастающие нормальные ряды с простыми факторами, то согласно лемме в G имеются и ряды типа (2). Фиксируем один такой ряд, и пусть это будет ряд (2). Дальше доказательство разобьем на три этапа.

1. Покажем, что если два возрастающих нормальных ряда $[H_\alpha]$ и $[F_\beta]$ являются уплотнениями ряда (2), то такие ряды изоморфны. Чтобы доказать это утверждение, очевидно, достаточно проверить следующие два свойства:

а) Если в RN^*-Г-группе заданы два возрастающих нормальных ряда с простыми факторами, то такие ряды изоморфны.

б) Если во вполне приводимой Г-группе без центра имеются два возрастающих нормальных ряда с простыми факторами, то такие ряды также изоморфны.

Утверждение а) непосредственно вытекает из теоремы А. Г. Куроша, так как простые RN^*-Г-группы в нашем случае оказываются строго простыми.

Докажем утверждение б).

Пусть A — вполне приводимая Г-группа и пусть

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\gamma = A$$

— некоторый возрастающий нормальный ряд с простыми факторами в A. Покажем, что этот ряд является инвариантным и что между его факторами и простыми прямыми множителями в A можно так установить взаимно однозначное соответствие, что сопоставляемые группы окажутся изоморфными. Действительно, то что A_1 — нормальный делитель в A — это прямое следствие рассмотрений п. 3.1. A/A_1 — снова вполне приводимая Г-группа. Отсюда A_2/A_1 — простая некоммутативная Г-группа и A_2 — нормальный делитель в A. Инвариантность любого A_α $(\alpha < \gamma)$ доказывается теперь по индукции.

Из инвариантности A_α и $A_{\alpha+1}$ в A вытекает, что обе эти подгруппы являются прямыми произведениями некоторых простых множителей из A. Пусть C_α — такой простой прямой множитель в A, что $A_{\alpha+1} = A_\alpha \times C_\alpha$.

C_α поставим в соответствие фактору $A_{\alpha+1}/A_\alpha$. Такое соответствие взаимно однозначно, и $A_{\alpha+1}/A_\alpha \approx C_\alpha$.

Утверждение б) теперь является непосредственным следствием доказанного свойства, так как разложение вполне приводимой Г-группы без центра на простые прямые множители единственно.

2. Пусть в Г-группе G задан некоторый возрастающий нормальный ряд с простыми факторами:

$$E = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_\mu = G. \tag{3}$$

Покажем, что этот ряд изоморфен некоторому уплотнению ряда (2).

Построим изоморфные уплотнения рядов (2) и (3) по методу Куроша—Цасенхауза. Обозначим:

$$B_{\alpha\beta} = B_\alpha (B_{\alpha+1} \cap F_\beta), \quad F_{\beta\alpha} = F_\beta (F_{\beta+1} \cap B_\alpha).$$

Тогда $B_{\alpha,\,\beta+1}/B_{\alpha\beta} \approx F_{\beta,\,\alpha+1}/F_{\beta\alpha}$, и ряды $[B_{\alpha\beta}]$ и $[F_{\beta\alpha}]$ становятся изоморфными после удаления повторений.

Покажем теперь, что если $F_{\beta\alpha} \neq F_{\beta,\,\alpha+1}$, то $F_{\beta,\,\alpha+1}/F_{\beta\alpha} = F_{\beta+1}/F_\beta$.

Действительно, так как B_α — нормальный делитель в G, то или $F_{\beta\alpha} = F_{\beta+1}$ или $F_{\beta\alpha} = F_\beta$ (так как фактор $F_{\beta+1}/F_\beta$ — простой). То же самое можно сказать и относительно $F_{\beta,\,\alpha+1}$. Отсюда, если $F_{\beta\alpha} \neq F_{\beta,\,\alpha+1}$, то $F_{\beta\alpha} = F_\beta$, $F_{\beta,\alpha+1} = F_{\beta+1}$ и $F_{\beta,\,\alpha+1}/F_{\beta\alpha} = F_{\beta+1}/F_\beta$.

Другими словами, ряд (3) остается без изменения, и следовательно, он изоморфен некоторому уплотнению ряда (2).

3. Пусть теперь в G имеются два возрастающих нормальных ряда с простыми факторами: один из них — ряд (3), а другой условно обозначим (4). Согласно предыдущему найдутся такие ряды (3′) и (4′), что ряд (3) изоморфен ряду (3′), ряд (4) изоморфен ряду (4′), и оба ряда (3′) и (4′) являются уплотнениями ряда (2). Согласно п. 1 доказательства теоремы, ряды (3′) и (4′) изоморфны между собой; но тогда и ряды (3) и (4) изоморфны.

Теорема доказана.

Если в этой теореме обходиться без действующей группы Г, то теорема превращается в утверждение отно-

сительно абстрактных групп, приводившееся в работе Б. И. Плоткина [4].

4. Нормальные делители, ограничивающие группу. Как уже отмечалось, нормальный делитель H группы G ограничивает группу, если H содержит свой централизатор. Значение этого понятия состоит в следующем.

Если H содержит свой централизатор, то этот централизатор совпадает с центром $Z(H)$ группы H. С другой стороны, фактор-группа $G/\mathfrak{z}(H)$ может рассматриваться как группа автоморфизмов группы H. Таким образом, группа G оказывается расширением центра H с помощью некоторой группы автоморфизмов той же H. Это значит, что свойства всей группы G в значительной степени могут познаваться через свойства ее подгруппы H. Так, например, если группа G ограничена конечным нормальным делителем, то, очевидно, она сама конечна.

Еще больше влияют на группу нормальные делители H со следующим свойством: пусть в H задан некоторый возрастающий ряд нормальных делителей группы G

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = H. \quad (1)$$

В соответствии с п. 3.1.3 *централизатором* $\mathfrak{z}\ [H_\alpha]$ этого ряда называется нормальный делитель, совпадающий с совокупностью всех элементов x из G таких, что если $a \in H_{\alpha+1}$, то $[a, x] \in H_\alpha$ для всех $\alpha < \gamma$. Будем говорить, что нормальный делитель H *сильно ограничивает группу* G, если H содержит централизатор всякого своего ряда вида (1). Легко понять, что если нормальный делитель H сильно ограничивает группу G и ряд $[H_\alpha]$ есть ряд вида (1) в H, то группа G является расширением группы с центральным рядом, лежащей в H, с помощью подпрямого произведения групп автоморфизмов факторов ряда $[H_\alpha]$.

В связи с этим представляет интерес выявление в группах различных нормальных делителей, ограничивающих или сильно ограничивающих группу. В настоящем пункте мы приведем некоторые признаки таких нормальных делителей.

Приведем примеры.

1) Произвольная группа, обладающая возрастающим центральным рядом (ZA-группа), ограничена любым своим максимальным абелевым нормальным делителем (С. Н. Черников).

2) Группа, обладающая возрастающим инвариантным разрешимым рядом (RI^*-группа), ограничена любым своим максимальным метабелевым нормальным делителем (Д. М. Смирнов).

3) Радикальная группа сильно ограничена своим радикалом $R(G)$, (Б. И. Плоткин).

Доказательства этих фактов будут вытекать также из приводимых ниже общих теорем 4.1 и 4.3. Используя эти теоремы, мы приведем ряд других примеров.

Пусть, как и раньше, θ обозначает абстрактное теоретико-групповое свойство. В дальнейшем будут рассматриваться следующие ограничения, накладываемые на классы θ-групп:

a) Каждая подгруппа θ-группы снова является θ-группой.

a′) Каждый нормальный делитель θ-группы также является θ-группой.

b) Гомоморфный образ θ-группы также является θ-группой.

c) В произвольной группе произведение инвариантной θ-подгруппы на произвольную θ-подгруппу является θ-подгруппой.

cz) В произвольной группе произведение поэлементно перестановочных инвариантных θ-подгрупп снова является θ-подгруппой.

cz*) Пусть G — произвольная группа, A и B — ее инвариантные θ-подгруппы и пусть в одной из этих подгрупп, например в A, имеется ряд вида (1), такой, что другая подгруппа (B) принадлежит централизатору этого ряда. Тогда AB — θ-группа.

d) В классе θ имеет место локальная теорема ($\theta = L\theta$).

d′) Если группа G обладает локальной системой из инвариантных θ-подгрупп, то G есть θ-группа.

e) Расширение θ-группы с помощью θ-группы снова является θ-группой.

ez) Центральное расширение θ-группы с помощью θ-группы также является θ-группой.

ez*) Гиперцентральное расширение θ-группы с помощью θ-группы также является θ-группой.

При этом группа G называется *центральным расширением своего нормального делителя* H, если H содержится в центре группы G. G называется *гиперцентральным расширением* H, если H содержится в верхнем гиперцентре группы G, т. е. если в H имеется ряд вида (1), такой, что централизатор этого ряда совпадает со всей группой. В дальнейшем для краткости мы используем следующие определения.

Свойство θ будем называть *x-свойством*, если в классе θ-групп выполняются требования a′), cz) и d′). θ будем называть *x'-свойством*, если θ — x-свойство и в классе θ-групп выполняется требование ez).

Свойство θ назовем *y-свойством*, если класс θ-групп удовлетворяет требованиям a′), cz*) и d′). θ назовем *y'-свойством*, если θ — y-свойство, удовлетворяющее требованию ez*).

Всякое y-свойство является x-свойством. Если θ — x-свойство, то во всякой группе G произвольная инвариантная θ-подгруппа из G содержится в некоторой максимальной инвариантной θ-подгруппе из G. В общем случае такая максимальная θ-подгруппа может быть не единственной.

Легко видеть, что используя терминологию Б. Неймана, можно было бы еще условие cz) записать так: прямое произведение с объединенной подгруппой двух θ-групп снова является θ-группой.

Отметим также, что если класс θ-групп удовлетворяет условию в), то требование cz) можно заменить следующим более слабым требованием: прямое произведение двух θ-групп снова является θ-группой.

Действительно, если H и F — две инвариантные перестановочные поэлементно θ-подгруппы некоторой группы G, то подгруппа $\{H, F\}$ является гомоморфным образом прямого произведения групп H и F.

4.1. *Пусть θ — x-свойство и θ_1 — такое теоретико-групповое свойство, что класс θ_1-групп удовлетворяет условию* a′) *и центральное расширение θ-группы с помощью θ_1-группы является θ-группой. Тогда, если группа G обладает возрастающим инвариантным рядом, все*

факторы которого — θ_1*-группы* ($\theta_1 I^*$*-группа*), *то* G *ограничена каждой своей максимальной инвариантной* θ*-подгруппой.*

Мы приведем обычные в таких случаях рассуждения. Пусть θ и θ_1 удовлетворяют условиям теоремы и пусть в группе G имеется возрастающий инвариантный ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G, \quad (2)$$

все факторы которого являются θ_1-группами. Пусть, далее, H — произвольная максимальная инвариантная θ-подгруппа в G, и $\mathfrak{z}(H)$ — централизатор H. Используя пересечения $\mathfrak{z}(H)$ с членами ряда (2) и учитывая требование a′) для θ_1, мы можем построить в $\mathfrak{z}(H)$ возрастающий ряд нормальных делителей группы G

$$E = \mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{z}_\alpha \subset \mathfrak{z}_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{z}_\mu = \mathfrak{z}(H),$$

все факторы которого являются θ_1-группами.

Допустим, что $\mathfrak{z}(H) \not\subset H$. Тогда найдется такое $\alpha < \mu$, что $\mathfrak{z}_\alpha \subset H$ и $\mathfrak{z}_{\alpha+1} \not\subset H$. Так как $\mathfrak{z}_\alpha \subset H$, то $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ является центральным расширением θ-группы $\mathfrak{z}_\alpha$ с помощью θ_1-группы. Отсюда $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ — θ-группа, причем инвариантная в G. Так как H и $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ поэлементно перестановочны, то $\{H, \mathfrak{z}_{\alpha+1}\}$ — снова θ-группа. Мы получили противоречие с тем, что H — максимальная инвариантная θ-подгруппа в G. Отсюда $\mathfrak{z}_{\alpha+1} \subset H$ и поэтому $\mathfrak{z}(H) \subset H$, что и требовалось доказать.

Если в приведенной теореме за свойство θ взять свойство быть абелевой группой, а за θ_1 — свойство быть циклической группой, то ясно, что все требования будут выполнены, и мы получаем доказательство утверждения, содержащегося в примере 1) (так как всякая ZA-группа обладает возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами).

Свойство группы быть нильпотентной класса $\leqslant n$, как нетрудно видеть, является x-свойством. (Легко видеть, что если Λ — некоторая система тождественных соотношений, то свойство группы удовлетворять системе соотношений Λ является x-свойством.) Если теперь за θ принять свойство группы быть метабелевой группой, а за θ_1 — свойство группы быть коммутативной группой, то мы получаем утверждение, содержащееся в примере 2).

Из теоремы 4.1 получаем еще такое следствие:

4.2. *Если θ — x'-свойство и группа G является θI^*-группой, то G ограничена каждой своей максимальной инвариантной θ-подгруппой.*

Примером x'-свойства является свойство группы быть локально нильпотентной группой. Отсюда получается теорема о том, что радикальная группа ограничена своим радикалом. Примером x'-свойства является также свойство быть локально разрешимой группой.

4.3. *Пусть θ — y-свойство и пусть θ_1 — такое свойство, что для θ_1 выполнено условие a'), и гиперцентральное расширение θ-группы с помощью θ_1-группы является θ-группой. Тогда если группа G является $\theta_1 I^*$-группой, то G сильно ограничена каждой своей максимальной инвариантной θ-подгруппой.*

Пусть θ, θ_1 и G удовлетворяют условиям теоремы и H — максимальная инвариантная θ-подгруппа в G. Пусть еще в H задан некоторый возрастающий ряд нормальных делителей группы G:

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\beta \subset H_{\beta+1} \subset \ldots \subset H_\nu = H,$$

и пусть $\mathfrak{z}[H_\beta]$ — централизатор этого ряда. Как и в теореме 4.1, можно утверждать, что в $\mathfrak{z}[H_\beta]$ имеется возрастающий ряд нормальных делителей группы G:

$$E = \mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{z}_\alpha \subset \mathfrak{z}_{\alpha+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{z}_\mu = \mathfrak{z}[H_\beta],$$

все факторы которого являются θ_1-группами. Допустим, что $\mathfrak{z}[H_\beta] \not\subset H$, и пусть $\mathfrak{z}_\alpha \subset H$, но $\mathfrak{z}_{\alpha+1} \not\subset H$.

Рассмотрим в $\mathfrak{z}_\alpha$ ряд, составленный из пересечений $\mathfrak{z}_\alpha \cap H_\beta$ по всем $\beta < \nu$. Этот ряд является гиперцентральным в $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ является гиперцентральным расширением θ-группы $\mathfrak{z}_\alpha$ с помощью θ_1-группы. Но тогда $\mathfrak{z}_{\alpha+1}$ является инвариантной θ-подгруппой в G, принадлежащей притом централизатору некоторого ряда в H. Так как θ — y-свойство, то отсюда следует, что $\{H, \mathfrak{z}_{\alpha+1}\}$ является θ-группой. Мы получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{z}[H_\beta] \subset H$.

Из теоремы, в частности, получаем, что если θ — y'-свойство, то произвольная θI^*-группа сильно ограничена всякой своей максимальной инвариантной θ-подгруппой.

Простым примером y'-свойства является свойство группы быть локально нильпотентной. Отсюда непосредственно следует утверждение о том, что радикальная группа сильно ограничена своим радикалом.

4. 4 *Пусть* θ — *абстрактное теоретико-групповое свойство, удовлетворяющее требованиям* а) *и* с). *Тогда свойство* $L\theta$ *является* y-*свойством.*

$L\theta$ — это свойство группы обладать локальной системой из θ-подгрупп. Очевидно, $L\theta$ удовлетворяет условиям а) и d). Остается проверить выполнение условия cz*).

Пусть H и F — две инвариантные $L\theta$-подгруппы в группе G, и θ удовлетворяет условиям теоремы. Допустим еще, что F принадлежит централизатору некоторого возрастающего инвариантного в G ряда в H. Тогда любое конечное множество элементов из F индуцирует нильмножество и, следовательно, ограниченное множество автоморфизмов в H. Дословным повторением доказательства теоремы 2.2.2 можно показать, что отсюда следует, что $\{H, F\}$ — $L\theta$-группа.

Из доказанной теоремы вытекает, что такие свойства, как локальная разрешимость и локальная радикальность группы являются y-свойствами. Легко видеть также, что локальная радикальность является y'-свойством.

В заключение заметим, что к настоящему времени теория радикалов в группах и связанное с ней рассмотрение абстрактных теоретико-групповых свойств и функций приобретают все большее значение в теории групп. Однако подробное изложение всех относящихся сюда результатов не входило в нашу задачу. См. еще список литературы.

§ 4. НИЛЬЭЛЕМЕНТЫ В ГРУППАХ. ПРИМЕРЫ

1. Локально нильпотентный радикал и нильэлементы. *Нильэлемент* группы — это такой элемент, которому отвечает внутренний автоморфизм, являющийся нильавтоморфизмом. Подробнее это означает следующее. Пусть $x = [x, g, 0]$, $[x, g, 1] = [x, g] = x^{-1}g^{-1}xg, \ldots$, $[x, g, n] = [[x, g, n-1], g]$. Элемент g есть нильэлемент в группе G, если при любом $x \in G$ найдется такой по-

казатель $n=n(x, g)$, что $[x, g, n]=e$, где e — единица в G.

Легко видеть, что каждый элемент группы, принадлежащий ее локально нильпотентному радикалу, является нильэлементом. Как показал недавно Е. С. Голод [1] — его пример будет приведен в этом параграфе, — обратное не всегда верно. В этом пункте будет доказано, что если группа G обладает возрастающим нормальным рядом с локально нетеровыми факторами, то $R(G)$ — это в точности множество всех нильэлементов группы, так что в таких группах нильэлементы и локально субинвариантные элементы — это одно и то же. Частным случаем сформулированной сейчас теоремы является утверждение о том, что в радикальной группе радикал $R(G)$ состоит из всех нильэлементов группы.

Мы начнем со следующей леммы:

1.1 *Пусть H — нильпотентная с конечным числом образующих подгруппа группы G, порожденная некоторым фиксированным множеством $E(H)$ нильэлементов из G. Тогда, если H не является нормальным делителем в G, то в нормализаторе H имеется элемент, сопряженный некоторому элементу из $E(H)$ и не лежащий в H.*

Всюду дальше мы будем обозначать через $N(H)$ нормализатор подгруппы H. Элементы, сопряженные элементам из $E(H)$, мы будем называть E-элементами. Если F — некоторая подгруппа в G, то через $D(F)$ мы будем обозначать подгруппу, порожденную всеми E-элементами, лежащими в F. Доказательство леммы разобьем на три этапа.

1. Вначале рассмотрим случай, когда H — конечная циклическая подгруппа простого порядка, порожденная нильэлементом g.

Так как H не инвариантна в G, и g — нильэлемент, то вне $N(H)$ найдется такой элемент x, что $[x, g] \in N(H)$. Вместе с элементом $[x, g]$ в $N(H)$ содержится и элемент $x^{-1}gx$. Этот элемент не может принадлежать H, так как в противном случае x принадлежал бы нормализатору H (H — циклическая группа простого порядка!). Случай 1 рассмотрен.

2. Теперь рассмотрим случай, когда H — конечная группа произвольного порядка. Применим индукцию по порядку подгруппы H. Для подгрупп простого порядка лемма доказана. Будем предполагать, что порядок H равен n и что для меньших порядков лемма доказана.

Пусть $g \in E(H)$ и пусть x — такой элемент вне $N(H)$, что $x^{-1}gx \in N(H)$. Если $x^{-1}gx$ не лежит в H, то соответствующий элемент найден. Пусть $x^{-1}gx \in H$. Тогда $x^{-1}gx \in H \cap x^{-1}Hx$. Так как H — конечная группа и так как x не принадлежит нормализатору H, то можно считать, что пересечение $H \cap x^{-1}Hx$ отлично как от H, так и от $x^{-1}Hx$.

Обозначим $D_1 = D(H \cap x^{-1}Hx)$. Подгруппа D_1 отлична от единицы, так как в ней содержится элемент $x^{-1}gx$. Покажем, что в каждой группе H и $x^{-1}Hx$ имеются E-элементы нормализатора D_1, не лежащие в D_1. Пусть F — одна из подгрупп H или $x^{-1}Hx$. F нильпотентна, порождается E-элементами и содержит D_1 в качестве собственной подгруппы. Если D_1 инвариантна в F, то, поскольку F порождается E-элементами, соответствующее утверждение очевидно. Если D_1 не инвариантна в F, то возьмем элемент $y \in F$, не принадлежащий $N(D_1)$, но принадлежащий $N(N(D_1))$ (нормализаторы берутся в F). Такой y найдется, так как F — нильпотентная группа. Так как y не принадлежит $N(D_1)$, то для некоторого E-элемента $g \in D_1$ элемент $y^{-1}gy$ не принадлежит D_1. Но этот элемент принадлежит $N(D_1)$, так как $y \in N(N(D_1))$. Таким образом, в подгруппе F имеются E-элементы нормализатора D_1, не лежащие в D_1.

Отсюда следует, что, во-первых, подгруппа $D_2 = D(N(D_1) \cap H)$ строго больше, чем D_1, и, во-вторых, что в $N(D_1)$ есть E-элементы, не лежащие в H, — все E-элементы из $x^{-1}Hx \cap N(D_1)$, лежащие в H, лежат и в D_1.

Пусть уже построена последовательность подгрупп $D_1, D_2, \ldots, D_k$, таких, что

а) D_k строго меньше H,

б) в нормализаторе D_k есть E-элементы, не лежащие в H,

в) D_k порождается E-элементами.

Определим подгруппу D_{k+1} следующим образом:

$$D_{k+1} = D(N(D_k) \cap H). \quad D_{k+1} \supset D_k.$$

Пусть $D_{k+1} \neq H$. Покажем, что в $N(D_{k+1})$ есть E-элементы, не лежащие в H.

Будем рассматривать D_{k+1} как подгруппу в $N(D_k)$. Если D_{k+1} инвариантна в $N(D_k)$, то все E-элементы из $N(D_k)$ лежат и в $N(D_{k+1})$. Среди них имеются и не лежащие в H. Пусть D_{k+1} не инвариантна в $N(D_k)$. Подгруппа D_{k+1} нильпотентна, порождается некоторым множеством E-элементов — все эти элементы являются нильэлементами — и имеет порядок, меньший n. Применяя предположение индукции, мы можем утверждать, что в $N(D_k)$ имеются E-элементы из нормализатора D_{k+1}, не лежащие в D_{k+1}. Эти элементы не лежат и в H. Продолжая построения, мы дойдем до подгруппы D_{s+1}, равной H. Тогда D_s инвариантна в H и в $N(D_s)$ имеются E-элементы, не лежащие в H. Если H инвариантна в $N(D_s)$, то эти элементы лежат и в $N(H)$. Пусть H не инвариантна в $N(D_s)$. Рассмотрим подгруппу $\bar{H} = H/D_s$ в группе $\bar{N} = N(D_s)/D_s$. $\bar{H}$ нильпотентна, имеет порядок, меньший n, и не инвариантна в $\bar{N}$. Элементы вида $g_\alpha D_s = \bar{g}_\alpha$, где $g_\alpha \in E(H)$ и $g_\alpha \bar{\in} D_s$, составляют некоторую систему нильэлементов в $\bar{N}$, порождающих $\bar{H}$.

Применяя к этой системе предположение индукции, можно утверждать, что для некоторого $\bar{y}$ из $\bar{N}$ и для некоторого $\bar{g}_\alpha$ элемент $\bar{y}^{-1}\bar{g}_\alpha\bar{y}$ принадлежит нормализатору $\bar{H}$ в $\bar{N}$ и не принадлежит $\bar{H}$. Тогда, если $\bar{y} = yD_s$, где y — произвольный представитель смежного класса, то $y^{-1}g_\alpha y$ есть E-элемент, принадлежащий нормализатору H и не принадлежащий H. Случай, когда H — конечная группа, разобран.

3. При рассмотрении общего случая мы используем понятие приведенного ранга нильпотентной группы. *Приведенным рангом нильпотентной группы* называется рациональный (или, что то же самое, специальный) ранг фактор-группы этой группы по ее периодической части. Будем обозначать приведенный ранг группы G через $r(G)$. $r(G)$ — это также сумма рангов факторов верхнего центрального ряда фактор-группы G по ее

периодической части. Напомним некоторые известные свойства приведенного ранга.

Приведенный ранг группы тогда и только тогда равен нулю, когда группа периодическая. Приведенный ранг подгруппы не превосходит приведенный ранг группы. Если G — нильпотентная группа конечного приведенного ранга и H — ее подгруппа, такая, что $r(H)=r(G)$, то некоторая степень каждого элемента из G попадает в H. Если при этом G удовлетворяет еще условию максимальности, то H имеет в G конечный индекс. Если H — произвольный нормальный делитель в G, то $r(G)=r(H)+r(G/H)$.

Переходим к доказательству леммы в общем случае. Так как подгруппа H нильпотентна и имеет конечное число образующих, то H удовлетворяет условию максимальности и имеет конечный приведенный ранг. Если $r(H)=0$, то H конечна, и этот случай уже рассмотрен. Пусть $r(H)=n$ и пусть для меньшего приведенного ранга утверждение леммы уже доказано.

Пусть g — элемент бесконечного порядка из $E(H)$ и пусть x — такой элемент из G, что $x \bar{\in} N(H)$ и $x^{-1}gx \in N(H)$. Сразу переходим к случаю, когда $x^{-1}gx \bar{\in} H$. В этом случае $x^{-1}gx \bar{\in} H \cap x^{-1}Hx$. Так как обе подгруппы H и $x^{-1}Hx$ нильпотентны, то можно считать, что это пересечение отлично как от H, так и от $x^{-1}Hx$.

Обозначим $D_1=D(H \cap x^{-1}Hx)$. Так как $x^{-1}gx$ — элемент бесконечного порядка в D_1, то $r(D_1)>0$. Как и выше, доказывается, что в $N(D_1)$ имеются E-элементы, не лежащие в H, и что $D_2=D(N(D_1) \cap H)$ — подгруппа, строго большая, чем D_1. Рассмотрим теперь следующий случай:

а) $r(D_1)=n$.

В этом случае D_1 имеет конечный индекс в H и фактор-группа D_2/D_1 конечна. Рассматривая подгруппу D_2/D_1 в группе $N(D_1)/D_1$ и применяя результат из п. 2 доказательства, как и в заключении этого пункта, мы получаем, что в $N(D_1)$ имеются E-элементы, принадлежащие $N(D_2)$ и не принадлежащие D_2 и, следовательно, не принадлежащие H. Продолжая построения, в силу условия максимальности в H, мы дойдем до такой подгруппы D_k, что D_k инвариантна

в H и в $N(D_k)$ найдутся E-элементы, не лежащие в H. Используя конечную подгруппу H/D_k в фактор-группе $N(D_k)/D_k$, как и в п. 2, мы докажем, что в $N(H)$ имеются E-элементы, не лежащие в H.

Пусть теперь имеет место случай

б) $r(D_1) < n$.

Как и раньше, строим подгруппы $D_1, D_2, \ldots, D_k$, и пусть $r(D_k) < n$ и в $N(D_k)$ имеются E-элементы, не лежащие в H. Рассмотрим подгруппу $D_{k+1} = D(N(D_k) \cap H)$. Если $r(D_{k+1}) < n$, то наличие в $N(D_{k+1})$ E-элементов, не лежащих в H, устанавливается при помощи предположения индукции (см. п. 2). Если $r(D_{k+1}) = n$, то этот же факт устанавливается переходом к фактор-группе $N(D_k)/D_k$ и ее подгруппе D_{k+1}/D_k, имеющей ранг, меньший n (ибо $r(D_k) > 0$).

Пусть теперь $r(D_k) = n$. В этом случае переход к D_{k+1} осуществляется так же, как и в случае а). Таким образом, и в случае б) мы доберемся (ввиду условия максимальности в H) до инвариантной в H подгруппы D_s, такой, что в $N(D_s)$ имеются E-элементы, не лежащие в H. Доказательство леммы завершается теперь переходом к фактор-группе $N(D_s)/D_s$ и ее подгруппе H/D_s, как и в п. 2.

Теперь докажем лемму.

1.2. *Если в группе G имеются локально нильпотентный нормальный делитель H и нильэлемент g, порождающие всю группу G, то и G — локально нильпотентная группа.*

Группа G обладает локальной системой из подгрупп вида $\{H_\alpha, g\}$, где H_α — инвариантная относительно элемента g подгруппа в H с конечным числом образующих, так что для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда H — подгруппа с конечным числом образующих. Пусть

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = H$$

— верхний центральный ряд в H. В каждом факторе H_{i+1}/H_i этого ряда элемент g индуцирует нильавтоморфизм. Поэтому указанный центральный ряд можно уплотнить до $\hat{g}$-стабильного ряда*). Такой ряд будет уже центральным в $\{H, g\}$.

*) Здесь через $\hat{g}$ обозначен внутренний автоморфизм, порожденный элементом g.

Следующая лемма является основной.

1.3. *Пусть g — нильэлемент в произвольной группе G и пусть подгруппа $H_1 = \{g\}$ не инвариантна в G. Тогда существует последовательность подгрупп (возможно, конечная)*

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) *все H_i — нильпотентные группы,*

2) *H_i — нормальный делитель в H_{i+1},*

3) *$H_{i+1} = \{H_i, x_i^{-1}gx_i\}$, где $x_i^{-1}gx_i$ — элемент, сопряженный элементу g и не лежащий в H_i,*

4) *если H_n не инвариантна в G, то существует H_{n+1}. (Если же H_n инвариантна, то на этой подгруппе последовательность обрывается.)*

H_1 есть циклическая подгруппа, порожденная нильэлементом g. Пусть она не инвариантна и пусть уже построена нильпотентная подгруппа H_n, причем

$$H_n = \{g,\ x_1^{-1}gx_1,\ x_2^{-1}gx_2, \ldots,\ x_{n-1}^{-1}gx_{n-1}\}.$$

Систему образующих $g,\ x_1^{-1}gx_1, \ldots,\ x_{n-1}^{-1}gx_{n-1}$ обозначим через $E(H_n)$. Все эти элементы являются нильэлементами в G. Если H_n не инвариантна в G, то по лемме 1.1 найдется элемент $x_n^{-1}gx_n$, принадлежащий нормализатору H_n и не принадлежащий H_n. Положим $H_{n+1} = \{H_n, x_n^{-1}gx_n\}$. Подгруппа H_{n+1} нильпотентна, так как является расширением нильпотентной подгруппы с конечным числом образующих с помощью нильэлемента. Продолжая построения, мы или доберемся до инвариантной подгруппы H_m, или получим бесконечную счетную последовательность подгрупп.

Условимся в дальнейшем всякую группу G, в которой множество нильэлементов совпадает с радикалом $R(G)$, называть NR-группой.

Докажем теперь теорему:

1.4. *Если в группе G все абелевы подгруппы имеют конечное число образующих, то G является NR-группой.*

Хорошо известно (ср. также п. 8.1.1), что если в группе все абелевы подгруппы имеют конечное число образующих, то такая группа удовлетворяет условию

максимальности для нильпотентных подгрупп. Таким образом, из основной леммы вытекает, что при условиях теоремы каждый нильэлемент принадлежит нильпотентному нормальному делителю. Но тогда каждый нильэлемент принадлежит радикалу $R(G)$, что и требовалось.

Будем говорить, что группа G *удовлетворяет условию* (m), если для любого элемента g из G всякая подгруппа, порожденная некоторым множеством сопряженных с g элементов, порождается конечным подмножеством этого множества.

1.5. *Если группа удовлетворяет условию* (m), *то такая группа является* NR*-группой.*

Теорема непосредственно следует из основной леммы.

Нам понадобится еще следующая лемма:

1.6. *Если группа обладает локальной системой из* NR*-подгрупп, то такая группа сама является* NR*-группой.*

Обозначим через $R'(G)$ множество всех нильэлементов группы G. Нужно показать, что при условиях леммы $R'(G) \subset R(G)$, а для этого достаточно показать, что $R'(G)$ — локально нильпотентный нормальный делитель. Пусть g_1 и g_2 — два элемента из $R'(G)$ и $x \in G$. Покажем, что

$$[\ldots[[x, \underbrace{g_1g_2], g_1g_2], \ldots, g_1g_2}_{n \text{ раз}}] = e$$

при некотором n. Найдем в локальной системе подгрупп подгруппу G_α, содержащую элементы g_1, g_2 и x. g_1 и g_2 — нильэлементы в G_α, и поэтому они содержатся в $R(G_\alpha)$. Так как в $R(G_\alpha)$ содержится произведение g_1g_2 и все элементы из $R(G_\alpha)$ являются нильэлементами в G_α, то при некотором n

$$[x, g_1g_2, n] = e.$$

Аналогично доказывается, что при любых $g \in R'(G)$ и $x \in G$ найдется такое m, что

$$[x, g^{-1}, m] = e,$$

т. е. $g^{-1} \in R'(G)$ и $x^{-1}gx \in R'(G)$. Таким образом, $R'(G)$ — нормальный делитель. Пусть теперь M — конечное множество элементов из $R'(G)$. Найдем локальную подгруппу G_α, содержащую эти элементы. Тогда $M \subset R(G_\alpha)$, и поэ-

тому $\{M\}$ — локально нильпотентная подгруппа. Отсюда следует локальная нильпотентность инвариантной подгруппы $R'(G)$. Лемма доказана.

Из этой леммы и из теоремы 1.3 вытекает, что если в группе имеется локальная система из подгрупп с условием максимальности, то такая группа является NR-группой.

Теперь докажем основную теорему (Б. И. Плоткин [5], Р. Бер [17]).

1.7. *Если группа G обладает возрастающим нормальным рядом, все факторы которого являются LM-группами* *), *то G является NR-группой.*

Согласно теореме 2.1.4 во всякой группе, удовлетворяющей условиям теоремы, верхний LM-радикальный ряд доходит до всей группы. Длину такого ряда в G будем называть LM-длиной.

В случае, когда LM-длина G равна 1, теорема следует из приведенного выше замечания. Дальше применим индукцию по LM-длине группы. Будем предполагать, что теорема доказана для случая, когда группа имеет LM-радикальный ряд с длиной, меньшей γ, и допустим, что группа G обладает таким рядом с длиной γ. Пусть ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = G$$

является LM-радикальным рядом в G. Любой отрезок этого ряда до H_β ($\beta < \gamma$) будет LM-радикальным рядом в H_β. Отсюда следует, что при $\beta < \gamma$ все нильэлементы, лежащие в H_β, лежат в радикале $R(H_\beta)$, а поэтому и в $R(G)$.

Допустим, что существует такой нильэлемент g, который не принадлежит никакому H_β с $\beta < \gamma$. Тогда существует $\gamma - 1$. Обозначим $\gamma - 1 = \mu$ и рассмотрим случаи, когда μ — предельное и не предельное порядковое число.

1. Пусть μ — предельное число. Рассмотрим систему подгрупп $\{H_\beta, g\}$ при $\beta < \mu$. Все эти подгруппы LM-радикальны и имеют LM-длину, меньшую γ. Поэтому все они являются NR-группами. Так как подгруппы $\{H_\beta, g\}$

*) LM-группа — локально нетерова группа.

образуют локальную систему в $\{H_\mu, g\}$, то и $\{H_\mu, g\}$ является NR-группой. Отсюда $g \in R(\{H_\mu, g\})$. Обозначим через F полный прообраз в G радикала $R(G/H_\mu)$. Так как в G/H_μ радикал совпадает с множеством всех нильэлементов, то $g \in F$. Но тогда подгруппа $\{H_\mu, g\}$ локально субинвариантна в F. Отсюда

$$R(H_\mu, g) \subset R(F) \subset R(G) \subset LM(G)$$

и g принадлежит локально нетерову радикалу $LM(G)$. Получилось противоречие с тем, что $g \bar{\in} LM(G)$.

2. Пусть теперь существует $\mu - 1$. Обозначим $\bar{G} = G/H_{\mu-1}$ и $\bar{H} = H_\mu/H_{\mu-1}$. Мы предполагаем, что $\bar{g} = gH_{\mu-1} \bar{\in} \bar{H}$. Так как $\bar{g}$ — нильэлемент, то подгруппа $\{\bar{H}, \bar{g}\}$ является LM-группой, и поэтому $\bar{g} \in R(\bar{H}, \bar{g})$. Отсюда, как и выше, из того, что $\bar{g} \in R(\bar{G}/\bar{H})$, заключаем, что

$$g \in R(F) \subset R(G) \subset LM(G),$$

и снова противоречие.

Таким образом, всякий нильэлемент из G принадлежит $LM(G)$, а поэтому и $R(G)$. Теорема доказана для случая LM-длины γ и, следовательно, для любой группы, обладающей возрастающим нормальным рядом, все факторы которого являются LM-группами. (См. еще п. 7.2.3.)

2. Нильгруппы. Обобщенные центральные элементы. Группа, в которой все элементы являются нильэлементами, называется *нильгруппой*. Всякая локально нильпотентная группа является нильгруппой, а обратное согласно результату Е. С. Голода неверно. Такое обратное утверждение может быть доказано при различных дополнительных предположениях. Так, например, из теоремы 1.6 непосредственно следует, что нильгруппа, являющаяся LM-радикальной группой, локально нильпотентна. Перечень других случаев приведен в обзоре Б. И. Плоткина [7], а по поводу более поздних результатов см. список литературы (работы Г. Хейнекена, Д. Хельда, К. Грюнберга и т. д.). Группа G называется *энгелевой группой*, если каждый ее элемент является нильэлементом ограниченного индекса нильпотентности (энгелевым элементом), т. е. если для каждого $g \in G$ существует такой показатель $n = n(g)$, что при

любом $x \in G$ будет $[x, g, n]=e$. Беровские группы являются, очевидно, энгелевыми, и в связи с этим естественно поставить вопрос о справедливости обратного предложения. Этот вопрос пока не решен кажется даже для локально нильпотентных групп.

Введем еще понятие *обобщенно центрального элемента*. Элемент $x \in G$ называется обобщенным центральным элементом, если для каждого $g \in G$ имеется такой показатель $n=n(x, g)$, что $[x, g, n]=e$. Если можно подобрать здесь число n, общее для всех $g \in G$, т. е. $n=n(x)$, то в таком случае x называется *сильным обобщенным центральным* элементом.

Имеет место следующая теорема (Г. Хейнекен [1]):

2.1. *Если a — обобщенный центральный элемент, то a^{-1} является нильэлементом. Если a — сильный обобщенный центральный элемент, то a^{-1} — энгелев элемент.*

Для доказательства этой теоремы приведем вначале следующее обозначение. Пусть x и g — элементы группы G. Положим:

$$[g, x]=[1, g, x], \ldots, [i+1, g, x]=[g, [i, g, x]], \ldots$$

При этом легко проверяется следующее соотношение:

$$[x, g, i]=g^{-i}[i, g^{-1}, x]g^{i}.$$

Допустим теперь, что a — обобщенный центральный элемент и g — произвольный элемент группы. Найдем такой показатель n, что $[a, ga^{-1}g^{-1}, n]=e$. Одновременно мы имеем $[n, gag^{-1}, a]=e$. Применяя к этому равенству внутренний автоморфизм, порожденный элементом g, получаем $[n, a, g^{-1}ag]=e$. Далее имеем:

$$e=[n-1, a, [a, g^{-1}ag]]=[n-1, a, [a, [a, g]]]= \\ =[n+1, a, g]$$

и

$$[n+1, a, g]=e.$$

Снова пользуясь отмеченным выше соотношением, находим:

$$[g, a^{-1}, n+1]=e,$$

так что a^{-1} — нильэлемент. Точно так же получаем и второе утверждение теоремы.

Как известно, верхний гиперцентр группы — это объединение всех членов ее верхнего центрального ряда. Каждый элемент этого верхнего гиперцентра является обобщенным центральным элементом. В работе [12] Р. Бер показал, что в нетеровых группах верхний гиперцентр совпадает с множеством всех обобщенных центральных элементов. В общем случае это неверно.

Отметим еще следующий интересный нерешенный вопрос: будет ли в произвольной группе произведение инвариантных нильподгрупп снова нильподгруппой?*)

3. Примеры. Мы начнем с важного примера Е. С. Голода [1], решающего многие вопросы, еще недавно остававшиеся открытыми.

Пусть P — произвольное поле и L — свободная ассоциативная линейная алгебра над P с d образующими и с единицей. Элементами этой алгебры служат полиномы от d некоммутирующих свободных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Если через L_n обозначить подпространство в L, состоящее из всех однородных полиномов (форм) степени n, то очевидно, что размерность L_n — $r(L_n)$ — равна d^n, и $L = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n$.

Пусть, далее, H — произвольное подпространство в L, порожденное однородными полиномами и $I = LHL$ — идеал в L, порожденный этим подпространством. Легко видеть, что $H = \Sigma H_n$ и $I = \Sigma I_n$, где $H_n = H \cap L_n$ и $I_n = I \cap L_n$.

При построении примера используется следующая лемма (Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич [1]):

3.1. *Если подпространство H порождается однородными многочленами степени $\geqslant 2$, причем число r_n таких многочленов степени n ограничено числом r'_n и формальный ряд*

$$\left(1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} r'_n t^n\right)^{-1} \tag{1}$$

имеет неотрицательные коэффициенты, то алгебра $K = L/I$ бесконечномерна.

*) В связи с этим вопросом напомним, что пока даже не отмечались примеры групп, в которых множество нильэлементов не есть подгруппа.

Приводимое ниже доказательство леммы принадлежит Э. Б. Винбергу [1].

Обозначим через B_n подпространство в L_n такое, что $L_n = I_n + B_n$, и пусть $B = \Sigma B_n$. Ясно, что $L = I + B$. Предполагая дальше, что для H выполнены условия леммы, покажем, что подпространство B бесконечномерно. Этим лемма будет доказана.

Вначале заметим, что из соотношения $L = I + B$ легко выводится формула $I = IL_1 + BH$, а отсюда в свою очередь — соотношение

$$I_n = I_{n-1}L_1 + \sum_{k=2}^{n} B_{n-k}H_k. \tag{2}$$

Пусть теперь $b_n = r(B_n)$. Ясно, что $b_n = d^n - r(I_n)$, а из (2) и условия леммы имеем:

$$r(I_n) \leqslant r(I_{n-1})\, d + \sum_{k=2}^{n} b_{n-k} r'_k.$$

Отсюда легко следует неравенство

$$b_n \geqslant b_{n-1}d - \sum_{k=2}^{n} b_{n-k} r'_k,$$

и таким образом,

$$\delta_n = b_n - b_{n-1}d + \sum_{k=2}^{n} b_{n-k} r'_k \geqslant 0.$$

Нетрудно понять, что последний факт оказывается равносильным тому, что в формальном выражении

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right)\left(1 - d\cdot t + \sum_{n=2}^{\infty} r'_n t^n\right)$$

все коэффициенты не меньше единицы. Опираясь теперь на условие относительно ряда (1) в формулировке леммы, отсюда можно вывести $\Sigma b_n = \infty$. Следовательно, подпространство B бесконечномерно.

Из этой леммы прямыми вычислениями легко вывести, что если при некотором положительном ε выполняется соотношение

$$r_n \leqslant \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{n-2},$$

то фактор-алгебра L/I бесконечномерна.

Опираясь на приведенный критерий бесконечномерности, мы будем теперь строить алгебру, имеющую d образующих, $d \geqslant 2$, ненильпотентную и такую, что любые ее $d-1$ элементов порождают нильпотентную подалгебру.

Будем исходить из алгебры полиномов L, и пусть L' — подалгебра в L, состоящая из полиномов без свободного члена. В алгебре L выделим подходящий идеал I, такой, что L'/I удовлетворяет перечисленным условиям. Этот идеал I порождается подпространством H, являющимся линейной оболочкой последовательности форм $f_1, f_2, \ldots$ степени $\geqslant 2$. Нужная последовательность форм строится по индукции следующим образом. Допустим, что уже построена конечная система форм $f_1, f_2, \ldots, f_{m_{k-1}}$, $H^{(k-1)}$ — линейная оболочка этих форм, $I^{(k-1)}$ — идеал, порожденный $H^{(k-1)}$, и допустим, что выполнены следующие два условия:

1) В $H^{(k-1)}$ имеет место соотношение $r_n \leqslant \varepsilon^2 (d-2\varepsilon)^{n-2}$, где ε все время фиксировано и удовлетворяет условию $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

2) Для любых $d-1$ полиномов без свободных членов и имеющих степень $\leqslant k-1$, найдется подходящий показатель N, такой, что любое произведение N сомножителей, взятых из данного набора полиномов, принадлежит $I^{(k-1)}$.

Покажем, что построенную последовательность можно расширить до последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_{m_k}$ с соблюдением отмеченных двух условий, причем второе будет выполнено для полиномов степени $\leqslant k$.

Возьмем $d-1$ произвольных (общих) многочленов степени $\leqslant k$:

$$c_{1i}^{(1)} x_1 + \ldots + c_{di}^{(1)} x_d + c_{1i}^{(2)} x_1^2 + \ldots + c_{dk_i}^{(k)} x_d^k,$$
$$i = 1, 2, \ldots, d-1.$$

Если N — некоторое целое положительное число, то из указанных полиномов можно составить $(d-1)^N$ различных произведений, содержащих N сомножителей. Во всех таких произведениях мы проведем перегруппировку слагаемых по одинаковым коэффициентам; этими коэффициентами служат одночлены от $c_{1i}^{(1)}, \ldots, c_{dk_i}^{(k)}$. После

такой группировки роль коэффициентов уже будут играть некоторые формы от $x_1, x_2, \ldots, x_d$ степени i, где i удовлетворяет неравенству $N \leqslant i \leqslant kN$. Все эти формы, при подходящем N, мы добавим к построенным ранее и получим систему форм $f_1, f_2, \ldots, f_{m_k}$.

Ясно, что при этом второе условие для полиномов степени $\leqslant k$ будет удовлетворено. Что касается первого условия, то выполнение его обеспечивается подбором достаточно большого числа N. Для того чтобы это N подобрать, оценим вначале число добавляемых форм. Пусть φ — одно из произведений из N сомножителей указанного выше вида, и допустим, что первый полином входит сюда m_1 раз, второй — m_2 раз, ..., $(d-1)$-й — m_{d-1} раз, $\sum m_i = N$. Используя перестановочность коэффициентов (из P), легко заметить, что число форм, добавляемых за счет такого φ, равно произведению

$$\prod_{i=1}^{d-1} \binom{m_i + q - 1}{q-1},$$

где $q = d + d^2 + \ldots + d^k$. Для такого произведения мы имеем оценку

$$\prod_{i=1}^{d-1} \binom{m_i + q - 1}{q-1} \leqslant \prod_{i=1}^{d-1} (m_i + q - 1)^{q-1} \leqslant$$
$$\leqslant (N + q - 1)^{(q-1)(d-1)},$$

так что общее число добавляемых форм, обозначим его через t, ограничено числом $(d-1)^N (N+q-1)^{(q-1)(d-1)}$. Имея в виду, далее, что

$$d - 1 < d - 2\varepsilon,$$

для достаточно большого N мы можем получить неравенство

$$t \leqslant (d-1)^N (N + q - 1)^{(q-1)(d-1)} \leqslant \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{N-2}.$$

Кроме того, мы будем считать N бо́льшим, чем степень любой из форм $f_1, \ldots, f_{m_{k-1}}$. При этом условии для $n > N$ будем иметь:

$$r_n \leqslant t \leqslant \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{N-2} \leqslant \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{n-2}.$$

Теперь уже система форм $f_1, f_2, \ldots, f_{m_k}$ будет удовлетворять обоим нужным условиям.

Так, по индукции, будет построена последовательность f_1, f_2, ... Если I — порожденный этой последовательностью идеал, L' — подалгебра в L, состоящая из полиномов без свободных членов, то фактор-алгебра L'/I бесконечномерна, имеет d образующих и, следовательно, не нильпотентна. Согласно построению любая подалгебра в L'/I, имеющая $d-1$ образующих, нильпотентна.

В частности, L'/I есть нильалгебра, не локально нильпотентная, и следовательно, получено отрицательное решение известной проблемы Куроша, отмечавшейся в п. 2.5.4, посвященной алгебраическим алгебрам, а также известной в теории колец проблемы Левицкого о локальной нильпотентности ассоциативных нильколец. С помощью результатов Джекобсона из этого же примера легко вывести отрицательное решение проблемы Бернсайда о периодических группах.

Нас интересует здесь следующая удивительная теорема Голода:

3.2. *Для любого $d \geqslant 2$ существует ненильпотентная группа с d образующими, такая, что любая ее подгруппа с меньшим числом образующих нильпотентна.*

Для доказательства возьмем алгебру L/I и рассмотрим в ней все элементы вида $1+u$, $u \in L'/I$. Так как L'/I — нильалгебра, то относительно умножения все такие элементы образуют группу, и все элементы этой группы унипотентны. Обозначим через G ее подгруппу, порожденную элементами

$$1+\bar{x}_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ d,\ \bar{x}_i=x_i+I.$$

Если бы подгруппа G была нильпотентной, то по теореме 3.3.1.5 она совпадала бы со своим γ-радикалом и, следовательно, была бы финитно стабильной (например, в регулярном представлении). Но тогда и алгебра L'/I оказалась бы нильпотентной, что приводит к противоречию, так что группа G, имеющая d образующих, не нильпотентна. Возьмем теперь в G произвольным образом $d-1$ элементов $1+u_1$, ..., $1+u_{d-1}$. Так как элементы u_1, ..., u_{d-1} порождают в L'/I нильпотентную подалгебру, то очевидно, что элементы $1+u_1$, ...

..., $1+u_{d-1}$ порождают в G нильпотентную подгруппу. Теорема доказана.

Этой теоремой доказывается, в частности, что существуют не локально нильпотентные нильгруппы, а следовательно, и группы, в которых локально нильпотентный радикал не совпадает с множеством нильэлементов. При этом, однако, остается открытым вопрос о локальной нильпотентности каждой энгелевой группы.

Другие применения теоремы Голода будут приведены позднее.

В следующих примерах используются стандартные сплетения групп, т. е. сплетения, основанные на регулярном представлении.

Пусть H и $\mathfrak{G}$ — две группы и $G = H \operatorname{wr} \mathfrak{G}$ — их дискретное сплетение. Приведем два простых предложения о данном сплетении. Через $D = H^{\mathfrak{G}}$ обозначим базисную подгруппу.

3.3. *Если $B \subset \mathfrak{G}$, $x \in N(B)$, $x = gd$, $g \in \mathfrak{G}$, $d \in D$, то d перестановочен с каждым элементом из подгруппы $g^{-1}Bg$.*

Действительно, если $b \in B$, то $d^{-1}g^{-1}bgd \in B$,

$$g^{-1}b^{-1}gd^{-1}g^{-1}bgd = [g^{-1}bg,\ d] \in \mathfrak{G} \cap D = E,$$

что и требовалось.

3.4. *Если d — отличный от единицы элемент в D и $\mathfrak{z}(d)$ — его централизатор в G, то пересечение $\mathfrak{z}(d) \cap \mathfrak{G}$ — конечная группа.*

Пусть $d = a_{g_1}^{(1)} a_{g_2}^{(2)} \ldots a_{g_n}^{(n)}$, где $a_{g_i}^{(i)} \in H_{g_i}$, $a_{g_i}^{(i)} \neq e$. Обозначим через X множество индексов $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Легко видеть, что если $g \in \mathfrak{z}(d) \cap \mathfrak{G}$, то множество X инвариантно относительно элемента g в регулярном представлении группы $\mathfrak{G}$. Ясно также, что группа $\mathfrak{z}(d) \cap \mathfrak{G}$ действует в X точно. Так как X — конечное множество, то отсюда следует, что $\mathfrak{z}(d) \cap \mathfrak{G}$ — конечная группа.

Теперь мы приведем принадлежащий Я. Б. Ливчаку [1] пример полупростой и одновременно локально разрешимой (а значит, и локально радикальной) группы.

Пусть G_0 — бесконечная циклическая группа. Положим

$$G_1 = G_0 \operatorname{wr} G_0,\ G_2 = G_0 \operatorname{wr} G_1,\ \ldots,\ G_n = G_0 \operatorname{wr} G_{n-1},\ \ldots$$

Считая, что G_{n-1} содержится в G_n, определим группу G как объединение всех G_n. Из построения непосредственно следует, что каждая группа G_n является разрешимой группой без кручения. Следовательно, G — локально разрешимая группа.

3.5. *Группа G полупроста.*

Пусть в G имеется некоторый возрастающий нормальный ряд

$$A \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots, \tag{3}$$

начинающийся с циклической подгруппы A. Допустим, что A содержится в G_n. Покажем, что при этом условии и все A_k принадлежат G_n. Пусть это уже проверено для A_i, и допустим, что g — элемент в A_{i+1}, не принадлежащий G_n. Для этого g найдется такое первое $m > n$, что $g \in G_m = G_0 \operatorname{wr} G_{m-1}$. Если $g = g_{m-1}d$, $g_{m-1} \in G_{m-1}$ и $d \in D = G_0^{G_{m-1}}$, то здесь d не должен равняться единице. С другой стороны, по 3.3 и 3.4 он не может не равняться единице. Полученное противоречие означает, что и A_{i+1} принадлежит G_n.

Из сказанного следует, что в группе G нет локально субинвариантных циклических подгрупп, т. е. G — полупростая группа.

Заметим еще, что аналогичный пример построен также Ф. Холлом [5] и Ю. И. Мерзляковым [1]. Конструкция Ю. И. Мерзлякова использует линейные группы.

Следующий пример принадлежит М. И. Каргаполову [5]. Он показывает, что существуют локально нильпотентные группы, не являющиеся RN^*-группами.

Пусть G_0 — группа простого порядка p, и γ — первое несчетное порядковое число. Допустим далее, что для всех $\alpha < \beta < \gamma$ подгруппы G_α уже определены и составляют возрастающую последовательность. Если β — предельное число, то полагаем $G_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha$. Если же существует $\beta - 1$, то берем $G_\beta = G_0 \operatorname{wr} G_{\beta-1}$. Все эти группы G_β являются, очевидно, счетными локально конечными p-группами. Через G обозначим объединение всех G_β. G — несчетная локально конечная p-группа. Покажем, что

3.6. *Группа G не является RN^*-группой.*

Допустим, что в G задан некоторый бесконечный возрастающий нормальный ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots, \qquad (4)$$

все факторы которого — циклические группы простого порядка. (Если G — RN^*-группа, то такие ряды должны существовать.) Обозначим через A_ω объединение всех членов этого ряда с натуральными номерами. A_ω — счетная группа. Легко видеть, что при некотором $\beta < \gamma$ $A_\omega \subset G_\beta$. Действительно, если $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — все элементы A_ω и $a_n \in G_{\beta_n}$, то объединение всех этих G_{β_n} не может совпадать с G, так как все G_{β_n} счетны, а G — несчетная группа. Следовательно, это объединение совпадает с некоторым G_β и содержит A_ω. Покажем теперь, что все A_α с $\alpha > \omega$ также принадлежат G_β. Пусть это уже установлено для всех $\alpha < \mu$. Если число μ — предельное, то принадлежность $A_\mu \subset G_\beta$ очевидна. Пусть μ — непредельное и пусть g — элемент в A_μ, не принадлежащий G_β. Найдем первое ν среди таких, что $g \in G_\nu$. Это ν не является предельным, и $g = ab$, $a \in G_{\nu-1}$, $b \in G_0^{G_{\nu-1}}$. Согласно 3.3 элемент b должен принадлежать централизатору счетной подгруппы $a^{-1}A_{\mu-1}a$, а по 3.4 это возможно лишь при $b = e$. Получилось противоречие с выбором ν, которое и доказывает утверждение.

Следовательно, разрешимый ряд (4) не может дойти до всей группы G, и 3.6 доказано.

Из этого примера и теоремы 2.3.4 следует также, что существуют локально нильпотентные группы, не являющиеся наднильпотентными. Кроме того, теперь ясно, что класс радикальных групп строго содержит класс RN^*-групп.

Покажем еще, что в примере М. И. Каргаполова наднильпотентный радикал группы G равен единице. Действительно, из предыдущего ясно, что радикал $\beta^*(G)$ принадлежит некоторой подгруппе G_β. Ясно также, что $\beta^*(G)$ не может быть бесконечной группой, так как в противном случае нормализатор этой подгруппы должен был бы совпадать с G_β. Если же $\beta^*(G)$ — отличная от единицы конечная группа, то в группе G имелся бы нетривиальный центр. Но, как нетрудно понять, G — группа без центра.

В связи с рассмотренным примером заметим, что было бы интересно выяснить, существует ли подобный пример для групп без кручения. Здесь, вероятно, следует исходить из бесконечных треугольных линейных групп.

Отметим, с другой стороны, что А. Г. Курош [6] и Ф. Холл [4] построили примеры счетных локально нильпотентных (наднильпотентных) групп, в которых радикал Бера совпадает с единицей.

Приведем теперь принадлежащий Е. М. Левичу [2] пример, показывающий, что локально достижимые и локально субинвариантные элементы группы — это не одно и то же.

Вначале разберем одну интересную конструкцию, принадлежащую Б. Нейману и Х. Нейман [1] и Ф. Холлу [4]. Пусть A — произвольная группа, B — бесконечная циклическая группа с образующим элементом b, и $\mathfrak{G} = A \operatorname{Wr} B$ — полное сплетение этих групп. Возьмем в базисной группе $\bar{A} = A^B$ этого сплетения некоторый элемент $\bar{u}$, и пусть $G = \{\bar{u},\ b\}$, $H = \{\bar{u}^G\} = G \cap \bar{A}$. Подгруппа H порождается всевозможными элементами вида $\bar{u} \circ b^{\pm n}$, где n — целое и $(\bar{u} \circ b)(x) = \bar{u}(xb^{-1})$ при $x \in B$. Найдем коммутант H' группы H. Этот коммутант порождается всевозможными коммутаторами

$$\bar{v} = [\bar{u} \circ b^{-l},\ \bar{u} \circ b^{-m}] \quad (l < m)$$

и сопряженными с ними в H элементами. Каждый такой коммутатор, как функция от $x \in B$, имеет следующий вид:

$$\bar{v}(x) = [(\bar{u} \circ b^{-l})(x),\ (\bar{u} \circ b^{-m})(x)] = [\bar{u}(xb^{l}),\ \bar{u}(xb^{m})],$$

и если $x = b^n$, то $\bar{v}(x) = \bar{v}(n) = [\bar{u}(n+l),\ \bar{u}(n+m)]$ (понятно, что элементы из $\bar{A}$ можно рассматривать как функции целочисленного аргумента).

Начиная с этого места, мы допустим, что исходная группа A счетная, a_0, a_1, a_2, ... — все ее элементы, а функцию $\bar{u}$ выберем специальным образом. Мы положим:

$$\bar{u}(2^r) = a_r \ (r \geqslant 0),$$

и если $n \neq 2^r$, то $\bar{u}(n) = e$ (e — единица в A). При этом условии $\bar{v}(n) = e$ во всех случаях, кроме тех, когда

найдутся целые r и s, такие, что

$$l+n=2^r,\ m+n=2^s\ (0\leqslant r<s).$$

Легко видеть, что при заданных l и m эти два уравнения имеют решения (r и s) не более чем для одного значения n. Для этого единственного n, если оно имеется, мы получим:

$$\bar{v}(n)=[a_r,\ a_s]\in A'.$$

Таким образом, все элементы $\bar{v}$ и все сопряженные с ними элементы в H являются функциями, принимающими неединичное значение не более одного раза, причем это значение лежит в коммутанте A'. Это, в частности, означает, что коммутант H' содержится в дискретной B-степени коммутанта A'.

Возьмем дальше произвольное целое n, произвольные r и s с условием $0\leqslant r<s$, и найдем такие l и m, чтобы выполнялись равенства $l+n=2^r$ и $m+n=2^s$. Тогда $\bar{v}(n)=[a_r,\ a_s]$ и $\bar{v}(k)=e$, если $k\neq n$. Все это означает, что при каждом заданном n всевозможные коммутаторы $\bar{v}(n)$ порождают весь коммутант A', и коммутант H' равен дискретной B-степени коммутанта A'.

Используя эту конструкцию, построим интересующий нас пример.

Пусть A — счетная локально нильпотентная группа без достижимых, отличных от единицы, элементов. Существование таких групп уже отмечалось. Коммутант такой группы также не имеет достижимых элементов. Легко понять, что прямое произведение групп без достижимых элементов также не имеет достижимых элементов. Если теперь воспользоваться приведенными выше обозначениями и применить всю конструкцию к данной группе A, то H' окажется счетной локально нильпотентной группой без достижимых в G элементов. С другой стороны, каждый элемент из H' субинвариантен в G. Учитывая, что вся группа G имеет два образующих элемента, мы можем заключить, что ни один (субинвариантный) элемент из H' не является локально достижимым (в G) элементом.

Теперь перейдем к рассмотрению примера Баумслага — Ковача — Неймана [1] группы, порожденной ло-

кально разрешимыми нормальными делителями, но не локально разрешимой.

Вначале изложим одну полезную конструкцию из названной работы.

Пусть G — произвольная и A — абелева группы и пусть $H = G \leftthreetimes A$ — их полупрямое произведение. Подгруппу A в этом полупрямом произведении будем обозначать через A^{β}, где $\beta\colon A \to A^{\beta}$ — изоморфизм. Возьмем далее полное сплетение $\mathfrak{G} = H \operatorname{Wr} A$, и пусть H^A — соответствующая базисная подгруппа. Пусть еще K — подгруппа в H^A, состоящая из функций, принимающих лишь конечное число неединичных значений, причем все эти значения принадлежат G. Ясно, что K — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$, и $KA \approx G \operatorname{wr} A$. Обозначим еще для каждого $a \in A$ через a^{δ} постоянную функцию на A со значением $a^{\beta} \in H$. Тогда $\delta\colon A \to H^A$ есть мономорфизм, причем A^{δ} и A порождают абелеву подгруппу в $\mathfrak{G}$. Возьмем теперь элемент $f \in H^A$, определяемый условием $f(a) = a^{\beta}$, $a \in A$. Непосредственными вычислениями получаем $f^{-1}af = a^{\delta} \cdot a$ для всех $a \in A$. Следовательно, $A^f \subset A^{\delta} \cdot A$, и поэтому A и A^f поэлементно перестановочны. Обозначим через H^* подгруппу, порожденную KA и KA^f. Из предыдущего следует, что KA и KA^f являются нормальными делителями в H^* и обе эти подгруппы изоморфны $G \operatorname{wr} A$.

Далее, для каждого $g \in G$ через g^{γ} обозначим элемент в H^A, определяемый условиями $g^{\gamma}(1) = g$, $g^{\gamma}(a) = 1$, если $a \in A$ и $a \neq 1$. Всякий элемент из H имеет вид $g \cdot a^{\beta}$, $g \in G$, $a \in A$. Определим еще отображение $\alpha\colon g \cdot a^{\beta} \to g^{\gamma} a^{\delta}$. Это отображение является мономорфизмом, причем $H^{\alpha} \subset H^*$, так что H^* содержит подгруппу, изоморфную H. Легко также видеть, что H^{α} и A порождают H^*, и поэтому если H имеет конечное число образующих, то этим же свойством обладает и H^*.

Теперь применим эту конструкцию. Используя уже приводившиеся построения, нетрудно показать, что существует группа H, имеющая конечное число образующих и распадающаяся в полупрямое произведение: $H = G \leftthreetimes A$, где G локально разрешима, но не разрешима, и A абелева. При этих условиях $G \operatorname{wr} A$ — локально

разрешимая группа. Возьмем теперь в соответствии с разобранной конструкцией группу H^*. Эта группа порождается своими локально разрешимыми нормальными делителями KA и KA^f. Но сама она не локально разрешима, так как, имея конечное число образующих, она была бы разрешимой, и вместе с тем в H^* содержится неразрешимая подгруппа G.

В работе Баумслага — Ковача — Неймана [1] приводятся и некоторые другие случаи с подобной ситуацией: два нормальных делителя обладают некоторым хорошим свойством, а их произведение этим свойством уже не обладает.

Отметим еще, что пример Ф. Холла простой, но не строго простой группы также построен с помощью сплетения групп. Эта конструкция и различные ее обобщения находят сейчас многочисленные применения (в частности, в теории многообразий — примитивных классов — групп). (См. список литературы.)

В следующем примере Адо [1] — Маклейна [1] (см. также Чан Ван Хао [2]) за основу берется уже линейная группа.

3.7. *Существуют беровские группы без собственных характеристических подгрупп.*

Пусть $P_0 = (\alpha, \beta, \ldots)$ — поле рациональных чисел и $e_{\alpha,\beta}$, $\alpha < \beta$, — базисные векторы векторного пространства R над некоторым полем P. Эти $e_{\alpha,\beta}$ умножаются по обычному правилу:

$$e_{\alpha,\beta}e_{\gamma,\delta} = \begin{cases} e_{\alpha,\delta}, & \text{если } \beta = \gamma, \\ 0, & \text{если } \beta \neq \gamma. \end{cases}$$

При таком умножении R является ассоциативной алгеброй, причем нетрудно понять, что эта алгебра изоморфна некоторой слабо аннуляторной алгебре эндоморфизмов векторного пространства G над P с базисом $[a_\alpha]$, $\alpha \in P_0$. Присоединяя к R единицу поля P и рассматривая суммы $1 + u$, $u \in R$, мы получим группу. Эту группу обозначим через Γ. Группа Γ может рассматриваться как слабо стабильная группа автоморфизмов векторного пространства G. Легко видеть, что элементы вида $1 + ae_{\alpha,\beta}$ порождают всю группу Γ и что $(1 + ae_{\alpha,\beta})^{-1} = 1 - ae_{\alpha,\beta}$. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что

если N — неединичный нормальный делитель в Γ, то при некоторых α, β, $\alpha<\beta$, и при всех $a\in P$ в N содержатся элементы $1+ae_{\alpha,\beta}$. Из правила умножения непосредственно вытекает также следующее утверждение (ср. п. 4.1.3): для любого рационального числа ξ подгруппа N_ξ, порожденная всеми образующими вида $1+ae_{\alpha,\beta}$ с $\alpha<\xi<\beta$, является абелевым нормальным делителем в Γ. Так как для каждого $e_{\alpha,\beta}$ имеется такое ξ, что $\alpha<\xi<\beta$, то каждый из названных образующих принадлежит некоторой подгруппе N_ξ. Следовательно, группа Γ порождается абелевыми нормальными делителями. Такая группа является беровской группой.

Будем показывать, что в Γ нет собственных характеристических подгрупп.

Сопоставим произвольному рациональному числу μ автоморфизм ψ_μ по следующему правилу:

$$(1+ae_{\alpha,\beta})\,\psi_\mu=1+ae_{\alpha+\mu,\,\beta+\mu}.$$

Положительному рациональному числу δ отнесем автоморфизм φ_δ:

$$(1+ae_{\alpha,\beta})\,\varphi_\delta=1+ae_{\alpha\delta,\,\beta\delta}.$$

Понятно, что так действительно задаются автоморфизмы группы Γ, причем выполняются соотношения

$$\varphi_\delta^{-1}\psi_\mu\varphi_\delta=\psi_{\mu\delta};\quad (1+ae_{\alpha,\beta})\,\varphi_\delta\psi_\mu=1+ae_{\alpha\delta+\mu,\,\beta\delta+\mu}.$$

Пусть теперь N — неединичная характеристическая подгруппа в Γ, и допустим, что элемент $1+ae_{r,s}$ не принадлежит N. Как уже отмечалось, в N найдется элемент $1+ae_{\alpha,\beta}$ с тем же $a\in P$. Решим теперь уравнения $\alpha\delta+\mu=r$ и $\beta\delta+\mu=s$. Находим $\delta=\frac{s-r}{\beta-\alpha}>0$ и $\mu=\frac{r\beta-s\alpha}{\beta-\alpha}$. Ясно, что автоморфизм $\psi_\delta\varphi_\mu$ с найденными δ и μ переводит элемент $1+ae_{\alpha,\beta}$ в элемент $1+ae_{r,s}$, так что последний должен принадлежать N.

Сказанное означает, что $N=\Gamma$, и в Γ нет собственных характеристических подгрупп.

По поводу группы Адо — Маклейна имеется еще работа Дж. Розеблада [1], где рассматривается группа всех автоморфизмов такой группы.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП

§ 1. ТИПЫ АВТОМОРФИЗМОВ

1. Локально внутренние автоморфизмы. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые часто встречающиеся типы автоморфизмов. Мы начнем с естественного обобщения внутренних автоморфизмов — локально внутренних автоморфизмов. Такие автоморфизмы находят различные применения. Приведем определение.

Автоморфизм σ группы G называется *локально внутренним*, если для любого конечного подмножества $M=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из G можно подобрать такой элемент $g=g(M, \sigma)\in G$, что для любого $a_i\in M$ будет $a_i\sigma=g^{-1}a_ig$.

Это определение эквивалентно следующему: в группе G для любой ее подгруппы H с конечным числом образующих можно указать такой $g=g(H, \sigma)$, что при любом $h\in H$ будет $h\sigma=g^{-1}hg$.

Поэтому для групп с конечным числом образующих локально внутренние автоморфизмы являются внутренними автоморфизмами.

Частным случаем локально внутренних автоморфизмов являются *сильно локально внутренние автоморфизмы*. Автоморфизм σ группы G назовем сильно локально внутренним, если в G имеется локальная система σ-допустимых подгрупп G_α таких, что для каждой G_α в этой подгруппе можно выделить элемент g_α со свойством: $g\sigma=g_\alpha^{-1}gg_\alpha$ при любом $g\in G_\alpha$. Нетрудно проверить, что совокупность всех локально внутренних автоморфизмов группы G является нормальным делителем в $\mathfrak{A}(G)$. Ясно также, что все нормальные делители группы G допустимы относительно локально внутренних автоморфизмов. Легко устанавливается следующая теорема:

1.1. *Пусть $\bar{I}(G)$ — группа всех локально внутренних автоморфизмов группы G. Если G — нильпотентная группа класса n, то $\bar{I}(G)$ — нильпотентная группа класса $n-1$.*

Верхний центральный ряд в G является, очевидно, стабильным рядом группы $\bar{I}(G)$. По теореме Калужнина из следующей главы, $\bar{I}(G)$ — нильпотентная группа класса $\leqslant n-1$. Но так как $\bar{I}(G)$ содержит группу внутренних автоморфизмов $I(G)$, то класс $\bar{I}(G)$ не может быть меньше $n-1$.

Найдем теперь в качестве примера группу локально внутренних автоморфизмов прямого произведения групп с конечным числом образующих.

Пусть $G = \prod\limits_{\alpha \in M} G_\alpha$, где все G_α имеют конечное число образующих, и пусть Φ — группа всех автоморфизмов группы G, оставляющих неподвижными прямые множители. Ясно, что $\bar{I}(G) \subset \Phi$. Каждый элемент из Φ — это последовательность вида $\sigma = (\ldots, \sigma_\alpha, \ldots)$, где σ_α — автоморфизм группы G_α. Если этот σ принадлежит $\bar{I}(G)$, то при любом $\alpha \in M$ в G найдется такой g_α, что для каждого $h \in G_\alpha$ выполняется равенство $h\sigma = g_\alpha^{-1} h g_\alpha$. Можно считать, что элемент g_α принадлежит G_α. Понятно также, что имеет место тождество $h\sigma_\alpha = g_\alpha^{-1} h g_\alpha$ по всем $h \in G_\alpha$. Это означает, что σ_α — внутренний автоморфизм группы G_α. Таким образом, показано, что группа $\bar{I}(G)$ принадлежит полному прямому произведению групп внутренних автоморфизмов групп G_α. Верно и обратное включение.

Мы видим также, что в рассматриваемой ситуации каждый локально внутренний автоморфизм является одновременно и сильно локально внутренним.

Исследование связей между свойствами группы и ее группы локально внутренних автоморфизмов может оказаться интересной проблемой. В частности, было бы интересно подробнее изучить этот вопрос для различных классов локально нильпотентных групп. Верно ли, например, что группа локально внутренних автоморфизмов всякой локально нильпотентной группы обладает центральной системой? Локально нильпотентной она может не быть. Нетрудно понять, что при этом важную роль должны играть полные прямые произведения, а воз-

можно, и приведенные произведения подходящих групп внутренних автоморфизмов.

2. Внешние автоморфизмы. *Внешние автоморфизмы* — это автоморфизмы, не являющиеся внутренними. Они, конечно, не образуют подгруппу в группе всех автоморфизмов. Под *группой внешних автоморфизмов* принято понимать фактор-группу $\mathfrak{A}(G)/I(G)$, где, как и раньше, $\mathfrak{A}(G)$ — группа всех и $I(G)$ — группа внутренних автоморфизмов группы G. Имеется ряд проблем, посвященных этой группе. Это, во-первых, условия нетривиальности группы внешних автоморфизмов при тех или иных предположениях относительно группы G (см. по этому поводу п. 9.4.1). Во-вторых, ищутся признаки разрешимости этой группы. Так, например, имеется предположение о том, что для конечной простой группы G группа ее внешних автоморфизмов всегда разрешима.

3. Нормальные и центральные эндоморфизмы и автоморфизмы. Эндоморфизм σ группы G называется *нормальным*, если он перестановочен со всеми внутренними автоморфизмами группы G; если σ — такой эндоморфизм, x и y — произвольные элементы группы, то $x^{-1}\sigma \cdot y\sigma \cdot x\sigma = x^{-1} \cdot y\sigma \cdot x$. Последнее тождество эквивалентно следующему: $x \cdot x^{-1}\sigma \cdot y\sigma \cdot (x \cdot x^{-1}\sigma)^{-1} = y\sigma$.

Следовательно, эндоморфизм σ в том и только в том случае является нормальным, когда все элементы вида $x \cdot (x\sigma)^{-1}$ принадлежат централизатору образа G^{σ}. В частности, для нормального автоэпиморфизма σ это означает, что σ действует тождественно в фактор-группе группы G по ее центру.

Одновременно мы видим, что группа $\mathfrak{N}(G)$ всех нормальных автоморфизмов группы G может быть определена как ядро представления $\mathfrak{A}(G)$ относительно фактор-группы G/Z. Впрочем, это непосредственно следует также из изоморфизма пары $(G/Z, \mathfrak{A}(G))$ и внутренней пары $(I(G), \mathfrak{A}(G))$.

Покажем дальше, что если σ — нормальный эндоморфизм группы G, то для любого элемента z из коммутанта G' выполняется равенство $z\sigma^2 = z\sigma$. Указанное свойство достаточно, очевидно, установить для случая, когда

z — коммутатор. Пусть $z = x^{-1}y^{-1}xy$. Имеем:

$$(x^{-1}y^{-1}xy)\,\sigma = (x\sigma)^{-1}\,(y\sigma)^{-1}\,(x\sigma)\,(y\sigma) = ((x\sigma)^{-1}\cdot y^{-1}\,(x\sigma))\,\sigma\cdot y\sigma =$$
$$= ((x\sigma)^{-1}\cdot y^{-1}\cdot (x\sigma)\cdot y)\,\sigma = ((x\sigma)^{-1}\,(y^{-1}xy)\,\sigma)\,\sigma = (x^{-1}y^{-1}xy)\,\sigma^2,$$

что и требовалось.

Из этого свойства вытекает, что все элементы коммутанта неподвижны относительно нормальных автоморфизмов. Покажем еще, что эндоморфизм σ группы G является нормальным в том и только в том случае, когда отображение $\varepsilon - \sigma$ является эндоморфизмом группы G. Пусть $x,\ y \in G$. Применяя к произведению xy отображение $\varepsilon - \sigma$, получим:

$$(xy)\,(\varepsilon - \sigma) = xy\,(xy)^{-1}\,\sigma = xy\,(y\sigma)^{-1}\,(x\sigma)^{-1}.$$

Если теперь σ — нормальный эндоморфизм, то элемент $(x\sigma)^{-1}$ можно переставить с $y\,(y\sigma)^{-1}$, и мы получим $(xy)\,(\varepsilon - \sigma) = x\,(\varepsilon - \sigma)\,y\,(\varepsilon - \sigma)$, т. е. $\varepsilon - \sigma$ — эндоморфизм. Если, с другой стороны, $\varepsilon - \sigma$ — эндоморфизм, то

$$x\,(x\sigma)^{-1}\,y\,(y\sigma)^{-1} = xy\,(y\sigma)^{-1}\,(x\sigma)^{-1};\quad (x\sigma)^{-1}\,y\,(y\sigma)^{-1} = y\,(y\sigma)^{-1}\,(x\sigma)^{-1},$$

а это значит, что каждый элемент $y\,(y\sigma)^{-1}$ перестановочен с каждым $x\sigma$, т. е. σ — нормальный эндоморфизм.

Эндоморфизм σ называется *центральным*, если образ G^{σ} принадлежит центру группы G.

Отметим теперь следующее утверждение.

Автоморфизм σ группы G тогда и только тогда является нормальным, когда разность $\varepsilon - \sigma$ является центральным эндоморфизмом.

Это утверждение непосредственно следует из предыдущих замечаний.

Нормальным автоморфизмам посвящена работа Ф. Хаимо [2]. Приведем один из результатов этой работы. Пусть H — $\mathfrak{N}\,(G)$-центр группы G.

3. 1. *Группа G/H изоморфна подпрямому произведению некоторого множества групп, изоморфных подгруппам центра Z. В частности, если Z — группа без кручения, то и G/H — группа без кручения.*

Действительно, пусть σ — нормальный автоморфизм группы G. Тогда отображение $x \to x\,(\varepsilon - \sigma)$ является гомоморфным отображением группы G в ее центр Z. Ядром этого гомоморфизма служит подгруппа H_{σ}, состоящая из

всех элементов группы G, неподвижных относительно σ. Пересечение всех H_σ по всем $\sigma \in \mathfrak{N}(G)$ совпадает с H, и этим утверждение доказано. Так как G/H оказывается абелевой группой, то еще раз доказано, что коммутант G' принадлежит H.

Если группа $\mathfrak{N}(G)$ имеет конечное число образующих, то фактор-группу G/H можно рассматривать как подгруппу прямого произведения конечного числа экземпляров группы Z. Отсюда следует, что если Z — периодическая группа и $\mathfrak{N}(G)$ имеет конечное число образующих, то и G/H — периодическая группа.

Сделаем дальше несколько замечаний о поведении нормальных и центральных эндоморфизмов в квазикольце $K(G)$ всех квазиэндоморфизмов группы G.

Пусть K_0 — под(квази)кольцо в $K(G)$, порожденное всеми нормальными эндоморфизмами. K_0 является также квазикольцом. Справедлива теорема (Херема [1]).

3.2. *K_0 является кольцом.* Достаточно показать, что любые два нормальных эндоморфизма группы G аддитивно перестановочны. Пусть φ и ψ — нормальные эндоморфизмы и g — произвольный элемент группы G. Имеем:

$$g(\varphi+\psi)=g\varphi\cdot g\psi=g\psi\,(g\psi)^{-1}(g\varphi)(g\psi)=g\psi\,((g\psi)^{-1}g\,(g\psi))\,\varphi=$$
$$=g\psi\,(g\psi\,(g\psi)^{-1}g)\,\varphi=g\psi\cdot g\varphi=g\,(\psi+\varphi),$$

что и требовалось.

Не все элементы из K_0 являются эндоморфизмами группы G — сумма нормальных эндоморфизмов не обязательно является эндоморфизмом. Как известно, сумма двух эндоморфизмов σ и φ в том случае является также эндоморфизмом, когда их образы G^σ и G^φ поэлементно перестановочны. Такие эндоморфизмы, следуя Фиттингу, называют *суммируемыми*. В частности, центральный эндоморфизм суммируем с любым эндоморфизмом, и совокупность всех центральных эндоморфизмов является кольцом эндоморфизмов группы.

И вообще, каждой абелевой подгруппе из G отвечает подкольцо в $K(G)$, являющееся кольцом эндоморфизмов; это подкольцо состоит из всех эндоморфизмов группы, переводящих каждый элемент группы в элемент данной абелевой подгруппы.

4. Нильавтоморфизмы. Понятие нильавтоморфизма было уже определено. Здесь будет приведен пример, показывающий, что множество всех нильавтоморфизмов группы не обязательно является подгруппой в группе всех автоморфизмов.

Пусть G — циклическая группа простого порядка p, и Γ — конечная группа, в которой имеется больше одной силовской p-подгруппы. Обозначим еще через $\mathfrak{G} = G\mathrm{wr}\Gamma$ сплетение G и Γ, и пусть A — базисная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Группу Γ можно рассматривать как группу автоморфизмов группы A. Для любой p-подгруппы $\Phi \subset \Gamma$ подгруппа $A\Phi$ является p-группой, и следовательно, она нильпотентна, так что каждый p-элемент группы Γ является нильавтоморфизмом группы A.

Допустим, что все нильавтоморфизмы группы A образуют в Γ подгруппу Σ. По теореме 2.3.4 из следующей главы эта подгруппа должна быть нильпотентной. Так как все силовские p-подгруппы из Γ содержатся в Σ, то они должны совпадать, а это противоречит предположению о силовских подгруппах в Γ.

Подробно о свойствах нильавтоморфизмов мы будем говорить в следующей главе.

5. Регулярные автоморфизмы. Как уже отмечалось, регулярные автоморфизмы и нильавтоморфизмы в известном смысле противоположны. В этом пункте мы приведем некоторые факты, связанные с регулярными автоморфизмами групп (ср. п. 4.4.3).

5.1. *Отображение* $x \to [x, \sigma]$, $x \in G$, σ — *автоморфизм группы* G, *в том и только в том случае является взаимно однозначным, когда* σ — *регулярный автоморфизм.*

Пусть указанное отображение взаимно однозначно и пусть y — неподвижный относительно σ элемент. Тогда $[y, \sigma] = e = [e, \sigma]$ и $y = e$. Это значит, что σ — регулярный автоморфизм. Обратно, пусть автоморфизм σ является регулярным и пусть $[x, \sigma] = [y, \sigma]$. Тогда $yx^{-1} = (yx^{-1})\sigma$ и $yx^{-1} = e$, $x = y$.

Если здесь, в частности, G — конечная группа и σ — регулярный автоморфизм, то отображение $x \to [x, \sigma]$ есть подстановка на множестве G. Следующие два предложения взяты из работы Б. Неймана [3].

5.2. *Если регулярный автоморфизм σ конечной группы G имеет порядок, равный 3, то подквазикольцо в $K(G)$, порожденное этим автоморфизмом, является кольцом.*

Пусть σ — регулярный автоморфизм и $\sigma^3 = e$. Вначале проведем выкладки:

$$(-\varepsilon + \sigma)(\varepsilon + \sigma + \sigma^2) = -\varepsilon + \sigma + (-\varepsilon + \sigma)\sigma + (-\varepsilon + \sigma)\sigma^2 =$$
$$= -\varepsilon + \sigma - \sigma + \sigma^2 - \sigma^2 + \sigma^3 = 0,$$

где 0 — нуль в $K(G)$. Так как в рассматриваемом случае $-\varepsilon + \sigma$ согласно 5.1 действует как подстановка на множестве G, то из этих выкладок следует, что $\varepsilon + \sigma + \sigma^2 = 0$. Дальше имеем:

$$0 = (-\varepsilon)0 = -\varepsilon(\varepsilon + \sigma + \sigma^2) =$$
$$= -\varepsilon\varepsilon + (-\varepsilon)\sigma + (-\varepsilon)\sigma^2 = -\varepsilon - \sigma - \sigma^2.$$

Отсюда $\sigma^2 + \sigma + \varepsilon = 0$. Заменяя в $\varepsilon + \sigma + \sigma^2 = 0$ σ на σ^2, получим $\varepsilon + \sigma^2 + \sigma = 0$, и теперь уже имеем $\sigma + \sigma^2 = \sigma^2 + \sigma$. Умножив здесь обе части сначала на σ^2, а затем на σ, получим: $\varepsilon + \sigma = \sigma + \varepsilon$; $\sigma^2 + \varepsilon = \varepsilon + \sigma^2$, так что элементы ε, σ и σ^2 попарно перестановочны, что и требовалось.

5.3. *Если конечная группа G обладает регулярным автоморфизмом порядка 3, то такая группа нильпотентна.*

Пусть x и y *) — произвольные элементы из G. Так как $\varepsilon + \sigma + \sigma^2 = 0$, то $-x\sigma^2 = x\sigma + x$, $y\sigma^2 = -y\sigma - y$. И далее,

$$-x\sigma^2 + y\sigma^2 = (-x + y)\sigma^2 = -(-x + y)\sigma - (-x + y) =$$
$$= -y\sigma + x\sigma - y + x.$$

Комбинируя эти равенства, мы получаем:

$$x\sigma + x - y\sigma - y = -y\sigma + x\sigma - y + x,$$

или

$$-x - y + x + y = -x - x\sigma + y\sigma + x\sigma + x - y\sigma =$$
$$= x\sigma^2 + y\sigma - x\sigma^2 - y\sigma.$$

Пользуясь обычным обозначением для коммутаторов

$$-x - y + x + y = [x, y],$$

получим $[x, y] = [-x\sigma^2, -y\sigma]$.

*) Операция в G записывается дальше аддитивно.

После второго и третьего применения этих шагов получим:

$$[x, y] = [x\sigma, y\sigma^2]$$

и

$$[x, y] = [-x, -y].$$

Это приводит к равенству

$$-x - y + x + y = x + y - x - y,$$

или, другими словами, $x + y$ коммутирует с $y + x$. Положим $y + x = u$, тогда $x + y = -y + u + y$; так как x и y пробегают независимо G, то и u пробегает G, и $-y + u + y$ пробегает сопряженные элементы с u. Таким образом, *каждый элемент из G коммутирует со своими сопряженными.*

Из известного результата Леви (см., например, А. Г. Курош [3]) теперь уже следует, что G — нильпотентная группа.

В действительности имеет место даже следующая общая теорема (Томпсон [1]):

5.4. *Любая конечная группа, обладающая регулярным автоморфизмом простого порядка, нильпотентна.*

Доказательство этой теоремы в общем случае сложно и занимает много места. Вначале показывается, что такая группа разрешима, и потом отдельно рассматривается разрешимый случай. Доказательство для разрешимого случая мы сейчас приведем, следуя работе Г. Хигмена [2]. Пусть G — конечная разрешимая группа с регулярным автоморфизмом σ простого порядка p. Через H обозначим относительный голоморф G и σ. Легко видеть, что в H нет циклических подгрупп, порядок которых строго делится на p. Действительно, если P — силовская подгруппа в H, содержащая σ, то $P \cap G$ — нормальный делитель в P, и если этот нормальный делитель отличен от единицы, то в нем имеются неподвижные относительно σ элементы, отличные от единицы. Следовательно $P \cap G = E$ и P — группа порядка p. Если теперь A — циклическая подгруппа в H, содержащая элемент порядка p, то при некотором $g \in H$ будет $g^{-1}Ag \supset P$. Так как строгого включения здесь не может быть, то A имеет порядок p.

Из отмеченного свойства вытекает следующее утверждение: если A и B — две σ-допустимые подгруппы в G, причем A — нормальный делитель в B, то σ действует регулярно в B/A.

Дальше теорема доказывается по индукции. Пусть n — порядок G и пусть для меньших порядков теорема доказана. Допустим, что G не нильпотентна. Обозначим через $A=R(G)$ нильпотентный радикал группы G. Покажем, что A — q-группа для некоторого простого q. Если это не так, то пусть P и Q — две разные силовские подгруппы в A. По предположению индукции, фактор-группы G/P и G/Q нильпотентны. Но тогда и $G/P\cap Q= =G$ — нильпотентная группа. Это противоречит условию, и следовательно, A — q-группа. Легко видеть, что в G имеется некоторая элементарная абелева r-группа B, такая, что AB — характеристическая подгруппа. Так как AB больше A, то она не нильпотентна и поэтому совпадает с G. Ясно, что $AB/\Phi(A)$ — не нильпотентная группа ($\Phi(A)$ — подгруппа Фраттини), и значит, $\Phi(A)= =E$. Отсюда следует, что A — элементарная абелева q-группа. Рассмотрим, далее, представление группы H относительно A, определяемое внутренней парой (A, H). Ядром этого представления, как нетрудно понять, служит нормальный делитель A, и пусть $\Gamma=H/A$. Группу A можно также считать векторным пространством над простым полем характеристики q. Расширим это поле, присоединив к нему корни степени r из единицы, и перейдем к новому векторному пространству L. Группу Γ мы будем теперь рассматривать как линейную группу пространства L. Кроме того, можно считать, что B и σ лежат в Γ, и B является здесь нормальным делителем. Группа Γ, а вместе с ней и B — конечные группы, порядок которых взаимно прост с характеристикой основного поля. Так как B — абелева группа и основное поле содержит корни степени r из единицы, то B приводится к диагональному виду, и пространство L представимо соответственно в виде прямой суммы

$$L=L_0+L_1+\ldots+L_m$$

одномерных B-инвариантных подпространств.

Учитывая инвариантность B в Γ, мы можем также считать, что все эти подпространства переставляются автоморфизмом σ (ср. теорему Клиффорда из § 3.2). Пусть g_1 — отличный от единицы элемент в B. Тогда $g_2 = \sigma^{-1} g_1 \sigma \neq g_1$, и следовательно, для некоторого базисного элемента, скажем для $v_0 \in L_0$, можно считать, что $v_0 g_1 \neq v_0 g_2$. Легко видеть, что при этом условии $v_0 \sigma$ не лежит в L_0 и все $v_0 \sigma^i$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ принадлежат разным L_i. Но тогда, если $u = v_0 + v_0\sigma + \ldots + v_0 \sigma^{p-1}$, то $u \neq 0$ и $u\sigma = u$. Отсюда непосредственно следует, что и в A имеется неподвижный относительно σ элемент, что ведет к противоречию. Таким образом, группа G не может не быть нильпотентной, и теорема доказана.

Отметим еще следующий результат Хигмена: если локально нильпотентная группа допускает регулярный автоморфизм простого порядка p, то такая группа нильпотентна и класс нильпотентности ограничен некоторой функцией от p.

В списке литературы можно найти некоторые другие работы, посвященные регулярным автоморфизмам.

6. Разное. Как известно, наиболее старыми примерами характеристических подгрупп являются центр и коммутант группы. В предыдущих главах были рассмотрены некоторые общие приемы выделения характеристических подгрупп в группах. Несколько в стороне от этих приемов оказывается ядро — характеристическая подгруппа, близкая по значению к центру. Напомним, что *ядром группы* G называется совокупность всех элементов этой группы, перестановочных с каждой подгруппой из G. К определению ядра имеется еще и следующий подход. Пусть (G, G) — внутренняя групповая пара и $(S(G), G)$ — индуцируемая ею пара, в которой $S(G)$ — структура (решетка) всех подгрупп группы G. Ясно, что при этом ядром представления G относительно G является центр, а ядром представления относительно $S(G)$ служит ядро группы G.

Р. Бером доказано, что если ядро группы G отлично от единицы, то и центр этой группы также отличен от единицы. Из этой теоремы следует, что верхнее ядро

группы G совпадает с ее верхним гиперцентром. С помощью упомянутой теоремы Бера докажем следующее утверждение:

6.1. *Пусть G — группа, Γ — группа всех автоморфизмов группы G и $\sigma \to \bar{\sigma}$ — гомоморфизм группы Γ в группу индуцированных структурных автоморфизмов* (см. п. 1.1.2). *Если G — группа без центра, то указанный гомоморфизм является изоморфизмом.*

Обозначим через Φ ядро данного гомоморфизма. Ясно, что если $\hat{g}$ принадлежит пересечению $\Phi \cap I(G)$, то элемент g содержится в ядре группы G. Если теперь G без центра, то и ядро равно единице. Но из $\Phi \cap I(G) = E$ следует, что $\Phi = E$.

Таким образом, если G — группа без центра, то группу $\mathfrak{A}(G)$ можно рассматривать как подгруппу в группе всех автоморфизмов структуры всех подгрупп группы G.

Как уже отмечалось, группа без собственных характеристических подгрупп называется характеристически простой группой.

6.2. *Группа G тогда и только тогда характеристически проста, когда группа всех ее автоморфизмов $\mathfrak{A}(G) = \mathfrak{A}$ является максимальной подгруппой в голоморфе $H = H(G)$.*

Пусть A — характеристическая подгруппа в G. Тогда A — нормальный делитель в H, и если $\mathfrak{A}$ — максимальная подгруппа в H, то $H = A\mathfrak{A}$. Применяя дедекиндово правило, имеем:

$$G = G \cap A\mathfrak{A} = A(G \cap \mathfrak{A}) = A.$$

Пусть теперь подгруппа $\Phi \subset H$ содержит $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\Phi = \Phi \cap G\mathfrak{A} = \{\Phi \cap G, \mathfrak{A}\}.$$

Очевидно также, что $\Phi \cap G$ — характеристическая подгруппа в G, так что если G — характеристически простая группа, то или $\Phi \cap G = E$ или $\Phi \cap G = G$. В первом случае $\Phi = \mathfrak{A}$, а во втором — $\Phi = H$, т. е. $\mathfrak{A}$ — максимальная подгруппа в H.

Приведем теперь оценку для порядка группы автоморфизмов конечной группы. Пусть n — порядок группы G

и пусть в G выделена система образующих $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_m$ такая, что элемент a_i не принадлежит подгруппе, порожденной предыдущими элементами. Такую систему образующих всегда выделить можно, причем легко видеть, что $2^m \leqslant n$. Каждый автоморфизм группы переводит данную систему образующих в систему подобного типа, и знание двух таких систем полностью определяет автоморфизм. Поэтому порядок группы автоморфизмов группы G не превосходит число $n^m \leqslant n^{\frac{\log n}{\log 2}}$. При различных дополнительных предположениях о группе G эту оценку можно уточнять. См. еще Биркгоф—Холл [2].

В ряде работ устанавливается оценка снизу для порядка группы всех автоморфизмов конечной группы. Так, например, в работе Херстейна—Адни [1] (см. также Скотт [1]) показывается, что если p — простое число и $o(G)$ обозначает порядок группы G, то из того, что p^2 делит $o(G)$, следует, что p делит $o(\mathfrak{A}(G))$. В работе Адни [1] показывается, что если силовские p-подгруппы в G абелевы и p^n делит $o(G)$, то p^{n-1} делит $o(\mathfrak{A}(G))$. Наконец, в работах В. Ледермана и Б. Неймана [1, 2] показывается, что для любого простого числа p существует функция $g_p(h)$ целочисленного аргумента с целыми значениями, такая, что если порядок группы G делится на $p^{g_p(h)}$, то порядок $\mathfrak{A}(G)$ делится на p^h. В работе Грина [1] приводится следующая оценка для $g_p(h)$:

$$g_p(h) \leqslant \frac{1}{2} h(h+3)+1.$$

См. по этому поводу также работу И. Говарта [2].

Отметим еще, что в работе Г. Виландта [2] приводится оценка для порядка подгруппы в G, состоящей из всех элементов, неподвижных относительно каждого автоморфизма этой группы.

В заключение параграфа укажем, что в ряде работ рассматривались подстановки основного множества группы, в том или ином смысле близкие к автоморфизмам. Здесь, в частности, приводятся некоторые достаточные условия, при которых подстановка оказывается автоморфизмом.

§ 2. СОВЕРШЕННЫЕ ГРУППЫ. БАШНЯ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ

1. Совершенные группы. Как известно, группа G называется *совершенной*, если, во-первых, ее центр равен единице и, во-вторых, группа всех автоморфизмов $\mathfrak{A}(G)$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов $I(G)$. Имеется много примеров конкретных совершенных групп (см., например, теорему 5.1.8 из четвертой главы). Хорошо известно также следующее предложение:

1.1. *Если совершенная группа G является нормальным делителем некоторой другой группы $\mathfrak{G}$, то G — прямой множитель в $\mathfrak{G}$.*

Пусть совершенная группа G является нормальным делителем в группе $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{z}$ — централизатор G в $\mathfrak{G}$. Так как G без центра, то $\mathfrak{z} \cap G = E$. Покажем, что $\mathfrak{z}G = \mathfrak{G}$. Пусть g — произвольный элемент в $\mathfrak{G}$. В силу совершенности G, в этой подгруппе найдется такой a, что при любом $b \in G$ будет $g^{-1}bg = a^{-1}ba$. Это значит, что $ga^{-1} \in \mathfrak{z}$ и $g \in \mathfrak{z}G$.

Как заметил Р. Бер, эта теорема допускает обращение.

В частности, голоморф $H(G)$ совершенной группы G представим в виде произведения $G^r \times G^l$.

Легко также видеть, что если $H(G)$ есть прямое произведение групп G^r и G^l, то все автоморфизмы группы G являются внутренними и G не имеет центра.

В связи с этими замечаниями приведем еще (без доказательства) следующую теорему (В. Переманс [1]):

1.2. *Группа G в том и только в том случае является прямым множителем в своем голоморфе, когда G или совершенна, или есть прямое произведение совершенной группы без подгрупп индекса два и группы второго порядка.*

Как и раньше, если G — группа и $g \in G$, то внутренний автоморфизм, отвечающий элементу g, обозначается через $\hat{g}$. Докажем следующую теорему:

1.3. *Если группа внутренних автоморфизмов I группы без центра G характеристична в группе всех автоморфизмов $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(G)$, то $\mathfrak{A}$ — совершенная группа.*

Пусть τ — автоморфизм группы $\mathfrak{A}$. Так как I — характеристическая подгруппа в $\mathfrak{A}$, то τ индуцирует авто-

морфизм в I. Учитывая, что пара $(G, \mathfrak{A})$ изоморфна внутренней паре $(I, \mathfrak{A})$, мы можем заключить, что каждый автоморфизм группы I индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом группы $\mathfrak{A}$. Следовательно, в $\mathfrak{A}$ найдется такой элемент σ, что при любом $s \in I$ будет $s^{\tau} = \sigma^{-1} s \sigma = s^{\hat{\sigma}}$. Пусть $\eta = \tau \hat{\sigma}^{-1}$. Автоморфизм η действует в I тождественно. Согласно теореме 5.1.4.2 отсюда следует, что η совпадает с единицей и $\tau = \hat{\sigma}$. Этим теорема доказана. В качестве применения этой теоремы отметим следующие предложения.

1.4. *Если G — вполне приводимая группа без центра, то $\mathfrak{A}(G)$ — совершенная группа.*

Нужно показать, что в рассматриваемом случае $I(G) = I$ — характеристическая подгруппа в $\mathfrak{A}(G) = \mathfrak{A}$. Так как I — вполне приводимый нормальный делитель в $\mathfrak{A}$, централизатор которого равен единице, то I совпадает с вполне приводимым радикалом группы $\mathfrak{A}$. Отсюда и следует характеристичность I в $\mathfrak{A}$.

1.5. *Если группа G характеристически простая, то $\mathfrak{A}(G)$ — совершенная группа.*

Действительно, если η — автоморфизм группы $\mathfrak{A}$, то отсутствие в G собственных характеристических подгрупп означает, что либо $I^{\eta} = I$, либо $I^{\eta} \cap I = E$. Последнее невозможно, так как подгруппа I^{η} принадлежала бы централизатору подгруппы I, равному единице.

2. Определение башни. Пусть G — некоторая группа без центра. Отправляясь от этой группы, мы построим *башню групп автоморфизмов*. Нулевым этажом этой башни служит сама группа G: $G_0 = G$. Если G — совершенная группа, то этим нулевым этажом ограничивается вся башня, а если G не совершенна, то строим первый этаж, полагая $G_1 = \mathfrak{A}(G)$. Группа $\mathfrak{A}(G)$ также является группой без центра, и если она не совершенна, то можно переходить ко второму этажу. Продолжая процесс, возможно, на некотором (быть может, трансфинитном) этаже, мы «доберемся» до крыши, т. е. до совершенной группы, а может случиться, что такая крыша и не существует. Теперь уточним описание соответствующих построений.

Пусть γ — некоторое порядковое число. Будем определять группы G_β с $\beta \leqslant \gamma$. Как и раньше, считаем $G_0 = G$, а дальше — по индукции.

Пусть $\beta \leqslant \gamma$ и пусть для всех порядковых чисел $\alpha < \beta$ подгруппы G_α уже определены, причем так, что все они без центра и выполнены условия:

а) если число α непредельное, $\alpha = \mu + 1$, то $G_\alpha = \mathfrak{A}(G_\mu) \neq I(G_\mu) \approx G_\mu$. Это условие позволяет определить изоморфизм φ_μ каждой группы G_μ в группу $G_{\mu+1}$ по правилу $G_\mu \varphi_\mu = I(G_\mu) \subset G_{\mu+1}$;

б) в случае предельного α должно быть $G_\alpha = \bigcup\limits_{\mu<\alpha} G_\mu$, причем знак объединения здесь нужно понимать как переход к предельной группе для групп G_μ с системами изоморфизмов φ_μ. Хотя понятие предельной группы в книге А. Г. Куроша [3] определяется лишь для счетных последовательностей групп, его легко распространить и на общий случай. Эта предельная группа определяется однозначно группами G_μ и изоморфизмами φ_μ.

В соответствии с указанными условиями определяется и G_β. При этом возникают следующие две возможности.

1. Для каждого β $G_{\beta+1} \neq I(G_\beta)$. В этом случае будем говорить, что башня с основанием G не имеет крыши и G_β является β-м этажом башни.

2. Существует такое β, что $\mathfrak{A}(G_\beta) = I(G_\beta)$. Пусть в таком случае δ — первое порядковое число с этим свойством. В отмеченном случае будем говорить, что башня обрывается (имеет крышу) и δ является ее высотой. Понятно, что эта высота δ является инвариантом группы G. Для каждого β-го этажа справедливо следующее утверждение:

2.1. *Группа G_β обладает возрастающим нормальным рядом*

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\beta = G_\beta$$

таким, что: 1) *для каждого $\alpha < \beta$ группа $A_{\alpha+1}$ изоморфна $\mathfrak{A}(A_\alpha)$ и* 2) *нормализатор A_α в G_β совпадает с $A_{\alpha+1}$, а централизатор A_α в G_β совпадает с единицей группы G_β.*

Доказательство теоремы проведем индукцией по β. Для $\beta = 0,1$ теорема очевидна. Допустим сразу, что она

доказана для всех этажей башни, меньших данного β. Рассмотрим два случая.

Пусть вначале число β не предельное: $\beta = \mu + 1$.

Группа G_μ, по предположению индукции, обладает рядом с нужными свойствами. Пусть B_α, $\alpha \leqslant \mu$, — члены такого ряда. Обозначим $B_\alpha \varphi_\mu = A_\alpha$. Так как φ_μ — изоморфизм B_μ на $I(B_\mu) \subset G_\beta$, то в G_β мы получим возрастающий нормальный ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \\ \ldots \subset A_\mu \subset A_{\mu+1} = G_\beta. \qquad (*)$$

Покажем, что этот ряд обладает нужными свойствами. Свойство 1) для него очевидно. Очевидно также, что централизатор A_μ в G_β совпадает с единицей, а нормализатор — с самой группой G_β. Обозначим нормализатор и централизатор A_α в G_β, $\alpha \leqslant \beta$, соответственно через $\mathfrak{N}_\alpha$ и $\mathfrak{z}_\alpha$.

Индукцией по ряду (*) будем доказывать, что централизаторы всех членов этого ряда совпадают с $\mathfrak{z}_1$. Для самого $\mathfrak{z}_1$ это тривиально, и мы допустим, что утверждение доказано для всех $\alpha < \nu$, где $\nu \leqslant \mu$. Для ν предельного $\mathfrak{z}_\nu = \bigcap\limits_{\alpha<\nu} \mathfrak{z}_\alpha$ и $\mathfrak{z}_\nu = \mathfrak{z}_1$. Пусть $\nu = \delta + 1$ и пусть $z \in \mathfrak{z}_\delta$. Рассмотрим подгруппу $z^{-1} A_{\delta+1} z$. Ясно, что эта подгруппа принадлежит нормализатору A_δ в A_μ, который, по условию, совпадает с $A_{\delta+1}$. Отсюда легко следует, что $z^{-1} A_{\delta+1} z = A_{\delta+1}$. Пусть теперь y и x — произвольные элементы соответственно в $A_{\delta+1}$ и A_δ. Имеем:

$$y^{-1}xy = z^{-1}y^{-1}xyz = z^{-1}y^{-1}zxz^{-1}yz.$$

Отсюда следует, что $z^{-1}yzy^{-1}$ принадлежит централизатору A_δ в $A_{\delta+1}$. Так как такой централизатор равен единице, то z перестановочен с каждым y, так что $\mathfrak{z}_{\delta+1} = \mathfrak{z}_\delta = \mathfrak{z}_1$. Этим доказано также, что все $\mathfrak{z}_\alpha$ совпадают с $\mathfrak{z}_\mu$. Но $\mathfrak{z}_\mu = E$ и, таким образом, все $\mathfrak{z}_\alpha$ совпадают с единицей группы.

Теперь о нормализаторе $\mathfrak{N}_\alpha$. Пусть $x \in \mathfrak{N}_\alpha$. Тогда x индуцирует автоморфизм в A_α. Такой же автоморфизм в A_α индуцирует и некоторый элемент из $A_{\alpha+1}$. Если y — такой элемент, то xy^{-1} принадлежит централизатору

A_α, который, как мы уже знаем, совпадает с единицей. Следовательно, $x = y \in A_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{N}_\alpha = A_{\alpha+1}$.

Рассмотрим теперь случай предельного β.

Согласно определению предельной группы G_β в ней имеется возрастающая последовательность подгрупп A_α таких, что A_α — нормальный делитель в $A_{\alpha+1}$ и внутренняя групповая пара $(A_\alpha, A_{\alpha+1})$ изоморфна естественной паре $(G_\alpha, G_{\alpha+1})$. Кроме того, на предельных местах стоят объединения предыдущих членов, так что система подгрупп A_α составляет в G_β возрастающий нормальный ряд, удовлетворяющий условию 1). Так как в каждом A_α выполняется условие 2), то это условие удовлетворяется и во всей группе G_β. Теорема доказана.

Можно заметить, что приведенный способ построения башни с точки зрения «строительной техники» является по меньшей мере нерациональным: построив β-й этаж, мы все здание заменяем ему подобным и лишь потом воздвигаем следующий этаж. Правда, отождествляя подобные, этого можно было бы избежать.

3. Теорема Виландта. Интересной проблемой является изучение связей между свойствами группы G и высотой соответствующей башни. Некоторые условия, при которых башня имеет высоту $\delta = 1$, уже отмечались. Наиболее замечательным результатом в указанной проблематике является следующая теорема Виландта:

3.1. *Если G — конечная группа без центра порядка b, то башня с основанием G имеет конечную высоту h, причем, если a — порядок верхнего этажа G_h, то выполняется неравенство*

$$\log a < 3\frac{(\log b)^3}{(\log 2)^3}.$$

Разобьем доказательство на отдельные этапы.

1. Пусть G — некоторая группа. Нормальный ряд этой группы

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset H_n = G \qquad (1)$$

называется *рядом Леви*, если для каждого $i < n$ группа H_{i+1}/H_i является p_{i+1}-радикалом в G/H_i для некоторого простого числа p_{i+1}, т. е. пересечением всех силовских

p_{i+1}-подгрупп, а если G/H_i p-полупроста по всем простым числам, то H_{i+1}/H_i — ее вполне приводимый радикал. Каждая конечная группа обладает, очевидно, рядом Леви.

Пусть, далее, группа G обладает рядом Леви (1) и пусть еще эта группа является достижимой подгруппой в некоторой группе $\mathfrak{G}$. Введем обозначения: $\mathfrak{G}_1$ — p_1-радикал в $\mathfrak{G}$, если H_1 — p_1-группа, и вполне приводимый радикал, если H_1 — вполне приводимая группа. Ясно, что $\mathfrak{G}_1 \cap G = H_1$. Пусть для всех $k \leqslant i < n$ подгруппы $\mathfrak{G}_i$ уже определены, все они инвариантны в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_i \cap G = H_i$. Рассмотрим $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ и в этой фактор-группе подгруппу $H_{i+1}\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$. В силу соотношений

$$H_{i+1}\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i \approx H_{i+1}/\mathfrak{G}_i \cap H_{i+1} = H_{i+1}/H_i,$$

группа $H_{i+1}\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$ является p_{i+1}-группой или соответственно вполне приводима. В соответствии с тем, какой из случаев имеет место, полагаем $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ — p_{i+1}-радикал в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ или вполне приводимый радикал. Так как, очевидно, $H_{i+1}\mathfrak{G}_i$ — достижимая подгруппа в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i \supset H_{i+1}\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$. $\mathfrak{G}_{i+1}$ — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$. Рассмотрим пересечение $\mathfrak{G}_{i+1} \cap G$. Воспользовавшись выкладками:

$$(\mathfrak{G}_{i+1} \cap G)/H_i = (\mathfrak{G}_{i+1} \cap G)/(\mathfrak{G}_i \cap G) \approx$$
$$\approx (\mathfrak{G}_{i+1} \cap G)\,\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i,$$

заключаем, что $(\mathfrak{G}_{i+1} \cap G)/H_i$ одновременно с H_{i+1}/H_i является p_{i+1}-группой или вполне приводимой группой. Так как $H_{i+1} \subset \mathfrak{G}_{i+1}$, то отсюда следует, что $\mathfrak{G}_{i+1} \cap G = H_{i+1}$. Мы построили в $\mathfrak{G}$ инвариантный ряд

$$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{G}_{i+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G} \qquad (2)$$

такой, что $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ одновременно с H_{i+1}/H_i — p_{i+1}-группа или вполне приводимая группа, причем выполняется равенство $\mathfrak{G}_i \cap G = H_i$.

2. Везде дальше мы будем пользоваться этим рядом и, кроме того, будем предполагать, что G — конечная группа.

Для каждого $i < n$ определим в G систему подгрупп A_{i+1} по следующему правилу.

Если H_{i+1}/H_i — вполне приводимая группа, то $A_{i+1}=G$. Если же H_{i+1}/H_i — p_{i+1}-группа, то в качестве A_{i+1} возьмем в G двойственный p_{i+1}-радикал, т. е. пересечение всех нормальных делителей F из G, для которых G/F — p_{i+1}-группа. Эта подгруппа, очевидно, порождается подходящими p_{i+1}^k-степенями всех элементов из G.

Покажем, что при этом выполняются следующие включения:

$$[A_{i+1}, \mathfrak{G}_{i+1}] \subset H_{i+1}\mathfrak{G}_i.$$

Так как G — достижимая подгруппа в $\mathfrak{G}$, то убывающий ряд G-коммутантов группы $\mathfrak{G}$ при некотором m достигает G. В частности, убывающий ряд G-коммутантов инвариантной подгруппы $\mathfrak{G}_{i+1}$ при некотором m доходит до $G \cap \mathfrak{G}_{i+1} = H_{i+1}$. Отсюда следует, что существует нормальный ряд

$$\mathfrak{G}_i H_{i+1} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_k \subset F_{k+1} \subset \ldots \subset F_l = \mathfrak{G}_{i+1}$$

такой, что при любом $k < l$ будет $[F_{k+1}, G] \subset F_k$.

Допустим теперь, что $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ — вполне приводимая группа. Так как и $H_{i+1}\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$ — вполне приводимая группа, достижимая в $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$, то $H_{i+1}\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$ — нормальный делитель в $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$. Группа $\mathfrak{G}_{i+1}/H_{i+1}\mathfrak{G}_i$ также вполне приводима, и в этой группе имеется стабильный относительно группы G ряд. По теореме 3.3.6.2 отсюда следует, что $[G, \mathfrak{G}_{i+1}] \subset H_{i+1}\mathfrak{G}_i$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ — p_{i+1}-группа. Возьмем произвольный $g \in G$ и элемент x с условием $x \in F_{k+1} \setminus F_k$. Имеем:

$$g^{-1}xg = xy,\ y \in F_k,\ g^{-2}xg^2 = xy^2z,\ z \in F_{k-1}.$$

Так, по индукции, получим:

$$g^{-m}xg^m = xy^m z',\ z' \in F_{k-1}.$$

Пусть теперь m_i — индекс F_{k-1} в F_k. Тогда $g^{-m_i}xg^{m_i} = xz$, $z \in F_{k-1}$. Если дальше $m = \prod_{i=1}^{l} m_i$, то получаем:

$$g^{-m}xg^m = xa,\ a \in \mathfrak{G}_i H_{i+1}.$$

По условию, группа $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ — p_{i+1}-группа, и следовательно, $m = p_{i+1}^k$ с некоторым k. Так как, с другой сто-

роны, подгруппа A_{i+1} порождается элементами вида $g^{p_{i+1}^k}$ с k как угодно большим, то теперь ясно, что и в данном случае $[A_{i+1}, \mathfrak{G}_{i+1}] \subset \mathfrak{G}_i H_{i+1}$.

3. В этом пункте мы предполагаем, что централизатор $\mathfrak{z}(G)$ группы G в $\mathfrak{G}$ равен единице. Покажем, что в этом случае порядок группы $\mathfrak{G}$ ограничен некоторым числом, зависящим лишь от G. Начнем с оценки индекса $\mathfrak{G}_{i+1} : \mathfrak{G}_i$, $i < n$. (Здесь через $X : Y$ обозначается индекс подгруппы Y в группе X.)

Каждому элементу $g \in \mathfrak{G}_{i+1}$ мы сопоставим функцию $y = f_g(x)$ с аргументом x из A_{i+1} и со значениями в $\mathfrak{G}_i H_{i+1}$. Эта функция определяется правилом:

$$f_g(x) = [x, g].$$

Число всех этих функций ограничено, очевидно, числом $(\mathfrak{G}_i H_{i+1} : 1)^{(A_{i+1} : 1)}$. С другой стороны, если для каждого $x \in A_{i+1}$ будет $[x, g] = [x, h]$, т. е. если элемент gh^{-1} принадлежит централизатору $\mathfrak{z}(A_{i+1})$ подгруппы A_{i+1} в $\mathfrak{G}$, то $f_g = f_h$, так что получаем оценку:

$$\mathfrak{G}_{i+1} : [\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}] \leqslant (\mathfrak{G}_i H_{i+1} : 1)^{(A_{i+1} : 1)}. \tag{3}$$

Дальше будем показывать, что $\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}$. Отсюда будет следовать оценка:

$$\mathfrak{G}_{i+1} : \mathfrak{G}_i \leqslant (\mathfrak{G}_i H_{i+1} : 1)^{(A_{i+1} : 1)}. \tag{4}$$

Если $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ — вполне приводимая группа, то $\mathfrak{z}(A_{i+1}) = \mathfrak{z}(G) = E$, и нужное включение очевидно.

Пусть $\mathfrak{G}_{i+1}/\mathfrak{G}_i$ — p_{i+1}-группа. Обозначим через P некоторую силовскую p_{i+1}-подгруппу в G. Ясно, что $A_{i+1}P = G$, и поэтому пересечение $\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{z}(P)$, как подгруппа в $\mathfrak{z}(G)$, совпадает с единицей. Пусть дальше $\tilde{P}$ — силовская p_{i+1}-подгруппа в $(\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}) G$, содержащая P. Тогда $\mathfrak{z}(\tilde{P}) \subset \mathfrak{z}(P)$ и $\mathfrak{z}(\tilde{P}) \cap \mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1} = E$. Легко видеть, что подгруппа $\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}$ является нормальным делителем в $(\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}) G$, так что пересечение $\tilde{P} \cap \mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}$ есть нормальный делитель в $\tilde{P}$. Если это пересечение нетривиально, то в нем содержится нетривиальная подгруппа центра группы $\tilde{P}$. По предыдущему это невозможно. Отсюда получаем, что $\tilde{P} \cap \mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1} = E$ и p_{i+1} не делит порядок

$\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1}$. Это возможно лишь в том случае, когда выполняется включение $\mathfrak{z}(A_{i+1}) \cap \mathfrak{G}_{i+1} \subset \mathfrak{G}_i$.

Дальше имеем:

$$\mathfrak{G}_i H_{i+1} : \mathfrak{G}_i = H_{i+1} : (\mathfrak{G}_i \cap H_{i+1}) = H_{i+1} : H_i,$$
$$\mathfrak{G}_i H_{i+1} : 1 = (\mathfrak{G}_i H_{i+1} : \mathfrak{G}_i)(\mathfrak{G}_i : 1) = (H_{i+1} : H_i)(\mathfrak{G}_i : 1).$$

Отсюда

$$\mathfrak{G}_{i+1} : \mathfrak{G}_i \leqslant (H_{i+1} : H_i)^{(A_{i+1}:1)} (\mathfrak{G}_i : 1)^{(A_{i+1}:1)}.$$

Умножая обе части неравенства на $(\mathfrak{G}_i : 1)$, получим:

$$(\mathfrak{G}_{i+1} : 1) \leqslant (H_{i+1} : H_i)^{(A_{i+1}:1)} (\mathfrak{G}_i : 1)^{(A_{i+1}:1)+1}.$$

Положим $M_0 = 1$,

$$M_{i+1} = (H_{i+1} : H_i)^{(A_{i+1}:1)} M_i^{(A_{i+1}:1)+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ясно, что $\mathfrak{G}_n : 1 \leqslant M_n$. Так как централизатор $\mathfrak{G}_n$ в $\mathfrak{G}$ равен единице, то порядок всей группы $\mathfrak{G}$ ограничен числом $M_n!$. Число $M_n!$ зависит только от группы G.

Доказательство теоремы Виландта завершается теперь следующим образом: пусть G_m — некоторый m-этаж (m натуральное) башни с основанием G, G — конечная группа без центра. Согласно теореме 2.1 в G_m имеется достижимая подгруппа G', изоморфная G и с единичным централизатором. Тогда порядок G_m ограничен числом, зависящим лишь от G, а следовательно, и высота башни с основанием G ограничена натуральным числом, зависящим от G.

Полученная выше оценка для порядка группы $\mathfrak{G}$ является, конечно, очень грубой. Однако уточнением ее мы уже не станем заниматься.

Заметим, далее, что пока мало известно об аналогичных теоремах для бесконечных групп.

Имеются также теоремы, параллельные теореме Виландта и относящиеся к группам и алгебрам Ли.

§ 3. ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ ГОЛОМОРФА

1. Совершенность голоморфа. Вопрос о совершенности группы автоморфизмов рассматривался в предыдущем параграфе в предположении, что исходная группа не имеет центра. С другой стороны, как мы сейчас увидим,

голоморф группы G может быть совершенным лишь для абелевой группы G.

Пусть $H = H(G)$ — голоморф группы G: $H = G^r \leftthreetimes \mathfrak{A}(G)$.

Рассмотрим один специальный автоморфизм голоморфа.

Как мы уже знаем, вместе с $G^r = \overline{G}$ подгруппа G^l является нормальным делителем в H, G^r и G^l изоморфны и соответствие $g^r \leftrightarrow g^l = \hat{g} \cdot \overline{g^{-1}}$ определяет нужный изоморфизм. Мы имеем здесь частичный автоморфизм, который сейчас продолжим до полного автоморфизма группы $H(G)$. Вначале покажем, что отображение $(g^r)^\mu = g^l$ определяет эквивалентность внутренних пар $(G^r, \mathfrak{A}(G))$ и $(G^l, \mathfrak{A}(G))$. Действительно, пусть $g \in G$ и $\sigma \in \mathfrak{A}(G)$. Тогда

$$(\sigma^{-1}\bar{g}\sigma)^\mu = (\overline{g\sigma})^\mu = \widehat{g\sigma} \cdot \overline{(g\sigma)^{-1}} = \sigma^{-1}\hat{g}\sigma \cdot \sigma^{-1}\overline{g^{-1}}\sigma = \\ = \sigma^{-1} \cdot \hat{g}\overline{g^{-1}} \cdot \sigma = \sigma^{-1}\bar{g}^\mu\sigma,$$

что и требовалось.

Теперь, ссылаясь на п. 5.1.3, можно утверждать, что отображение

$$\bar{g}\sigma \leftrightarrow \hat{g}\overline{g^{-1}}\sigma$$

определяет автоморфизм группы H. Обозначим этот автоморфизм через η_0. η_0 есть автоморфизм второго порядка.

Непосредственно из определения автоморфизма η_0 вытекает, что подгруппа $\overline{G}$ в том и только в том случае допустима относительно η_0, когда G — абелева группа. Следовательно, если G не абелева, то η_0 не является внутренним автоморфизмом.

Из этих замечаний и следует, что $H(G)$ только тогда может быть совершенной группой, когда G — абелева группа.

Совершенность группы предполагает отсутствие в ней центра. Рассмотрим в связи с этим центр голоморфа $H(G)$. Обозначим его через $Z(H)$. Ясно, что $Z(H) \subset G^r \cap G^l = \overline{Z(G)} = Z(\overline{G})$. Отсюда уже непосредственно следует, что $Z(H)$ есть совокупность всех таких $\bar{g} \in \overline{G}$, для которых g есть неподвижный элемент относительно всех автоморфизмов группы G.

Допустим, что G — абелева группа, $G^l = G^r$. В этом случае отображение $\pi: x \to x^{-1}$ есть автоморфизм, и не-

подвижными точками этого автоморфизма служат только элементы второго порядка из G, так что, если в G нет элементов второго порядка, то центр голоморфа $H(G)$ совпадает с единицей. В действительности мы даже доказали, что централизатор подгруппы $\{\overline{G}, \pi\}$ совпадает с единицей.

Заметим еще, что для периодических абелевых групп отсутствие элементов второго порядка означает также, что отображение $x \to x^2$ является автоморфизмом группы.

Докажем теперь следующее предложение (см., например, В. Шпехт [1]):

1.1. *Если абелева группа G является характеристической подгруппой своего голоморфа и отображение $x \to x^2$ есть автоморфизм группы G, то $H(G)$ — совершенная группа.*

Пусть η — автоморфизм группы H. При условиях теоремы η индуцирует автоморфизм в $\overline{G}$, и следовательно, найдется $\varphi \in \mathfrak{A}(G)$ такой, что при любом $x \in G$ будет $\bar{x}^{\eta} = \varphi^{-1}\bar{x}\varphi$. Но тогда $\eta' = \eta\hat{\varphi}^{-1}$ действует тождественно в $\overline{G}$. Согласно п. 5.1.4 заключаем, что при любом $a \in H$ элемент $a^{-1}a^{\eta'}$ принадлежит централизатору подгруппы G^r, т. е. $a^{-1}a^{\eta'} \in G^l = G^r$.

В частности, для автоморфизма π имеем $\pi^{\eta'} = \pi\bar{g}$, $g \in G$. По условию, в группе G^r имеется такой элемент $\bar{g}_0$, что $\bar{g}_0^2 = \bar{g}$. Дальше имеем:

$$\pi^{\eta'} = \pi\bar{g} = \pi\bar{g}_0^2 = \pi\bar{g}_0\bar{g}_0 = \pi\bar{g}_0\pi^{-1}\pi\bar{g}_0 = \bar{g}_0^{-1}\pi\bar{g}_0 = \pi^{\hat{\bar{g}}_0}.$$

Обозначим $\xi = \eta'\hat{\bar{g}}_0^{-1}$. Автоморфизм ξ оставляет неподвижным элемент π, а также каждый элемент из G^r, так что при любом $a \in H$ элемент $a^{-1}a^{\xi}$ принадлежит централизатору подгруппы, порожденной G^r и элементом π. Из предыдущего мы знаем, что такой централизатор равен единице. Следовательно, ξ — тождественный автоморфизм группы H. Окончательно имеем:

$$\eta' = \hat{\bar{g}}_0, \quad \eta = \hat{\bar{g}}_0 \cdot \hat{\varphi} = \widehat{\bar{g}_0\varphi},$$

и каждый автоморфизм группы H оказывается внутренним автоморфизмом. Понятно также, что H — группа без центра.

Положение группы G в ее голоморфе и условия характеристичности G в $H(G)$ — это интересный самостоятельный вопрос. Только что мы видели, что если в абелевой группе G отображение $x \to x^2$ есть автоморфизм, то характеристичность G в $H(G)$ равносильна совершенности голоморфа.

Следующее предложение дает один случай, когда нужная характеристичность имеет место.

1.2. *Если G — абелева группа и $\mathfrak{A}(G)$ действует в $G \setminus E$ транзитивно, то G^r является характеристической подгруппой голоморфа $H(G)$.*

Так как G — абелева группа, то централизатор подгруппы $\overline{G}$ в H, равный G^l, совпадает с $\overline{G}$. Отсюда следует, что каждый неединичный нормальный делитель из H имеет нетривиальное пересечение с $\overline{G}$. Пусть F — такой нормальный делитель и g — отличный от единицы элемент, принадлежащий пересечению $F \cap \overline{G}$. Тогда вместе с g к F принадлежат все элементы вида $\sigma^{-1}\bar{g}\sigma = \overline{g\sigma}$, а вследствие транзитивности $\mathfrak{A}(G)$ такие элементы исчерпывают $\overline{G}$, так что всякий собственный нормальный делитель из H содержит подгруппу G^r.

Пусть, далее, η — автоморфизм группы H. Тогда $\overline{G}^{\eta}$ — абелев нормальный делитель в H, содержащий G^r. Но G^r совпадает со своим централизатором. Следовательно, $\overline{G}^{\eta} = \overline{G}$.

Общие условия совершенности голоморфа абелевой группы рассматривались в работах В. Переманса. Здесь, в частности, доказано, что если отображение $x \to 2x$ является автоморфизмом группы G и G удовлетворяет одному из следующих условий:

А. G неразложима в прямое произведение,

Б. G — прямая сумма циклических групп,

В. G — полная группа,

то голоморф H — совершенная группа.

Вопрос о том, насколько существенно требование о существовании автоморфизма $x \to 2x$, остался здесь неисследованным. Заметим, что еще Миллером (1909 г.) было доказано, что голоморф конѐчной абелевой группы нечетного порядка всегда является совершенной группой.

Подробное исследование структуры голоморфа конечной абелевой группы проведено в работе В. Милса [1].

Голоморфам бесконечных абелевых групп посвящен цикл работ И. Х. Беккера.

2. Группа автоморфизмов голоморфа. Пусть задана некоторая групповая пара (G, Γ) и пусть $H = G \leftthreetimes \Gamma$ — отвечающее этой паре полупрямое произведение. Допустим, далее, что η — автоморфизм группы H, оставляющий подгруппу G инвариантной. Если $a \in \Gamma$, то образ a^{η} однозначно представим в виде $a^{\eta} = a'b$, $a' \in \Gamma$, $b \in G$. Мы положим $a' = a^{\theta}$. Легко проверяется, что отображение $a \to a^{\theta}$ есть автоморфизм группы Γ. Определим еще отображение u: $\Gamma \to G$ по правилу: $u(a^{\theta}) = b$. Непосредственная проверка показывает, что функция u обладает следующим свойством:

$$u(a_1a_2) = (u(a_1))^{a_2} \cdot u(a_2) = u^{a_2}(a_1) \cdot u(a_2).$$

Всякое отображение u: $\Gamma \to G$, удовлетворяющее отмеченному условию, называется *скрещенным гомоморфизмом.* Понятие скрещенного гомоморфизма полезно при рассмотрении группы автоморфизмов голоморфа, и мы посвятим ему еще несколько замечаний.

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, F — ее нормальный делитель, $(F, \mathfrak{G})$ — соответствующая внутренняя пара и φ — эндоморфизм группы $\mathfrak{G}$ такой, что при любом $g \in \mathfrak{G}$ элемент $[g, \varphi] = g^{-1} \cdot g\varphi$ принадлежит F. Ввиду легко проверяемого тождества $[g_1g_2, \varphi] = [g_1, \varphi]^{g_2}[g_2, \varphi]$ функция $u(g) = [g, \varphi]$ есть скрещенный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ в F. Если, с другой стороны, u — скрещенный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ в F, то, полагая $g\varphi = g \cdot u(g)$, мы определим эндоморфизм φ такой, что $[g, \varphi] = u(g)$. Действительно,

$$(g_1g_2)\varphi = g_1g_2u(g_1g_2) = g_1g_2 \cdot u^{g_2}(g_1)\, u(g_2) =$$
$$= g_1 \cdot u^{g_2g_2^{-1}}(g_1) \cdot g_2u(g_2) = g_1u(g_1) \cdot g_2u(g_2) = g_1\varphi \cdot g_2\varphi.$$

Пусть теперь заданы две групповые пары $(\mathfrak{G}_1, \Gamma)$ и $(\mathfrak{G}_2, \Gamma)$ с общей действующей группой Γ, и допустим, что еще задан гомоморфизм ν: $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$, перестановочный с действием группы Γ. Тогда если u: $\Gamma \to \mathfrak{G}_1$ — скрещенный гомоморфизм, то и отображение νu: $\Gamma \to \mathfrak{G}_2$ — скрещенный гомоморфизм. Проверяется это непосредственно:

$$\nu u(a_1a_2) = \nu(u^{a_2}(a_1) \cdot u(a_2)) = (\nu u)^{a_2}(a_1) \cdot \nu u(a_2).$$

Перейдем теперь к голоморфу. При этом вначале мы переобозначим некоторые подгруппы. Вызвано это нарастающими здесь трудностями с «многоэтажностью» в обозначениях. Через $H = H(G)$ по-прежнему будем обозначать голоморф группы G, а саму группу G как подгруппу в H теперь обозначим через B. Группу $\mathfrak{A}(G)$ всех автоморфизмов группы G, также лежащую в H, обозначим через A, а через C обозначим централизатор B в H (вместо G^l). Существует автоморфизм второго порядка η_0, переводящий B в C и определяющий эквивалентность внутренних пар (B, A) и (C, A), причем $H = B \leftthreetimes A = C \leftthreetimes A$. Кроме того, если $x \in B$, то ему отвечает внутренний автоморфизм — элемент в A, этот элемент обозначим сейчас через $\tilde{x}$. Отображение $x \to \tilde{x}$ есть гомоморфизм группы B в A, удовлетворяющий условию: $\widetilde{a^{-1}xa} = a^{-1}\tilde{x}a$ при любых $x \in B$ и $a \in A$. Ядром этого гомоморфизма служит центр группы B. Отметим еще, что при любом $x \in B$ выполняется равенство $x\eta_0 = \tilde{x} \cdot x^{-1}$ и что каждый автоморфизм группы B индуцируется некоторым элементом из A.

Весь этот перечень условий и новых обозначений позволит также лучше рассмотреть абстрактную природу приводимых ниже построений.

Пусть дальше $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(H)$ — группа всех автоморфизмов голоморфа H, Φ — $\mathfrak{A}$-нормализатор подгруппы $B \subset H$ и $\hat{H}$ — группа внутренних автоморфизмов голоморфа. Ясно, что $\hat{H} \subset \Phi$. Рассмотрим некоторые общие факты, относящиеся к этим группам. При этом группа $G = B$ не обязательно коммутативна.

Пусть $\mu \in \Phi$. Автоморфизм μ индуцирует также автоморфизм группы B, и поэтому найдется такой элемент $a \in A$, что $\eta = \mu\widehat{a^{-1}}$ действует тождественно в B. Отображение $\mu \to a$ является представлением Φ относительно B, и ядром этого представления — обозначим его через Σ — служит совокупность всех $\tau \in \Phi$, действующих в B тождественно, так что $\eta \in \Sigma$. Очевидно также, что пересечение ядра Σ с группой $\hat{A}$ внутренних автоморфизмов голоморфа, индуцированных элементами из A, совпадает с единицей в Φ. Таким образом, группа Φ является полупрямым произведением: $\Phi = \Sigma \leftthreetimes \hat{A}$.

Для описания группы Σ мы теперь воспользуемся скрещенными гомоморфизмами из A в B. Если η — автоморфизм группы H, то в соответствии с приводившимися ранее замечаниями имеем:

$$a^{\eta} = a^{\theta} \cdot u(a^{\theta}),$$

где a — произвольный элемент в A, θ — автоморфизм группы A и u — скрещенный гомоморфизм. Найдем теперь эти θ и u в предположении, что η принадлежит Σ. Если $\eta \in \Sigma$, то при любом $h \in H$ элемент $[h, \eta]$ принадлежит централизатору подгруппы B в H, т. е. C. Это значит, что отображение $h \to [h, \eta]$ есть скрещенный гомоморфизм H в C. Если, далее, воспользоваться автоморфизмом η_0 и положить $v(h) = [h, \eta]\eta_0$, $h \in A$, то, согласно одному из приводившихся замечаний, $v(h)$ есть скрещенный гомоморфизм A в B. Аналогично заключаем, что и отображение $a \to \widetilde{v(a)}$ есть скрещенный гомоморфизм, и следовательно, отображение $a \to a\widetilde{v(a)}$ является эндоморфизмом группы A. В действительности, как мы сейчас увидим, это отображение является автоморфизмом. Из приводившихся сейчас переходов непосредственно видно, что имеет место соотношение $a^{\eta} = a \cdot \widetilde{v(a)} \cdot v(a)^{-1}$. Кроме того, мы имели $a^{\eta} = a^{\theta} \cdot u(a^{\theta})$. Учитывая однозначность записи, теперь заключаем: $a^{\theta} = a\widetilde{v(a)}$ и $u(a^{\theta}) = v(a)^{-1}$. Если здесь перейти от a к $a^{\theta^{-1}}$, то получим:

$$a = a^{\theta^{-1}}\widetilde{v(a^{\theta^{-1}})} = a^{\theta^{-1}}\widetilde{u(a)}^{-1}; \quad a^{\theta^{-1}} = a \cdot \widetilde{u(a)}.$$

Итак, каждому η мы сопоставили скрещенный гомоморфизм u, который также определяет автоморфизм θ.

Пусть, с другой стороны, задан скрещенный гомоморфизм u: $A \to B$ такой, что отображение $a \to a \cdot \widetilde{u(a)}$ есть автоморфизм группы A. Если теперь перейти от u к v и для любого $h \in H$, $h = ab$, $a \in A$, $b \in B$, положить:

$$(ab)\eta = a\eta \cdot b = a \cdot \widetilde{v(a)} \cdot v(a)^{-1} \cdot b,$$

то, как нетрудно проверить, при этом будет определен автоморфизм группы H, принадлежащий Σ. Кроме того, если этому η сопоставить по указанному выше правилу

скрещенный гомоморфизм A в B, то мы придем к исходному u. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между элементами из Σ и некоторыми скрещенными гомоморфизмами — отображениями A в B. Обозначим множество всех рассматриваемых здесь скрещенных гомоморфизмов через U и определим в U умножение. Пусть u и v принадлежат U. Их произведение $u \times v = w$ мы определим правилом:

$$w(a) = u(a) \cdot v(a) \cdot u\widetilde{(v(a))}.$$

Нетрудно установить, что при таком умножении U становится группой, а определенное раньше соответствие дает изоморфизм между этой группой и группой Σ. Таким образом, мы получаем характеристику группы Σ на языке группы скрещенных гомоморфизмов U.

Перейдем дальше к группе $\hat{H}$. Каждому внутреннему автоморфизму $\hat{h}$, $h \in H$, отвечает элемент $a_h \in A$ такой, что $\hat{c} = \hat{h}\hat{a}_h^{-1} \in \Sigma$, $c \in C$ и $c = \tilde{b} \cdot b^{-1}$, $b \in B$. Для каждого $a \in A$ мы имеем:

$$a\hat{c} = c^{-1}ac = b\tilde{b}^{-1}a\tilde{b}b^{-1} = aa^{-1}b\tilde{b}^{-1}a\tilde{b}b^{-1} = ab^a(\widetilde{b^a})^{-1} \cdot \tilde{b} \cdot b^{-1} =$$
$$= a(\widetilde{b^a})^{-1}\tilde{b}b^{-1}b^a = a\,\widetilde{(b^a)^{-1}b}\,((b^a)^{-1} \cdot b)^{-1}.$$

При этом получается скрещенный гомоморфизм специального вида:

$$v(a) = b^{-a+1} = a^{-1}b^{-1}ab = [a,\ b],$$

а соответствующий $u(a)$, как нетрудно убедиться, вычисляется по формуле $u(a) = [a,\ b^{-1}]$. Ясно, что каждый элемент из B определяет такие скрещенные гомоморфизмы. Скрещенные гомоморфизмы указанного вида называются главными. Они, естественно, образуют нормальный делитель в U, изоморфный ядру Σ_0 гомоморфизма $h \to a_h$. Очевидно, что $\Sigma_0 = \Sigma \cap \hat{H}$ и $\hat{H} = \Sigma_0 \leftthreetimes \hat{A}$.

Что касается структуры самой группы $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(H)$, то в общем случае о ней известно мало. Для некоммутативной группы G в разности $\mathfrak{A} \setminus \Phi$ содержится автоморфизм η_0, определенный раньше. Приведем сейчас один случай, когда группа $\mathfrak{A}$ исчерпывается своей подгруппой Φ и смежным классом $\Phi\eta_0$.

2.1. *Если $G = B$ — характеристически простая неабелева группа, то группа* Φ *является подгруппой индекса* 2 *в* $\mathfrak{A}$.

Пусть μ — автоморфизм группы H, не принадлежащий Φ. Тогда B^{μ} — нормальный делитель в H, и если бы было $B^{\mu} \cap B \neq E$, то ввиду элементарности B должно быть $B \subset B^{\mu}$. Используя обратный автоморфизм, мы получим $B = B^{\mu}$. Но это невозможно, так как μ не принадлежит Φ. Следовательно, $B^{\mu} \cap B = E$ и $B^{\mu} \subset C$.

Используя далее эквивалентность внутренних групповых пар (B, A) и (C, A), мы должны теперь заключить, что $B^{\mu} = C$. Следовательно, группа $\mathfrak{A}$ индуцирует группу подстановок на множестве из двух элементов B и C. Эта группа второго порядка, а ядром соответствующего гомоморфизма служит подгруппа Φ. Теорема доказана.

В работе Ю. А. Гольфанда [1], которую мы использовали в этом пункте, рассмотрены также некоторые другие специальные случаи группы G. Некоторые обобщения результатов Ю. А. Гольфанда на относительные голоморфы содержатся в работе Ху Най-хао [1]. В этой работе используется удобный способ описания автоморфизмов полупрямых произведений, основанный на изображении их обобщенными матрицами, аналогичными тем, что рассматривались в п. 3.5.3.

Отметим еще, что в работе В. Милса [4] рассматриваются условия распадения голоморфа H в прямое произведение собственных подгрупп. Показывается, что это возможно тогда и только тогда, когда группа G совершенна или распадается в прямое произведение собственных характеристических подгрупп. Здесь же указаны условия распадения группы H в прямое произведение конечного числа неразложимых множителей. По теме настоящего параграфа имеется еще ряд других работ (см. список литературы).

§ 4. ДРУГИЕ ВОПРОСЫ

1. Еще о квазикольцах, порожденных эндоморфизмами группы. Такие квазикольца уже рассматривались в п. 1.3 настоящей главы и в более общей ситуации в п. 1.1.6. Сделаем здесь некоторые дополнительные замечания.

Пусть G — группа и K — квазикольцо, порожденное некоторым множеством эндоморфизмов группы G. Мы допустим еще, что K содержит все внутренние автоморфизмы группы G. В таком случае все K-допустимые подгруппы из G оказываются нормальными делителями в G, и неприводимость здесь совпадает с сильной неприводимостью. В частности, если L — подкольцо в K, выдерживающее правые умножения, то при любом $g \in G$ подгруппа gL является нормальным делителем.

Если дальше g — произвольный элемент в G, K_g — аннулятор этого элемента в K, то, как мы знаем, модули (gK, K) и $(K^+/K_g, K)$ эквивалентны. Отсюда следует, что каждое подкольцо из K, содержащее K_g и выдерживающее умножения справа на элементы из K, является нормальным делителем аддитивной группы K^+. Это значит, что каждое такое подкольцо вместе с K_g оказывается правым идеалом в K.

Допустим дальше, что G — простая группа. В этом случае при любом $g \in G$ будет $gK = G$ и K^+/K_g — группа, изоморфная G. Если $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — некоторые элементы в G, $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — их аннуляторы, а L — пересечение всех этих K_i, то по теореме Алберта (см. п. 1.2.6) фактор-группа K^+/L^+ изоморфна прямой сумме некоторого числа копий простой группы G. Если еще предполагать, что G — конечная группа и элементы g_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, исчерпывают всю эту группу, то L совпадает с нулем, и следовательно, в этом случае аддитивная группа K^+ является прямой суммой конечного числа экземпляров группы G. Детальному рассмотрению случая, когда G — конечная простая группа, посвящена интересная работа А. Фрёлиха [3]. В этой работе, в частности, показывается, что если $K = K(G)$ — квазикольцо, порожденное всеми эндоморфизмами конечной простой группы G, то K порождается также одними внутренними автоморфизмами этой группы.

Вполне возможно, что, используя структурную теорию Фиттинга конечных групп, можно будет сравнительно детально изучить квазикольца, порожденные эндоморфизмами конечных групп.

Построению структурных теорий квазиколец посвящен ряд работ (см., например, В. Дескинс [1, 2] и др.

по списку литературы). В этих работах, как правило, предполагается условие минимальности для правых идеалов, и полученные здесь результаты являются естественным обобщением соответствующих результатов теории колец. В работе Г. Бетча [1] ограничений конечности нет, и здесь определяется радикал, аналогичный радикалу Джекобсона. См. по этому поводу также п. 1.4 из третьей главы. Отметим еще, что в работе Х. Нейман [1] рассмотрены применения почти колец к теории многообразий групп.

2. Финитная аппроксимируемость группы автоморфизмов. Как известно, группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если в G имеется система нормальных делителей конечного индекса H_α таких, что пересечение всех этих H_α совпадает с единицей в G. Если Γ — группа автоморфизмов группы G, то G назовем Γ-*финитно аппроксимируемой*, если все H_α могут быть выбраны допустимыми относительно Γ. Покажем, что если Γ — группа автоморфизмов группы G и G Γ-финитно аппроксимируема, то и Γ — финитно аппроксимируемая группа. Действительно, пусть $[H_\alpha]$ — соответствующая система Γ-допустимых нормальных делителей конечного индекса в G. Через $\mathfrak{z}_\alpha$ обозначим ядро представления Γ относительно G/H_α. Каждая подгруппа $\mathfrak{z}_\alpha$ имеет конечный индекс в Γ, и пересечение всех $\mathfrak{z}_\alpha$ совпадает, очевидно, с единицей в Γ. Имеет место следующая теорема (Г. Баумслаг [2], Д. М. Смирнов [5]):

2.1. *Если G — финитно аппроксимируемая группа с конечным числом образующих, то всякая ее группа автоморфизмов также финитно аппроксимируема.*

Достаточно воспользоваться следующим результатом Б. Неймана [2]: если группа G имеет конечное число образующих и H — подгруппа в G конечного индекса, то в этой подгруппе содержится подгруппа $\tilde{H}$ также конечного индекса в G и вполне характеристическая. Поэтому, если G финитно аппроксимируема, то такая группа также и $\mathfrak{A}(G)$-финитно аппроксимируема.

Приведем теперь доказательство упомянутого результата Б. Неймана. С этой целью мы воспользуемся одной общей конструкцией Б. Неймана, имеющей большой

самостоятельный интерес. Пусть F_n — свободная группа с n свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$; элементы этой группы — слова $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если, далее, $\mathfrak{G}$ — произвольная группа, то такие слова можно рассматривать как функции n переменных, определенные на $\mathfrak{G}$ и со значениями в $\mathfrak{G}$. Пусть $V_n = V_n(\mathfrak{G})$ — совокупность всех $f \in F_n$, которые тождественно обращаются в единицу на группе $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что V_n — подгруппа в F_n, причем вполне характеристическая. Кроме того, если H — нормальный делитель в F_n такой, что $F_n/H \approx \mathfrak{G}$, то $H \supset V_n$.

Теперь покажем, что если $\mathfrak{G}$ — конечная группа, то и F_n/V_n — конечная группа. В самом деле, два элемента f_1 и $f_2 \in F_n$ тогда и только тогда сравнимы по модулю V_n, когда они одинаковы как функции на $\mathfrak{G}$. Так как на $\mathfrak{G}$ имеется лишь конечное число функций n переменных, то отсюда следует, что F_n/V_n — конечная группа.

Пусть теперь G — произвольная группа с n образующими, H — ее инвариантная подгруппа, такая, что $G/H \approx \approx \mathfrak{G}$ — конечная группа. Пусть еще μ — некоторый эпиморфизм F_n на G. Легко понять, что $V_n^\mu = \tilde{H}$ удовлетворяет нужным условиям.

Недавно Д. М. Смирнов заметил, что теорема 2.1 без существенных изменений переносится и на общий случай, когда G — универсальная алгебра.

Как показал А. И. Мальцев, если некоторая группа есть полупрямое произведение финитно аппроксимируемой подгруппы и финитно аппроксимируемого нормального делителя с конечным числом образующих, то такая группа также является финитно аппроксимируемой группой. Отсюда получаем результат:

2.2. *Голоморф финитно аппроксимируемой группы с конечным числом образующих также финитно аппроксимируем.*

Из теоремы 2.1 вытекает также, что группа автоморфизмов полициклической группы является финитно аппроксимируемой группой.

Приведем дальше один результат работы О. Грюна [2].

Пусть через G обозначена группа с конечным числом s образующих, не изоморфная никакой своей истинной фактор-группе, F — свободная группа ранга s, Φ — та-

кой ее нормальный делитель, что $\Gamma/\Phi = G$. Утверждается следующее:

2.3. *Если* σ — *такой эндоморфизм группы* F, *что* $F^\sigma\Phi = F$ *и* $\Phi^\sigma \subset \Phi$, *то отображение* $g^\sigma\Phi \to g\Phi$, $g \in F$, *определяет автоморфизм группы* G. *Всякий автоморфизм группы* G *может быть получен указанным способом.*

В заключение отметим еще, что в работе И. Альперина [1] показано, что группа всех автоморфизмов конечнопорожденной группы G тогда и только тогда конечна, когда в G имеется центральная циклическая подгруппа конечного индекса. Конечность числа образующих при этом существенна, ср. Врис — Миранда [1]. См. также Халлет — Гирш [1].

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

СТАБИЛЬНОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ

§ 1. ФИНИТНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ

1. Введение. Настоящая глава посвящена стабильным и обобщенным стабильным действующим группам. В ней рассматриваются свойства таких групп, а также связи с нильпотентными и обобщенными нильпотентными группами.

Раньше мы уже видели, что понятие стабильности действующей группы и различные разновидности этого понятия играют важную роль в общей теории пар и, в частности, в общей теории групп автоморфизмов. Можно заметить, что эта роль аналогична роли групп треугольных матриц с единицами на главной диагонали в теории матричных групп.

Систематическое изучение стабильных и обобщенных стабильных групп автоморфизмов началось после того, как в работе [2] Л. А. Калужнин доказал следующую теорему:

1.1. *Если* Γ — *группа автоморфизмов группы* G *такая, что в* G *имеется конечный инвариантный стабильный относительно* Γ *ряд, то* Γ — *нильпотентная группа.*

В дальнейшем эта теорема была обобщена в различных направлениях. Теорема Калужнина и ее обобщение на произвольные финитно стабильные группы автоморфизмов доказываются в следующем пункте.

Пусть (G, Γ) — групповая пара и пусть Σ — подмножество в Γ. Через $[G, \Sigma]$, как и в 3.3.1, обозначается взаимный коммунант группы G и множества Σ.

Легко видеть, что коммутант $[G, \Sigma]$ совпадает с подгруппой, порожденной всевозможными коммутаторами $[g, \sigma]$, $g \in G$, $\sigma \in \Sigma$. Действительно, согласно формуле

$$b^{-1}[a, \sigma]b = [ab, \sigma] \cdot [b, \sigma]^{-1}, \ a, \ b \in G, \ \sigma \in \Gamma,$$

указанная подгруппа оказывается также нормальным делителем G. Это и означает, что она совпадает с коммутантом $[G, \Sigma]$.

Как уже отмечалось в п. 3.3.1, Г-коммутант в G и все члены нижнего Г-стабильного ряда являются Г-характеристическими подгруппами.

Из этого замечания следует, что если проекция группы Г относительно G инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы G, то ряд Г-коммутантов является инвариантным рядом в G. В общем случае это неверно — соответствующий пример можно найти в работе В. Г. Виляцера [2].

Если Г — группа всех внутренних автоморфизмов группы G, то в этом случае $[G, \Gamma]$ — это коммутант группы G, а все $[G, \Gamma; \alpha]$ являются членами нижнего центрального ряда в G.

Согласно определению группа Г тогда и только тогда финитно стабильна, когда в G имеется конечный нормальный стабильный относительно Г ряд. Сейчас мы покажем, что требование нормальности такого ряда является несущественным.

Пусть G/H — совокупность всех левосторонних смежных классов группы G по Г-допустимой подгруппе H. Непосредственно проверяется, что формула $gH \circ \sigma = (g \circ \sigma) H$ определяет представление Г подстановками множества G/H. При этом очевидно, что Г действует тождественно в G/H в том и только в том случае, когда коммутант $[G, \Gamma]$ принадлежит H.

Пусть теперь в группе G имеется конечный ряд Г-допустимых подгрупп:

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_i \supset H_{i+1} \supset \ldots \supset H_n = E, \qquad (*)$$

такой, что во всех множествах H_i/H_{i+1} Г действует тождественно. Тогда Г — финитно стабильная группа.

Действительно, по индукции получается включение $[G, \Gamma; i] \subset H_i$, которое и доказывает приведенное утверждение.

Сейчас мы исходили из левосторонних смежных классов, но утверждение остается справедливым и для правосторонних смежных классов. Чтобы убедиться в этом, обозначим через $[\Gamma, G]$ подгруппу, порожденную всеми

$(g \circ \sigma) g^{-1}$, и покажем, что эта подгруппа совпадает с $[G, \Gamma]$. Так как в $G/[G, \Gamma]$ группа Γ действует тождественно и $[G, \Gamma]$ — нормальный делитель в G, то $[\Gamma, G] \subset [G, \Gamma]$. С другой стороны, подобно тому как это делалось для $[G, \Gamma]$, можно показать, что $[\Gamma, G]$ — нормальный делитель в G. Кроме того, в $G/[\Gamma, G]$ группа Γ действует тождественно, и значит, $[G, \Gamma]$ содержится в $[\Gamma, G]$, так что $[G, \Gamma] = [\Gamma, G]$.

Если теперь H — допустимая подгруппа в G, G/H — множество всех правосторонних смежных классов группы G по H, то формула $Hg \circ \sigma = H(g \circ \sigma)$ определяет представление группы Γ подстановками множества G/H. При этом Γ действует тождественно в G/H тогда и только тогда, когда подгруппа $[\Gamma, G]$ принадлежит H. Так как $[\Gamma, G]$ совпадает с $[G, \Gamma]$, то мы теперь можем утверждать следующее:

Если во всех правосторонних смежных классах H_i/H_{i+1} ряда $(*)$ группа Γ действует тождественно, то справедливо включение $[G, \Gamma; i] \subset H_i$, и следовательно, Γ — финитно стабильная группа.

2. Теоремы Калужнина и Ф. Холла. Основной в настоящем параграфе является следующая теорема Ф. Холла [2] (см. также Плоткин — Вилядер [1]):

2.1. *Если представление* Γ *относительно* G *является точным, то финитная стабильность группы* Γ *влечет ее внутреннюю нильпотентность.*

Ясно, что теорема Калужнина является частным случаем этой теоремы. Мы вначале докажем теорему Калужнина, потом теорему 2.1.

Пусть в группе G имеется инвариантный стабильный относительно Γ ряд конечной длины n:

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G. \tag{1}$$

Будем доказывать, что если представление Γ относительно G является точным, то Γ — нильпотентная группа класса $\leqslant n-1$. Доказывать теорему будем индукцией по длине соответствующего инвариантного стабильного ряда. Для ряда длины 1 она тривиальна, а для длины 2 коммутативность Γ проверяется непосредственно. Пусть уже доказано, что при длине стабильного ряда

$n-1$ действующая группа обладает центральным рядом длины $n-2$.

Обозначим через Σ ядро представления Γ относительно G_{n-1} и через $\mathfrak{z}$ — ядро представления Γ относительно фактор-группы G/G_1. В силу предположения индукции, фактор-группы Γ/Σ и $\Gamma/\mathfrak{z}$ нильпотентны и имеют класс нильпотентности не больший $n-2$. Так как группа $\Gamma/\Sigma\cap\mathfrak{z}$ является подгруппой прямого произведения групп Γ/Σ и $\Gamma/\mathfrak{z}$, то и $\Gamma/\Sigma\cap\mathfrak{z}$ — нильпотентная группа класса $\leqslant n-2$.

Остается показать, что пересечение $\Sigma\cap\mathfrak{z}$ принадлежит центру группы Γ.

Пусть $\sigma\in\Sigma\cap\mathfrak{z}$, γ — произвольный элемент в Γ и пусть еще $g\in G$. Обозначим: $g\circ\sigma=ga$, $g\circ\gamma=gb$. Элемент a принадлежит G_1 и согласно 5.1.4.1 перестановочен с каждым элементом из G_{n-1}. Дальше имеем:

$$g\circ\sigma\gamma=(g\circ\sigma)\circ\gamma=ga\circ\gamma=(g\circ\gamma)\,a=gba;$$
$$g\circ\gamma\sigma=gb\circ\sigma=(g\circ\sigma)\,b=gab=gba.$$

Если представление Γ относительно G является точным, то отсюда следует перестановочность σ и γ. Этим теорема доказана.

Здесь уместно заметить, что приведенная теорема является обобщением известного свойства треугольных матричных групп с единицами на главной диагонали.

Для доказательства теоремы 2.1 мы снова воспользуемся рядом (1). Будем предполагать, что этот ряд является стабильным относительно Γ, но не обязательно инвариантным, а только нормальным рядом. Теперь мы уже не можем делать соответствующих предположений относительно фактор-группы $\Gamma/\mathfrak{z}$, так как не определена группа G/G_1 — G_1 не обязательно нормальный делитель в G. В связи с этим меняется оценка для длины центрального ряда в Γ. Снова предполагая, что представление Γ относительно G является точным, мы будем доказывать, что Γ — нильпотентная группа, класс нильпотентности которой ограничен числом $\frac{n(n-1)}{2}$. Как и раньше, доказательство будем вести индукцией по длине стабильного ряда. Для длин 1 и 2 утверждение оче-

видно, и мы допустим, что оно доказано уже для длины $n-1$.

Следовательно, мы предполагаем, что в группе Γ/Σ имеется центральный ряд длины не большей $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что в Σ имеется центральный относительно Γ ряд длины не большей $n-1$.

Обозначим через Γ_i ядро представления Γ относительно множества левосторонних смежных классов G/G_i, и пусть $\Sigma_i = \Gamma_i \cap \Sigma$. Мы получим в Σ возрастающий ряд подгрупп

$$E = \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \ldots \subset \Sigma_i \subset \Sigma_{i+1} \subset \ldots \subset \Sigma_{n-1} = \Sigma. \qquad (2)$$

Этот ряд является центральным рядом в Γ.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующей леммой:

2.2. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара,* H — Γ-*допустимый нормальный делитель в* G, H_1 *и* H_2 — *две* Γ-*допустимые подгруппы в* H, *причем* H_1 — *нормальный делитель в* H_2, *и пусть* Γ *действует тождественно в* G/H *и в* H_2/H_1. *Пусть еще* Σ — *нормальный делитель в* Γ, *действующий тождественно в* H. *Обозначим* через Γ_1 *и* Γ_2 *ядра представления* Γ *относительно* G/H_1 *и* G/H_2 *соответственно, и пусть* $\Sigma_1 = \Gamma_1 \cap \Sigma$ *и* $\Sigma_2 = \Gamma_2 \cap \Sigma$. *Тогда фактор-группа* Σ_2/Σ_1 *принадлежит центру фактор-группы* Γ/Σ_1.

Пусть $\sigma \in \Sigma_2$ и $\gamma \in \Gamma$. Нужно показать, что $[\sigma, \gamma] \in \Sigma_1$. Включение $[\sigma, \gamma] \in \Sigma$ очевидно. Пусть теперь g — произвольный элемент в G.

Обозначим: $g \circ \sigma^{-1} = gh_2,\ \ h_2 \in H_2;\ \ g \circ \gamma^{-1} = gh,\ \ h \in H,$

$$h_2 \circ \gamma^{-1} = h_2 h_1, \ \ h_1 \in H_1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} g \circ [\sigma, \gamma] &= g \circ \sigma^{-1}\gamma^{-1}\sigma\gamma = gh_2 \circ \gamma^{-1}\sigma\gamma = (gh\,(h_2 \circ \gamma^{-1})) \circ \sigma\gamma = \\ &= ghh_2h_1 \circ \sigma\gamma = gh_2hh_1 \circ \sigma\gamma = ((g \circ \sigma^{-1})\,hh_1) \circ \sigma\gamma = \\ &= ghh_1 \circ \gamma = (g \circ \gamma^{-1})\,h_1 \circ \gamma = g\,(h_1 \circ \gamma) \in gH_1, \end{aligned}$$

и лемма доказана.

Беря теперь G, Γ и Σ из доказательства теоремы, а в качестве H, H_1 и H_2 соответственно G_{n-1}, G_i и G_{i+1},

мы получим из леммы, что ряд (2) является центральным рядом в Γ. Возможно, он содержит повторения; эти повторения можно удалить *).

3. Вспомогательные леммы. Здесь мы приведем леммы, которые в дальнейшем будут использованы. Первые две из них являются обобщениями известной в теории групп леммы Грюна, а третья позволит получить еще одно доказательство теоремы 2.1.

3.1. *Пусть H — подгруппа Γ-центра группы G и пусть g — такой элемент в G, что при любом $\sigma \in \Gamma$ коммутатор $[g, \sigma]$ принадлежит H. Тогда отображение $\sigma \to [g, \sigma^{-1}]$ является гомоморфизмом группы Γ в H.*

Для доказательства леммы достаточно воспользоваться формулой $[g, \sigma\varphi] = [g, \varphi][g, \sigma][[g, \sigma], \varphi]$. Эта формула верна для любой групповой пары (G, Γ); здесь $g \in G$, $\sigma, \varphi \in \Gamma$. Если элемент g удовлетворяет условиям леммы, то всегда $[[g, \sigma], \varphi] = e$, и мы получаем $[g, (\sigma\varphi)^{-1}] = [g, \sigma^{-1}][g, \varphi^{-1}]$. Заметим еще, что если дополнительно предполагать, что $[g, \Gamma]$ — абелева группа, то и отображение $\sigma \to [g, \sigma]$ есть гомоморфизм.

3.2 (ср. п. 6.1.3). *Если φ — нормальный автоморфизм, то отображение $x \to [x, \varphi]$ является гомоморфизмом группы G в центр $Z(G)$. Ядром этого гомоморфизма служит φ-центр группы G.*

Эта лемма непосредственно вытекает из формулы

$$[xy, \varphi] = y^{-1}[x, \varphi]\, y\, [y, \varphi].$$

Здесь $x, y \in G$ и φ — произвольный автоморфизм группы G. Если φ — нормальный автоморфизм, то $[x, \varphi] \in Z(G)$ и $[xy, \varphi] = [x, \varphi][y, \varphi]$.

3.3. *Пусть (G, Γ) — групповая пара, Σ и Φ — подгруппы в Γ, причем Σ инвариантна относительно Φ. Пусть еще H — Γ-допустимый нормальный делитель в G такой, что Σ и Φ действуют тождественно в G/H, а Σ — еще и в H. Тогда для любого n справедлива формула*

$$[G, [\Sigma, \Phi; n]] = [[G, \Sigma], \Phi; n]. \qquad (1)$$

---

*) Отметим еще, что теорему 2.1 легко обратить: каждая нильпотентная группа Γ допускает точное финитно стабильное представление относительно некоторой группы G.

Вначале покажем, что при при любых $g \in G$, $\sigma \in \Sigma$ и $\varphi \in \Phi$ выполняется соотношение $[g, [\sigma, \varphi]] = [[g, \sigma], \varphi]$. Обозначим: $[g, \sigma] = a$, $[g, \varphi] = h$. При этом $g \circ \sigma = ga$, $g \circ \varphi = gh$, и следовательно, $g \circ \sigma^{-1} = ga^{-1}$, $g \circ \varphi^{-1} = g(h^{-1} \circ \varphi^{-1})$. Дальше имеем:

$$[g, [\sigma, \varphi]] = g^{-1}(g \circ [\sigma, \varphi]) = g^{-1}(g \circ \sigma^{-1}\varphi^{-1}\sigma\varphi) =$$
$$= g^{-1}((ga^{-1}) \circ \varphi^{-1}\sigma\varphi) = g^{-1}(g(h^{-1} \circ \varphi^{-1})(a^{-1} \circ \varphi^{-1}) \circ \sigma\varphi) =$$
$$= g^{-1}(ga(h^{-1} \circ \varphi^{-1})(a^{-1} \circ \varphi^{-1})) \circ \varphi = g^{-1}gh(a \circ \varphi)h^{-1}a^{-1} =$$
$$= (a \circ \varphi)a^{-1} = a^{-1}(a \circ \varphi) = [a, \varphi] = [[g, \sigma], \varphi].$$

Здесь мы воспользовались тем, что элемент a принадлежит центру подгруппы H.

Из приведенной формулы выводится соотношение

$$[g, [\Sigma, \Phi]] \subset [[g, \Sigma], \Phi].$$

Действительно, подгруппа $[g, [\Sigma, \Phi]]$ порождается элементами вида $[g, \sigma]$, где $\sigma = \prod_i [\sigma_i, \varphi_i]^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\sigma_i \in \Sigma$, и $\varphi_i \in \Phi$. Так как все $[\sigma_i, \varphi_i]$ принадлежат Σ, то можно воспользоваться леммой 3.1. Получим:

$$[g, \sigma] = \prod_i [g, [\sigma_i, \varphi_i]]^{\varepsilon_i} = \prod_i [[g, \sigma_i], \varphi_i]^{\varepsilon_i}.$$

Отсюда следует включение $[g, [\Sigma, \Phi]] \subset [[g, \Sigma], \Phi]$.

Так как группа $[G, [\Sigma, \Phi]]$ порождается подгруппами $[g, [\Sigma, \Phi]]$ по всем $g \in G$, то доказано также включение $[G, [\Sigma, \Phi]] \subset [[G, \Sigma], \Phi]$.

Докажем обратное включение. Пусть $A = [G, [\Sigma, \Phi]]$. Так как $[\Sigma, \Phi] \subset \Sigma$, то подгруппа A принадлежит центру H. Образующие элементы в $[G, \Sigma]$ имеют вид $a_{ij} = [g_i, \sigma_j]$, где $g_i \in G$, $\sigma_j \in \Sigma$. Для каждого такого a_{ij} и произвольного $\varphi \in \Phi$ имеем:

$$[a_{ij}, \varphi] = [[g_i, \sigma_j], \varphi] = [g_i, [\sigma_j, \varphi]] \in A.$$

Пусть теперь a и b — два элемента из H такие, что $[a, \varphi] = x \in A$ и $[b, \varphi] = y \in A$. Тогда $a \circ \varphi = ax$, $b \circ \varphi = by$ и $ab \circ \varphi = axby = abxy$. Кроме того, $a^{-1} \circ \varphi = a^{-1}x^{-1}$. Отсюда при $\varepsilon_i = \pm 1$ получаем $[a^{\varepsilon_1}b^{\varepsilon_2}, \varphi] \in A$. Таким образом, если h — произведение положительных и отрицательных степеней элементов типа a_{ij}, то $[h, \varphi] \in A$. Этим доказано включение $[[G, \Sigma], \varphi] \subset [G, [\Sigma, \varphi]]$, а вместе

с ним и включение $[[G, \Sigma], \Phi] \subset [G, [\Sigma, \Phi]]$. Тем самым формула (1) доказана для $n=1$.

Для произвольного n она получается по индукции. Пусть уже доказано совпадение

$$[G, [\Sigma, \Phi;\ n-1]] = [[G, \Sigma], \Phi;\ n-1].$$

Подгруппа $[\Sigma, \Phi;\ n-1]$ инвариантна относительно Φ и принадлежит Σ. Следовательно, она обладает всеми нужными свойствами подгруппы Σ. Применяя к ней формулу (1), при $n=1$ получаем:

$$[G, [\Sigma, \Phi;\ n]] = [G, [[\Sigma, \Phi;\ n-1], \Phi]] = \\ = [[G, [\Sigma, \Phi; n-1]], \Phi] = [[[G, \Sigma], \Phi; n-1], \Phi] = \\ = [[G, \Sigma], \Phi;\ n].$$

Лемма доказана.

Лемма может быть использована для доказательства того факта, что подгруппа Σ из доказательства теоремы 2.1 обладает центральным относительно Γ рядом длины $\leqslant n-1$. В самом деле, по условию имеем $[[G, \Sigma], \Gamma;\ n-1] = E$.

Из доказанной леммы получаем теперь равенство $[G, [\Sigma, \Gamma;\ n-1]] = E$. В случае точного представления это означает $[\Sigma, \Gamma;\ n-1] = E$, что и требуется.

Заметим еще, что в работе Б. И. Плоткина [18] для доказательства теоремы 2.1 используются свойства квазикольца квазиэндоморфизмов группы G.

Приведем, далее, следующую лемму, близкую по содержанию лемме 3.3:

3.4. *Пусть задана групповая пара* $(\mathfrak{G}, \Gamma)$, H — *нормальный делитель в* $\mathfrak{G}$, *и пусть выполнены следующие условия:* 1) *подгруппа* $[\mathfrak{G}, \Gamma]$ *принадлежит централизатору* H *и* 2) *подгруппа* $[H, \Gamma]$ *лежит в центре* $\mathfrak{G}$. *Тогда коммутант* $[H, \mathfrak{G}]$ *принадлежит* Γ-*центру*.

Пусть $g \in \mathfrak{G}$, $h \in H$ и $\sigma \in \Gamma$. Имеем:

$$(h^{-1}g^{-1}hg) \circ \sigma = (h^{-1} \circ \sigma)(g^{-1} \circ \sigma)(h \circ \sigma)(g \circ \sigma) = \\ = (h^{-1} \circ \sigma)(g^{-1}[g^{-1}, \sigma])(h \cdot [h, \sigma])(g[g, \sigma]) = \\ = [h, \sigma] \cdot (h^{-1} \circ \sigma) \cdot g^{-1}hg \cdot g^{-1}[g^{-1}, \sigma]\, g\, [g, \sigma] = h^{-1}g^{-1}hg.$$

С помощью этой леммы докажем теперь следующее предложение (ср. С. Андреадакис [1]):

3.5. *Пусть G — группа и Γ — ее группа автоморфизмов. Допустим еще, что G_n — члены нижнего центрального ряда в G, $G = G_1$, и Γ_n — ядро индуцированного представления Γ относительно G/G_{n+1}. Тогда справедливы включения:*

$$\text{а) } [G_i, \Gamma_n] \subset G_{i+n} \text{ и б) } [\Gamma_n, \Gamma_m] \subset \Gamma_{n+m}.$$

Вначале докажем а), применив индукцию по i. Для $i = 1$ утверждение тривиально. Допустим, что уже установлено включение $[G_{i-1}, \Gamma_n] \subset G_{i+n-1}$. Обозначим $\mathfrak{G} = G/G_{i+n}$, $H = G_{i-1}/G_{i+n}$. Учитывая хорошо известное включение $[G_{i-1}, G_{n+1}] \subset G_{i+n}$ и предположение индукции, можно отметить, что для групповой пары $(\mathfrak{G}, \Gamma_n)$ и нормального делителя H выполняются условия леммы 3.4. Согласно этой лемме получим $[[H, \mathfrak{G}], \Gamma_n] = \bar{E}$, а отсюда уже следует включение а).

Докажем б). Пусть $g \in G$, $\sigma \in \Gamma_n$ и $\varphi \in \Gamma_m$. Применим коммутатор $\sigma^{-1}\varphi^{-1}\sigma\varphi$ к g:

$$g \circ \sigma^{-1}\varphi^{-1}\sigma\varphi = g[g, \sigma^{-1}] \circ \varphi^{-1}\sigma\varphi = \\ = g[g, \varphi^{-1}][g, \sigma^{-1}][[g, \sigma^{-1}], \varphi^{-1}] \circ \sigma\varphi.$$

Учитывая дальше, что элементы $[g, \varphi^{-1}]$ и $[g, \sigma^{-1}]$ перестановочны по модулю G_{n+m+1}, и пользуясь включениями типа а), получим $g \circ \sigma^{-1}\varphi^{-1}\sigma\varphi \in G_{n+m+1}$, т. е. $[\Gamma_n, \Gamma_m] \subset \Gamma_{n+m}$.

4. Дополнительные замечания. Как уже отмечалось, нижний Γ-стабильный ряд в G не обязательно является инвариантным в G рядом. В связи с этим приведем сейчас следующее предложение (см. В. Г. Вилякер [2], Мохамед [1]):

4.1. *Нижний Γ-стабильный ряд группы G в том и только в том случае является инвариантным в G рядом, когда этот ряд является центральным в $[G, \Gamma]$ рядом.*

Вначале докажем следующее предложение:

4.2. *Пусть в группе G задана некоторая инвариантная система $[G_\alpha]$ и пусть эта система стабильна относительно действующей в G группы Γ. Тогда взаимный коммутант $[G, \Gamma]$ принадлежит централизатору этой системы.*

Пусть подгруппы $G_\alpha \subset G_{\alpha+1}$ составляют скачок в заданной системе. Положим $\bar{G} = G/G_\alpha$, $\bar{H} = G_{\alpha+1}/G_\alpha$ и

рассмотрим групповую пару $(\bar{G}, \Gamma)$ и ее подпару $(\bar{H}, \Gamma)$. Так как группа Γ действует тождественно в $\bar{H}$, то по лемме 5.1.4.1 взаимный коммутант $[\bar{G}, \Gamma]$ принадлежит централизатору в $\bar{G}$ подгруппы $\bar{H}$. Следовательно, и $[G, \Gamma]$ принадлежит централизатору в G указанного фактора. Этим предложение доказано.

Из этого предложения следует, что если члены нижнего Γ-стабильного ряда группы G являются нормальными делителями всей группы, то этот ряд является центральным рядом в $[G, \Gamma]$.

Допустим теперь, что ряд подгрупп $[G, \Gamma; \alpha]$, $\alpha \geqslant 1$, есть центральный ряд в $[G, \Gamma]$. Покажем, что все члены этого ряда являются нормальными делителями в G. Доказывать это будем по индукции.

Пусть уже установлено, что для всех $\alpha < \beta$ $[G, \Gamma; \alpha]$ — нормальные делители в G. Случай предельного β очевиден. Пусть β — непредельное, $[G, \Gamma; \beta] = [[G, \Gamma; \beta - 1], \Gamma]$ и пусть $g \in G$, $a \in [G, \Gamma; \beta - 1]$, $\sigma \in \Gamma$. Имеем:

$$g^{-1}[a, \sigma]g = (a^{-1} \cdot a \circ \sigma) \circ \hat{g} = (a \circ \hat{g})^{-1}(a \circ \hat{g}) \circ \hat{g}^{-1}\sigma\hat{g} =$$
$$= (a \circ \hat{g})^{-1}[(a \circ \hat{g}) \circ \sigma] \circ \sigma^{-1}\hat{g}^{-1}\sigma\hat{g} =$$
$$= (a \circ \hat{g})^{-1}[(a \circ \hat{g}) \circ \sigma] \circ \widehat{g^{-1}\sigma} \cdot \hat{g} = (a \circ \hat{g})^{-1}(a \circ \hat{g}\sigma) \circ \widehat{[g, \sigma]}^{-1}.$$

Обозначим далее:

$$a \circ \hat{g} = a_1 \in [G, \Gamma; \beta - 1], \quad [g, \sigma] = g_1 \in [G, \Gamma].$$

Теперь получаем:

$$g^{-1}[a, \sigma]g = a_1^{-1}(a_1 \circ \sigma) \circ \hat{g}_1^{-1} = a_1^{-1}g_1a_1 \circ \sigma g_1^{-1} =$$
$$= a_1^{-1} \cdot a_1 \circ \sigma \cdot h = [a_1, \sigma]h,$$

где $h \in [G, \Gamma; \beta]$. Этими выкладками завершается доказательство предложения 4.1.

Отметим еще, что из 4.2 следует, что если в группе G имеется возрастающий инвариантный Γ-стабильный ряд, то взаимный коммутант $[G, \Gamma]$ обладает возрастающим центральным рядом. Различные другие добавления к теоремам Калужнина и Холла имеются в работах В. Г. Виляцера и Мохамеда.

В заключение параграфа обратим еще внимание на следующее обстоятельство. Если (G, Γ) — групповая пара такая, что в группе G имеется стабильный относи-

тельно Г ряд длины n, то при этом выполняется битождество

$$[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] = e, \ x \in G, \ y_i \in \Gamma.$$

Может показаться, что верно и обратное: если для пары (G, Г) выполняется указанное битождество, то в G имеется Г-стабильный ряд длины n (или возможно большей длины). Мы, однако, не знаем, так ли это, — скорее всего, что не так. Указанное обратное утверждение выполняется, если дополнительно предполагать, что группа Г индуцирует все внутренние автоморфизмы группы G. Было бы интересно подробнее исследовать, в каких еще случаях финитную стабильность можно задавать отмеченным выше битождеством.

С другой стороны, заметим, что хотя указанное выше битождество, по-видимому, и не определяет класс всех n-стабильных пар, этот класс все же задается некоторым набором битождеств. Последнее утверждение вытекает из обобщенной теоремы Биркгофа, доказываемой в Добавлении. Мы предоставляем читателю найти явный вид нужных соотношений.

Напомним далее, что в п. 3.1.5 отмечалась задача перенесения теоремы Калужнина — Холла на некоторые классы пар (G, Г), в которых G уже не группа. Как заметили недавно А. И. Токаренко и И. А. Рипс, эти теоремы для полугрупп (даже с сокращениями) и луп справедливы не всегда.

§ 2. КВАЗИСТАБИЛЬНЫЕ И ВНЕШНЕ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

1. Постановка вопроса. Пусть дана групповая пара (G, Г). Если эта пара является квазистабильной, то каждое конечное подмножество из Г является нильподмножеством. Группу Г, обладающую этим последним свойством, будем в дальнейшем называть *внешне локально нильпотентной группой*. Один из основных вопросов, который нас здесь будет интересовать, — это условия, при которых внешне локально нильпотентная действующая группа Г оказывается квазистабильной группой. Так будет не всегда.

Чтобы убедиться в этом, возьмем группу G со следующими свойствами: любые два элемента этой группы порождают нильпотентную подгруппу, но локально нильпотентный радикал группы равен единице, — такие группы существуют (см. п. 5.4.3). Пусть (G, Γ) — подпара внутренней пары (G, G), где Γ — произвольная циклическая подгруппа из G. Легко видеть, что группа Γ внешне локально нильпотентна, но не квазистабильна (например, ввиду теоремы 2.1 настоящего параграфа).

Указанное внешнее свойство можно также рассматривать как результат прямого перенесения на произвольные групповые пары понятия локально нильпотентной абстрактной группы: нетрудно понять, что для внутренней пары (Γ, Γ) внешняя локальная нильпотентность Γ означает, что группа Γ как абстрактная группа является локально нильпотентной, так что в случае внутренних пар внешняя локальная нильпотентность и квазистабильность — это одно и то же.

Назовем еще группу Γ *внешней нильгруппой*, если каждый элемент из Γ действует в G как внешний нильэлемент. Для внутренней пары (Γ, Γ) это означает, что группа Γ является нильгруппой. По аналогии с проблемой бернсайдовского типа для нильгрупп естественно рассматривать и следующую проблему.

Пусть (G, Γ) — групповая пара и пусть Γ — внешняя нильгруппа. Следует ли отсюда, что Γ внешне локально нильпотентна?

Результат Е. С. Голода (п. 5.4.3) показывает, что в общем случае эта проблема решается отрицательно. В конце параграфа будет показано, что она решается отрицательно даже для абелевой группы G, а сейчас покажем, что для случая, когда G — абелева группа с конечным числом образующих, ответ положителен. Другие случаи положительного решения проблемы будут приведены позднее (см., в частности, п. 2.3).

Вначале докажем, что если G — абелева группа без кручения конечного ранга и группа Γ является нильгруппой относительно G, то Γ финитно стабильна.

Пусть (G, Γ) — групповая пара, в которой G и Γ удовлетворяют отмеченным условиям. Как известно, группу G можно пополнить, т. е. вложить в такую пол-

ную абелеву группу конечного ранга $\overline{G}$, что некоторая степень каждого элемента из $\overline{G}$ принадлежит G. Действие группы Γ в G однозначно продолжается до действия в $\overline{G}$: если $g \in \overline{G}$ и $g^n \in G$, то полагаем $g \circ \sigma = (g^n \circ \sigma)^{\frac{1}{n}}$, $\sigma \in \Gamma$. Элемент $g \circ \sigma$ здесь определяется однозначно по g и σ, и легко понять, что так действительно задается представление Γ относительно $\overline{G}$. Если теперь $g \in \overline{G}$, $g^n \in G$, $\sigma \in \Gamma$, $[g^n, \sigma; k] = e$, то очевидно, что и $[g, \sigma; k]^n = e$. Так как $\overline{G}$ — группа без кручения, то отсюда следует, что $[g, \sigma; k] = e$. Следовательно, группа Γ является нильгруппой относительно $\overline{G}$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай полной группы G. Такая группа представима в виде прямой суммы конечного числа групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, и следовательно, группу G можно трактовать как конечномерное векторное пространство над полем рациональных чисел. При этом группа Γ может рассматриваться как группа автоморфизмов этого пространства. Из условия предложения следует, что для каждого $\sigma \in \Gamma$ существует показатель n, при котором $(\sigma - \varepsilon)^n = 0$. Это значит, что все характеристические числа операторов из Γ равны единице. Согласно теореме Колчина [1] (см. также п. 4.2.4) отсюда следует, что группа Γ финитно стабильна относительно G.

Аналогично рассматривается случай характеристически простой конечной абелевой группы — такую группу можно считать векторным пространством над простым полем простой характеристики.

Пусть теперь G — абелева группа с конечным числом образующих и группа Γ действует на G как внешняя нильгруппа. В группе G имеется конечный ряд характеристических подгрупп $E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$, в котором все факторы, кроме последнего, характеристически просты, а последний является группой без кручения конечного ранга. Согласно предыдущему в каждом факторе этого ряда группа Γ действует финитно стабильно. Следовательно, Γ финитно стабильна и в G.

По поводу случая коммутативной группы G сделаем еще одно замечание.

1.1. *Если* (G, Γ) — *групповая пара с абелевой областью действия* G *и если в* G *имеется такая система образующих* X, *что для любого конечного подмножества* $Y \subset \Gamma$ *и любого* $x \in X$ *существует* $n = n(x, Y)$, *при котором все сложные коммутаторы вида* $[x, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}]$, $\sigma_{i_j} \in Y$, *обращаются в единицу, то группа* Γ *внешне локально нильпотентна.*

Если $y \in G$, то этот y можно представить в виде $y = \prod\limits_{i=1}^{k} x_i^{m_i}$, $x_i \in X$.

Для каждого x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, возьмем соответствующее $n_i = n(x_i, Y)$, и пусть $n = \max n_i$. Покажем, что сложный коммутатор $[y, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}]$ с произвольными $\sigma_{i_j} \in Y$ равен единице.

Так как для абелевой группы G при любом $\sigma \in \Gamma$ отображение $a \to [a, \sigma]$, $a \in G$, является, очевидно, эндоморфизмом группы G, то теперь имеем:

$$[y, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}] = \prod_i [x_i, \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}]^{m_i} = e,$$

что и требовалось.

В дальнейшем аналогичное утверждение будет доказано для произвольной локально нильпотентной группы G.

Напомним еще, что согласно теореме 3.3.4.5 в случае абелевой группы G действующая группа Γ тогда и только тогда внешне локально нильпотентна, когда она локально стабильна.

2. Стабильность и радикалы области действия. В этом пункте доказываются следующие теоремы:

2.1. *Если* (G, Γ) — *произвольная групповая пара и* σ — *квазистабильный относительно* G *элемент в* Γ, *то имеет место включение* $[G, \sigma] \subset R(G)$.

2.2. *Если* σ — *стабильный относительно* G *элемент, то* $[G, \sigma] \subset \beta^*(G)$.

2.3. *Если* σ — *финитно стабильный элемент, то* $[G, \sigma] \subset \gamma(G)$.

Эти теоремы позволяют получить ряд других результатов.

Все эти теоремы будем доказывать одновременно. Будем считать, что σ — автоморфизм группы G. Через $\tilde{G} = \{G, \sigma\}$ обозначим подгруппу в голоморфе, порожден-

ную G^r и σ. Легко видеть, что если σ — квазистабильный автоморфизм, то σ является также локально субинвариантным элементом в $\tilde{G}$. Действительно, пусть $[G_\alpha]$ — локальная система в G из σ-допустимых подгрупп, в каждом члене которой σ действует как стабильный автоморфизм. Подгруппы $\{G_\alpha, \sigma\}$ составляют локальную систему в $\tilde{G}$, причем в каждой такой подгруппе циклическая подгруппа $\{\sigma\}$ является субинвариантной подгруппой. Поэтому σ является субинвариантным элементом в каждой $\{G_\alpha, \sigma\}$ и локально субинвариантным элементом в группе $\tilde{G}$.

Точно так же можно утверждать, что если σ — стабильный автоморфизм, то он является субинвариантным элементом в $\tilde{G}$, и если σ — финитно стабильный автоморфизм, то этот же σ есть достижимый элемент в $\tilde{G}$.

Если теперь σ — квазистабильный автоморфизм, то, будучи локально субинвариантным элементом в $\tilde{G}$, σ принадлежит $R(\tilde{G})$. Пусть теперь g — произвольный элемент в G. Тогда

$$[g^r, \sigma] = [g, \sigma]^r \in R(\tilde{G}) \cap G^r = R(G^r) = R(G)^r.$$

Отсюда $[g, \sigma] \in R(G)$, что и доказывает теорему 2.1. Если дальше σ — стабильный автоморфизм, то $\sigma \in \beta^*(\tilde{G})$. При любом $g \in G$, получим:

$$[g^r, \sigma] = [g, \sigma]^r \in \beta^*(\tilde{G}) \cap G^r = \beta^*(G^r) = \beta^*(G)^r.$$

Отсюда $[g, \sigma] \in \beta^*(G)$, и теорема 2.2 доказана.

Пусть, наконец, σ — финитно стабильный автоморфизм. Тогда $\sigma \in \gamma(\tilde{G})$ и, как и раньше, $[g, \sigma] \in \gamma(G)$, что и требовалось.

В качестве непосредственного приложения теоремы 2.1 получаем следующее свойство приводимости:

2.4. *Всякая группа* Γ *квазистабильных автоморфизмов произвольной группы* G *является расширением абелевой группы с помощью группы квазистабильных автоморфизмов локально нильпотентной группы.*

Действительно, пусть G — произвольная группа, Γ — ее группа автоморфизмов и пусть каждый элемент из Γ является квазистабильным автоморфизмом группы G. Пусть еще $\mathfrak{z}_\Gamma(R(G)) = \mathfrak{z}$ — Γ-централизатор радикала $R(G)$. Согласно 2.1 $\mathfrak{z}$ действует тождественно не только

в $R(G)$, но и в фактор-группе $G/R(G)$. По теореме Калужнина, $\mathfrak{z}$ — абелев нормальный делитель в Γ. $\Gamma/\mathfrak{z}$ является группой квазистабильных автоморфизмов, индуцируемых группой Γ в $R(G)$. Таким образом, мы видим, что группа квазистабильных автоморфизмов группы G существенно действует в сравнительно простой части группы G — в ее радикале. Это обстоятельство оказывается важным в доказательстве ряда свойств таких групп.

Докажем дальше следующую теорему:

2.5. *Если в группе G локально нильпотентный радикал $R(G)$ является RN^*-группой, то каждый квазистабильный автоморфизм группы G является ее стабильным автоморфизмом.*

Пусть $R(G)$ — RN^*-группа и σ — квазистабильный автоморфизм группы G. Покажем, что σ действует в $R(G)$ как стабильный автоморфизм. Рассмотрим в относительном голоморфе $\tilde{G}$ подгруппу $A=\{R(G)^r, \sigma\}$. Легко видеть, что σ является нильэлементом в этой подгруппе, и по лемме 5.4.1.2 A — локально нильпотентная группа. Ясно также, что A — RN^*-группа. Теперь по теореме 5.2.3.4 σ — субинвариантный элемент в A. Но это, как нетрудно понять, означает также, что σ — стабильный относительно $R(G)$ автоморфизм. Так как по теореме 2.1 σ действует тождественно в $G/R(G)$, то σ — стабильный автоморфизм группы G.

Дальше нам понадобится следующая лемма:

2.6. *Пусть (G, Γ) — групповая пара и пусть G — счетная локально нильпотентная группа, обладающая локальной системой из Γ-допустимых ZA-подгрупп. Тогда в G имеется возрастающий нормальный ряд из Γ-допустимых подгрупп с коммутативными факторами.*

Пусть вначале A и B — две Γ-допустимые ZA-подгруппы в G и пусть $A \subset B$. Пусть, далее, в A имеется возрастающий нормальный ряд $[A_\alpha]$ из Γ-допустимых подгрупп с коммутативными факторами. Покажем, что этот ряд можно дополнить подгруппами, лежащими между A и B, до аналогичного ряда в B. По условию, B — ZA-группа. Пусть ряд $[Z_\alpha]$ — ее верхний центральный ряд. Все члены этого ряда характеристичны и поэтому Γ-допустимы. Подгруппы вида AZ_α Γ-допустимы

и после удаления повторений они вместе с членами ряда $[A_\alpha]$ составят нужный ряд.

Так как G — счетная группа, то G является теоретико-множественной суммой некоторой возрастающей последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ подгрупп с конечным числом образующих. Пусть еще $B_n = A_n \circ \Gamma$. Все подгруппы B_n Γ-допустимы, являются ZA-группами и составляют возрастающий ряд, возможно с повторениями, объединение членов которого совпадает со всей группой G. Из предыдущих рассмотрений видно, что такой ряд можно уплотнить до возрастающего нормального Γ-допустимого ряда группы G с коммутативными факторами.

Заметим, что если в условиях леммы требовать, чтобы локальные подгруппы были группами конечного специального ранга или удовлетворяли условию максимальности, то аналогичным свойством будут обладать и все факторы построенного ряда.

Опираясь на эту лемму, докажем теперь следующую теорему:

2.7. *Пусть (G, Γ) — групповая пара и пусть в G имеется возрастающий нормальный ряд из Γ-допустимых подгрупп, в каждом факторе которого Γ действует как квазистабильная группа. Тогда Γ квазистабильна и относительно всей группы G.*

Предварительно докажем следующее вспомогательное предложение: если G — произвольная счетная группа, то всякое конечное квазистабильное множество элементов из Γ является стабильным множеством.

Пусть Y — такое множество. Рассмотрим вначале случай, когда G — локально нильпотентная группа. Так как Y является локально ограниченным множеством, то для любой подгруппы $H \subset G$ с конечным числом образующих подгруппа $H \circ \{Y\}$ имеет также конечное число образующих и, следовательно, нильпотентна. Теперь из леммы 2.6 вытекает, что в G имеется возрастающий нормальный ряд $[G_\alpha]$ из Y-допустимых подгрупп, все факторы которого являются коммутативными группами. Для коммутативных групп доказываемое утверждение справедливо даже без предположения счетности. Таким образом, ряд $[G_\alpha]$ можно уплотнить до Y-стабиль-

ного ряда, что и доказывает утверждение для локально нильпотентного случая.

Если теперь G — произвольная счетная группа, то $R(G)$ — локально нильпотентная счетная группа и Y действует в $R(G)$ как стабильное множество. По теореме 2.1, в $G/R(G)$ Y индуцирует тождественные автоморфизмы. Следовательно, Y — стабильное множество относительно G.

Для доказательства теоремы возьмем в (G, Γ) произвольную подпару (H, Σ) с конечным числом образующих. Пусть Y — некоторая конечная система образующих в Σ и пусть X — такое конечное подмножество в H, что $\{X \circ \Sigma\} = H$. Из возможности такой записи следует, что H — счетная подгруппа в G.

Пусть теперь ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset \ldots \subset G_\gamma = G$$

удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим ряд из пересечений $H_\alpha = G_\alpha \cap H$:

$$E = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\gamma = H.$$

После удаления повторений в этом ряде мы получим в H ряд из Σ-допустимых подгрупп, в каждом факторе которого Y действует как квазистабильное множество. Так как все эти факторы — счетные группы, то теперь можно заключить, что относительно каждого из них Y — стабильное множество. Но тогда Y стабильно и относительно H. Следовательно, пара (H, Σ) стабильна, а пара (G, Γ) квазистабильна.

В заключение этого пункта заметим еще, что теорема 2.1 показывает, в частности, что наличие у группы G нетривиальных квазистабильных автоморфизмов влечет нетривиальность локально нильпотентного радикала $R(G)$. Этот факт может позволить определять некоторые внутренние свойства группы G разрешимого типа в терминах внешних свойств групп автоморфизмов группы G, т. е. через симметрии группы G.

3. Отношения между внешней локальной нильпотентностью и квазистабильностью действующей группы. В этом пункте будут использованы результаты из п. 4.3.1. В отличие от п. 4.3.1, группу G теперь назовем

NR-группой, если всякий нильавтоморфизм этой группы является ее квазистабильным автоморфизмом. Легко видеть, что NR-группы в этом новом смысле являются и старыми NR-группами. Покажем, что

3.1. *Группа G тогда и только тогда является NR-группой, когда во всяком ее циклическом расширении радикал совпадает с множеством всех нильэлементов.*

Пусть $\tilde{G}=\{G, g\}$, G — нормальный делитель в $\tilde{G}$ и пусть G — NR-группа. Пусть еще h — нильэлемент в $\tilde{G}$. Тогда $\hat{h}$ является нильавтоморфизмом в G и, следовательно, действует в G как квазистабильный автоморфизм. Так как $\tilde{G}/G$ — абелева группа, то $[\tilde{G}, \hat{h}]\subset G$. Следовательно, $\hat{h}$ — квазистабильный автоморфизм группы $\tilde{G}$, и поэтому, $h\in R(\tilde{G})$.

Обратно, пусть σ — нильавтоморфизм группы G. Перейдем к голоморфу группы G и рассмотрим в нем подгруппу $\tilde{G}=\{G^r, \sigma\}$. Элемент σ является нильэлементом в $\tilde{G}$. Отсюда, по условию, $\sigma\in R(\tilde{G})$, и следовательно, σ — локально субинвариантный элемент в $\tilde{G}$.

Но тогда σ — квазистабильный автоморфизм группы G.

В п. 5.4.1 было показано, что если в некоторой группе все абелевы подгруппы удовлетворяют условию максимальности, то в такой группе радикал совпадает с множеством всех нильэлементов группы. Условимся здесь группы, у которых все абелевы подгруппы удовлетворяют условию максимальности, коротко называть *a-группами*.

Примером a-группы, не удовлетворяющей условию максимальности, служит свободная группа. Ясно, что расширение a-группы с помощью a-группы снова является a-группой. Отсюда следует, что всякая a-группа является NR-группой. Покажем далее, что если группа G обладает локальной системой из a-подгрупп, то такая группа также является NR-группой.

Действительно, пусть a-подгруппы G_α составляют локальную систему в группе G и пусть σ — нильавтоморфизм этой группы. Так как σ — алгебраический автоморфизм, то все подгруппы $G'_\alpha=G_\alpha^\sigma$ имеют конечное число образующих. Все эти подгруппы σ-допустимы, являются a-группами и, значит, σ действует в них как

квазистабильный автоморфизм. Отсюда σ — квазистабильный автоморфизм группы G.

3.2. *Пусть группа G обладает возрастающим рядом характеристических подгрупп, все факторы которого являются NR-группами. Тогда и сама группа G является NR-группой.*

Пусть ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G$$

удовлетворяет условиям теоремы и σ — нильавтоморфизм. Во всех факторах приведенного ряда σ действует как нильавтоморфизм, а поскольку эти факторы являются NR-группами, то σ индуцирует квазистабильные автоморфизмы во всех $G_{\alpha+1}/G_\alpha$. По теореме 2.7 σ является квазистабильным автоморфизмом группы G.

Из доказательства теоремы видно, что если характеристичность ряда заменить требованием инвариантности его членов, то мы получим, что каждый внутренний нильавтоморфизм группы G является квазистабильным автоморфизмом, и следовательно, каждый нильэлемент из G является локально субинвариантным элементом и лежит в радикале $R(G)$.

Из этого замечания вытекает другое доказательство заключительной части теоремы 4.1.7 из пятой главы. Из теоремы следует также, что всякая LM-радикальная группа является NR-группой.

Опираясь на теорему 3.2 и замечание относительно групп, локально обладающих свойством a, можно строить другие достаточно широкие классы NR-групп. Как уже отмечалось, существуют группы, не являющиеся NR-группами.

3.3. *Пусть (G, Γ) — групповая пара и пусть группа G является NR-группой. Тогда Γ в том и только в том случае будет квазистабильной, когда она внешне локально нильпотентна.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если Y — конечное подмножество в Γ, порождающее подгруппу Σ, то из внешней локальной нильпотентности этой подгруппы вытекает ее квазистабильность.

Для случая, когда группа G абелева, этот факт уже был доказан. Очевидным образом он переносится и на

случай нильпотентной группы G. Пусть теперь G — локально нильпотентная группа. Тогда в G имеется локальная система из Y-допустимых подгрупп с конечным числом образующих. Так как все эти подгруппы нильпотентны, то в каждой из них Y действует как стабильное множество. Поэтому Σ квазистабильна относительно G.

Если теперь G — произвольная NR-группа, то, учитывая, что каждый элемент из Y является внешне локально нильпотентным, а поэтому и квазистабильным относительно G, мы заключаем, что $[G, \Sigma] \subset R(G)$, так что Σ квазистабильна как относительно $R(G)$, так и относительно $G/R(G)$. Но тогда Σ квазистабильна и относительно G, что и требовалось.

Из этой теоремы непосредственно следует, что если (G, Γ) — групповая пара, в которой группа G локально нетерова, то группа Γ в том и только в том случае квазистабильна, когда она внешне локально нильпотентна.

Докажем теперь следующую теорему:

3.4. *Пусть задана групповая пара* (G, Γ). *Для того чтобы группа* Γ *была квазистабильной, необходимо и достаточно, чтобы эта пара была локально ограниченной и чтобы каждый элемент из* Γ *был квазистабильным элементом.*

Если Γ квазистабильна, то она, очевидно, удовлетворяет отмеченным условиям. Пусть теперь выполнены эти два последних условия. Мы рассмотрим подпару $(R(G), \Gamma)$. Так как эта подпара локально ограничена, то в ней имеется локальная система подпар $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ таких, что все H_α нильпотентны и нетеровы.

Если дальше $E = H_\alpha^0 \subset H_\alpha^1 \subset \ldots \subset H_\alpha^n = H_\alpha$ — верхний центральный ряд в H_α, то все его члены Σ_α-допустимы и факторы являются абелевыми группами с конечным числом образующих. Согласно п. 1 в каждом таком факторе Σ_α действует как финитно стабильная группа. Следовательно, и относительно H_α Σ_α финитно стабильна.

Таким образом, пара $(R(G), \Gamma)$ квазистабильна. Так как, сверх того, в $G/R(G)$ Γ действует тривиально, то Γ — квазистабильная группа.

Из приведенной теоремы получаем еще следующий результат (см. также В. Г. Виляцер [4]). Если (G, Γ) — такая групповая пара, что каждый элемент из Γ квазистабилен, и группа Γ локально конечна, то пара (G, Γ) квазистабильна.

Действительно, всякое представление локально конечной группы является локально ограниченным.

4. Примеры. Мы начнем с примера Ф. Холла [2], показывающего, что взаимный коммутант $[G, \Gamma]$ в случае финитно стабильной группы Γ может не быть нильпотентной группой. Напомним, что согласно теореме 2.3 этот взаимный коммутант должен быть беровской группой.

Пусть V — векторное пространство над простым полем характеристики p и (v_n), $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, — его базис. Пусть H и K — две циклические подгруппы в группе автоморфизмов этого пространства: $H=\{\xi\}$, $K=\{\eta\}$. Определяются ξ и η следующим образом:

$$v_n\xi = v_{n+1} \text{ для всех } n,$$
$$v_0\eta = v_0 + v_1,\ v_n\eta = v_n, \text{ если } n \neq 0.$$

Пусть, далее, K_1 — подгруппа, порожденная всевозможными $\eta_n = \xi^{-n}\eta\xi^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Легко видеть, что $v_k\eta_k = v_k + v_{k+1}$ и $v_j\eta_k = v_j$, если $k \neq j$. Если через V_k обозначить подпространство, порожденное всеми v_i, $i \geqslant k$, то легко видеть, что все эти V_k инвариантны относительно K_1.

Пусть, далее, $\bar{H}$ — нормальный делитель в $\{H, K\}$, порожденный подгруппой H. Мы рассмотрим внутреннюю пару $(\bar{H}, K)$ и покажем, что K здесь стабильная группа, но $[\bar{H}, K]$ — не нильпотентная группа.

Обозначим еще через A подгруппу в K_1, состоящую из всех элементов, действующих тождественно в V_1 и V/V_1. Ясно, что $K \subset A$ и A — абелев нормальный делитель в K_1. Кроме того, имеем:

$$[[\bar{H}, K], K] \subset [K_1, K] \subset A \text{ и } [\bar{H}, K, K, K] = E.$$

Группа $[\bar{H}, K]$ содержит всевозможные элементы $[\eta, \xi^n] = \eta^{-1}\eta_n = \theta_n$. При этом легко проверить, что

$$v_1[\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n] = v_1 + v_{n+1},$$

откуда следует, что $[\bar{H}, K]$ — не нильпотентная группа. С другой стороны, мы видели, что в $\bar{H}$ имеется K-стабильный ряд длины 3.

Приведем теперь пример, показывающий, что внешняя нильгруппа может не быть внешне локально нильпотентной группой.

Пусть Γ — p-группа Новикова [2], с конечным числом образующих, но бесконечная, и H — группа простого порядка p. Через G обозначим дискретную степень H^{Γ}, и представление Γ относительно G определим через сплетение. Если $\sigma \in \Gamma$, то подгруппа в $H \mathrm{wr} \Gamma$, порожденная H^{Γ} и σ, является разрешимой p-группой. Отсюда следует, что σ действует в G как нильавтоморфизм. С другой стороны, в $G = H^{\Gamma}$ нет нетривиальных неподвижных относительно всей группы Γ элементов. Это означает, что Γ не может быть внешне локально нильпотентной группой.

Отметим еще, что пример Левича из п. 5.4.3 показывает, что существуют квазистабильные действующие группы, не являющиеся квазифинитно стабильными. Как мы знаем, для локально нетеровой области действия оба эти понятия равносильны (п. 3.3.3).

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИСТАБИЛЬНЫХ ГРУПП

1. Чистые автоморфизмы. В настоящем параграфе используются введенные ранее понятия почти периодического элемента действующей группы, почти π-элемента и чистого элемента (см. п. 2.4.3). Будут рассмотрены отношения между такими элементами и внешними нильэлементами.

Вначале будет рассмотрен случай, когда внешне нильпотентные элементы оказываются чистыми элементами.

Всюду дальше (G, Γ) — некоторая групповая пара. Непосредственно проверяется следующий факт: если $\sigma \in \Gamma$, $g \in G$ и $g \circ \sigma = ga$, $a \circ \sigma = a$, то при любом $n > 0$ выполняется равенство $g \circ \sigma^n = ga^n$. Имеет место теорема (В. Г. Виляцер [3]):

1.1. *Если элемент $\sigma \in \Gamma$ является внешним нильэлементом относительно G и $[G, \sigma]$ — группа без кручения, то σ — чистый элемент.*

Пусть $g \in G$ и пусть $g \circ \sigma^n = g$. Составим нильтраекторию:

$$g = g_0,\ g_1 = [g_0, \sigma], \ldots, g_{i+1} = [g_i, \sigma], \ldots$$

Пусть k — первое число с тем свойством, что $g_{k+1} = e$, $g_k \circ \sigma = g_k$. Нужно показать, что $k = 0$. Пусть $k \neq 0$. Так как σ^n оставляет неподвижным элемент g, то σ^n действует тождественно и на каждый g_i, так что, в частности, $g_{k-1} \circ \sigma^n = g_{k-1}$. Кроме того,

$$g_{k-1} \circ \sigma^n = g_{k-1} \cdot g_k^n.$$

Отсюда $g_k^n = e$, и поскольку $[G, \sigma]$ — группа без кручения и $g_k \in [G, \sigma]$, то $g_k = e$. Получилось противоречие с тем, что $k \neq 0$.

Из этой теоремы, в частности следует, что группа нильавтоморфизмов произвольной группы без кручения также является группой без кручения. В теореме 1.1, если ее применить к внутренним автоморфизмам, содержится также утверждение о том, что всякая нильгруппа без кручения является R-группой, и, по существу, приведенное доказательство является повторением соответствующего доказательства для нильгрупп.

Напомним, что группа G называется *R-группой* (П. Г. Конторович [1]), если она без кручения и если в G выполняется свойство однозначности извлечения корня из элементов. Последнее условие равносильно тому, что централизатор каждого элемента группы является изолированной подгруппой. При этом подгруппа H из G называется изолированной в G, если для каждого $x \in G$ из $x^n \in H$ следует, что $x \in H$. Отметим еще, что изолятором произвольной подгруппы $H \subset G$ — обозначается через $I(H)$ — называется пересечение всех изолированных подгрупп из G, содержащих H. $I(H)$ — изолированная подгруппа.

Из теоремы 2.2.1 и доказанной теоремы получаем еще следующий факт:

1.2. *Если радикал $R(G)$ группы G является группой без кручения и каждый элемент из Γ является квазиста-*

бильным элементом, то Г *— чистая относительно* G *группа.*

Отметим дальше следующее предложение, также вытекающее из теоремы 1.1.

Если $[G, \Gamma]$ — группа без кручения и каждый элемент из Г является внешним нильэлементом относительно G, то Г-централизатор любого подмножества из G является изолированной подгруппой в Г.

1.3 (В. Г. Вилядер [3], Б. И. Плоткин [17]). *Пусть представление* Г *относительно* G *квазистабильно,* $[G, \Gamma]$ *— группа без кручения и пусть* H *— изолированная подгруппа в* G. *Тогда* Г*-нормализатор* H *изолирован в* Г.

Докажем вначале лемму, которая понадобится и в дальнейшем.

1.4. *Пусть* G *— локально нильпотентная группа без кручения и пусть в* G *имеется стабильный относительно* Г *ряд*

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G.$$

Составим ряд из изоляторов членов приведенного ряда

$$E = I(G_0) \subset I(G_1) \subset \ldots \subset I(G_\alpha) \subset I(G_{\alpha+1}) \subset \ldots$$
$$\ldots \subset I(G_\gamma) = G.$$

Этот новый ряд также является стабильным относительно Г.

Для доказательства леммы заметим вначале, что второй ряд также является нормальным, причем все его факторы — группы без кручения. Так как G — R-группа, то Г-центр группы G изолирован в G. Действительно, пусть $a \in G$ и пусть a^n принадлежит Г-центру группы G. Это значит, что при любом $\sigma \in \Gamma$ выполняется равенство $a^n \circ \sigma = a^n$. Но $a^n \circ \sigma = (a \circ \sigma)^n$. Отсюда (в R-группе!) $a \circ \sigma = a$, т. е. a также принадлежит Г-центру.

Таким образом, в $I(G_1)$ группа Г действует тождественно. Рассмотрим теперь произвольный фактор вида

$$I(G_{\alpha+1})/I(G_\alpha).$$

Так как все G_α Г-допустимы, то и все $I(G_\alpha)$ — Г-допустимые подгруппы. Легко видеть, что в фактор-группе $G_{\alpha+1}I(G_\alpha)/I(G_\alpha)$ каждый элемент остается неподвижным при действии элементов из Г. Эта фактор-группа

является подгруппой R-группы $I(G_{\alpha+1})/I(G_\alpha)$. Следовательно, в ее изоляторе, взятом в $I(G_{\alpha+1})/I(G_\alpha)$, группа Γ действует тождественно. Но этот изолятор, как легко проверить, совпадает с $I(G_{\alpha+1})/I(G_\alpha)$. Тем самым доказано, что ряд изоляторов является стабильным относительно Γ рядом.

Теперь будем доказывать теорему.

Рассмотрим вначале случай, когда группа G имеет конечное число образующих и, следовательно, счетна. Пусть $\sigma \in \Gamma$ и пусть $H \circ \sigma^n = H$.

Тогда имеем $[H, \sigma^n] \subset H \cap [G, \Gamma]$. Так как $H \cap [G, \Gamma] = \tilde{H}$ — счетная группа и содержится в локально нильпотентной группе без кручения $[G, \Gamma]$, то в $\tilde{H}$ можно построить стабильный относительно σ^n ряд с длиной, не большей ω. Пусть ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n \subset H_{n+1} \subset \ldots \subset \bigcup_n H_n = \tilde{H}$$

является таким рядом. В силу предыдущей леммы можно считать, что все члены этого ряда изолированы в $\tilde{H}$, а следовательно, и в $[G, \Gamma]$. Так как σ^n оставляет неподвижным каждый элемент из H_1, то и σ оставляет каждый элемент из H_1 на месте, так что σ принадлежит Γ-нормализатору подгруппы H_1. Пусть уже установлено, что σ принадлежит Γ-нормализатору подгруппы H_n. Возьмем нормализатор N_n подгруппы H_n в $[G, \Gamma]$. Так как H_n допустима относительно σ, то и N_n — σ-допустимая подгруппа.

Рассмотрим дальше действие σ в фактор-группе (без кручения!) N_n/H_n.

Так как здесь σ^n оставляет на месте каждый элемент из подгруппы H_{n+1}/H_n, то и σ на этой подгруппе действует тождественно. Таким образом, $H_{n+1} \circ \sigma = H_{n+1}$. Теперь по индукции можно считать доказанным, что σ принадлежит Γ-нормализатору подгруппы $\tilde{H}$.

Пусть, далее, $h \in H$ и пусть N — нормализатор в G подгруппы $\tilde{H}$. Перейдем к фактор-группе $N/\tilde{H} = \bar{N}$ и рассмотрим в ней действие σ на элемент $\bar{h} = h\tilde{H}$.

Дальше мы повторим рассуждения из доказательства теоремы 1.1. Обозначим $[\bar{h}, \sigma] = \bar{h}_1, \ldots, [\bar{h}_i, \sigma] = \bar{h}_{i+1}, \ldots$

Легко видеть, что при любом i будет $\bar{h}_i\sigma^n = \bar{h}_i$. Пусть k — первый номер со свойством $\bar{h}_{k+1} = \bar{e}$. Тогда $\bar{h}_k \circ \sigma = \bar{h}_k$ и при любом m имеем $\bar{h}_{k-1} \circ \sigma^m = \bar{h}_{k-1}\bar{h}_k^m$. При $m = n$ получаем $\bar{h}_{k-1} = \bar{h}_{k-1}\bar{h}_k^n$. Отсюда $h_k^n \in \tilde{H}$. Но так как все h_i принадлежат $[G, \Gamma]$, то можно заключить, что $h_k \in \tilde{H}$, т. е. $\bar{h}_k = \bar{e}$. Это значит, что $k+1=1$ и $[h, \sigma] \in \tilde{H}$. Следовательно, $h \circ \sigma \in H$ и H — σ-допустимая подгруппа. Случай, когда G имеет конечное число образующих, разобран.

Пусть теперь G — произвольная группа и пусть H — ее изолированная подгруппа. Пусть еще $\sigma \in \Gamma$ и $H \circ \sigma^n = H$. Возьмем в H произвольный элемент h, и пусть $\{h \circ \{\sigma\}\} = \tilde{G}$. Рассмотрим действие σ в группе $\tilde{G}$, имеющей конечное число образующих. Здесь $[\tilde{G}, \sigma]$ — группа без кручения (она содержится в $[G, \Gamma]$) и $\tilde{H} = H \cap \tilde{G}$ — изолированная подгруппа в $\tilde{G}$.

Следовательно, $\tilde{H} \circ \sigma = \tilde{H}$, но тогда $h \circ \sigma \in H$, откуда следует, что H — σ-допустимая подгруппа. Теорема доказана.

Заметим, что требование, чтобы H была изолированной подгруппой в G, можно несколько ослабить. Из доказательства видно, что достаточно требовать, чтобы подгруппа $H \cap [G, \Gamma]$ была изолирована в $[G, \Gamma]$.

Приведенная теорема является обобщением известного факта теории локально нильпотентных групп без кручения.

Следующая теорема также в некотором смысле обобщает известное свойство локально нильпотентных групп без кручения.

1.5. *Пусть* (G, Γ) — *квазистабильная групповая пара и пусть* $R(G)$ — *группа без кручения. Тогда в такой паре имеется локальная система стабильных подпар* $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ *таких, что все* $G_\alpha \cap R(G)$ *изолированы в* $R(G)$ *и все* Γ_α *изолированы в* Γ.

Возьмем в (G, Γ) произвольную подпару с конечным числом образующих (H, Σ). Вместо H возьмем теперь подгруппу $\tilde{H} = HI(H \cap R(G))$, где изолятор I берется в радикале $R(G)$.

Ясно, что $\tilde{H}$ допустима относительно Σ, и легко проверить, что

$$\tilde{H} \cap R(G) = HI(H \cap R(G)) \cap R(G) = I(H \cap R(G)),$$

так что $\tilde{H} \cap R(G)$ — изолированная подгруппа в $R(G)$.

Так как подгруппа Σ стабильна относительно $H \cap R(G)$, то Σ стабильна и относительно $I(H \cap R(G))$. Учитывая, что $[\tilde{H}, \Sigma] \subset \tilde{H} \cap R(G)$, заключаем теперь, что Σ действует стабильно и в $\tilde{H}$.

Покажем теперь, что изолятор подгруппы Σ в Γ — $I(\Sigma)$ — действует в H как стабильная группа. Прежде всего, заметим, что согласно предыдущей теореме, точнее, замечания к ней, подгруппа $\tilde{H}$ допустима относительно $I(\Sigma)$. Пусть, далее, в $\tilde{H}$ задан некоторый стабильный относительно Σ ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \ldots \subset H_\gamma = \\ = I(H \cap R(G)) \subset \tilde{H}$$

и пусть члены H_α этого ряда изолированы в $R(G)$, так что все они $I(\Sigma)$-допустимы. Такой ряд является стабильным и относительно $I(\Sigma)$.

Действительно, так как фактор-группа $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ является группой без кручения, то из того, что Σ действует в этой группе тождественно, следует, что и $I(\Sigma)$ действует в ней тождественно. Кроме того, очевидно, что $I(\Sigma)$ действует тождественно и в фактор-группе $\tilde{H}/\tilde{H} \cap R(G)$. Таким образом, пара $(\tilde{H}, I(\Sigma))$ является стабильной парой. Множество всех таких пар составляет локальную систему в (G, Γ), удовлетворяющую нужным условиям.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если сама группа G является локально нильпотентной группой без кручения (и пара (G, Γ) квазистабильна), то в паре (G, Γ) имеется локальная система подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, стабильных и таких, что G_α изолирована в G и Γ_α изолирована в Γ.

2. Почти периодические автоморфизмы. Переходим к рассмотрению почти периодических элементов.

2.1 (В. Г. Вилянцер [3]). *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара и пусть* σ — *квазистабильный элемент в* Γ. *Элемент* σ *тогда и только тогда является почти* π-*элементом, когда* $[G, \sigma]$ — *периодическая* π-*группа.*

Вначале покажем, что если $[G, \sigma]$ — периодическая π-группа и σ — внешний нильэлемент в Γ, то σ является также и почти π-элементом. С этой целью докажем следующее вспомогательное предложение. Пусть $[G, \sigma]$ — π-группа, $a \in G$, $[a, \sigma] = b$, и при некотором $n|\pi$ выполняется $b \circ \sigma^n = b$. Тогда найдется такой показатель $m|\pi$, что $a \circ \sigma^m = a$.

Для доказательства этого факта применим к равенству $a \circ \sigma = ab$ элемент σ последовательно $n-1$ раз. Получим:

$$a \circ \sigma^n = ab(b \circ \sigma)(b \circ \sigma^2) \ldots (b \circ \sigma^{n-1}).$$

Обозначим еще $c = b(b \circ \sigma)(b \circ \sigma^2) \ldots (b \circ \sigma^{n-1})$; $[a, \sigma^n] = c$. Легко проверить, что из $b \circ \sigma^n = b$ следует $c \circ \sigma^n = c$. Теперь при любом $k > 0$ имеем $a \circ \sigma^{nk} = ac^k$. Если здесь k — порядок элемента c, то $c^k = e$ и $a \circ \sigma^{nk} = a$. Так как $k \mid \pi$, то и $m = nk \mid \pi$.

Теперь, как и в теореме 1.1, рассмотрим последовательность $g_0, g_1, \ldots, g_i, \ldots$, и пусть $g_{t+1} = e$, $g_t \circ \sigma = g_t$.

Применяя приведенное сейчас свойство к элементу g_{t-1}, мы покажем, что при некотором $n \mid \pi$ будет $g_{t-1} \circ \sigma^n = g_{t-1}$. Перейдя к g_{t-2}, аналогично получим, что найдется такое $m \mid \pi$, что $g_{t-2} \circ \sigma^m = g_{t-2}$. Так, продолжая, мы и для $g_0 = g$ найдем показатель $k \mid \pi$, при котором будет $g \circ \sigma^k = g$.

В одну сторону теорема доказана.

Доказывая обратное, будем уже предполагать в соответствии с условием теоремы, что σ — квазистабильный элемент. Будем еще предполагать, что σ является почти π-элементом. Нужно показать, что $[G, \sigma]$ — π-группа.

Как мы уже знаем, $[G, \sigma]$ является локально нильпотентной группой. Пусть P — силовская π-подгруппа в $[G, \sigma]$, и допустим, что P не совпадает с $[G, \sigma]$. Ясно, что P σ-допустима и фактор-группа $[G, \sigma]/P$ является группой без π-кручения.

Точно так же, как доказывалась теорема 1.1, можно показать, что если G — группа без π-кручения и σ — нильавтоморфизм этой группы, то при любом $m \mid \pi$ из $g \circ \sigma^m = g$ и $g \in G$ следует $g \circ \sigma = g$, так что в нашем случае элемент σ действует тождественно в фактор-группе $[G, \sigma]/P$ (σ — внешний нильэлемент и почти π-!).

Пусть теперь $h = [g, \sigma] \in [G, \sigma] \setminus P$. По условию, найдется такое число $n \mid \pi$, что $g \circ \sigma^n = g$. С другой стороны, $g \circ \sigma = gh$, $h \circ \sigma = ha$, где $a \in P$. Отсюда $g \circ \sigma^n = gh^n b$, $b \in P$. Но тогда мы получим $h^n b = e$, т. е. $h^n \in P$, что возможно лишь в случае, когда $h \in P$. Таким образом, $P = [G, \sigma]$, и теорема доказана.

Следствие. *Если* (G, Γ) — *групповая пара и каждый элемент из* Γ *квазистабилен, то* Γ *тогда и только тогда будет относительной* π-*группой, когда* $[G, \Gamma]$ — π-*группа.*

В связи с доказанной теоремой интересно заметить, что в аналогичных условиях из того, что Γ — чистая группа, еще не следует, что взаимный коммутант $[G, \Gamma]$ является группой без кручения.

Соответствующий пример можно найти в работе В. Г. Виляцера [5].

2.2. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара и* S — *конечное нильподмножество из* Γ. *Тогда если* $[G, S]$ — *локально конечная* π-*группа, то множество* S *является относительным* π-*множеством.*

Пусть g — произвольный элемент в G. Для каждого σ_i из S положим $g \circ \sigma_i = gh_i$. Элементов h_i конечное число, и все они лежат в $[G, S]$. Пусть H — S-допустимая подгруппа, порожденная всеми этими элементами. H — конечная π-группа. Легко видеть, что каждый элемент S-траектории, проходящей через элемент g, имеет вид gh, где $h \in H$. Следовательно, такая траектория конечна.

Пусть, далее, $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\} = X$ — конечное подмножество в G, и Σ — подгруппа в Γ, порожденная всеми элементами из S. Обозначим еще $\{X \circ \Sigma\} = F$. Подгруппа F имеет конечное число образующих и по доказанному Σ-централизатор каждого элемента из F имеет конечный индекс в Σ. Так как F имеет конечное число образующих, то ядро $\mathfrak{z}$ представления Σ относительно F также имеет конечный индекс в Σ. Так как каждый элемент из S является почти π-элементом, то каждый элемент из $\Sigma/\mathfrak{z}$ — π-элемент. Следовательно, $\Sigma/\mathfrak{z}$ — конечная π-группа, и лемма доказана.

2.3. *Пусть* (G, Γ) — *квазистабильная пара,* $R(G)$ — *радикал в* G, *и* P — *силовская* π-*подгруппа в* $R(G)$. *Тогда совокупность* S *всех почти* π-*элементов из* Γ *является*

нормальным делителем в Γ *и совпадает с ядром представления* Γ *относительно фактор-группы* G/P. *Группа* S *является также относительно локально конечной* π-*группой* *).

Ввиду предыдущей леммы достаточно показать, что множество S совпадает с ядром представления Γ относительно G/P. Обозначим через Σ ядро представления Γ относительно G/P, и пусть $\sigma \in \Sigma$. Тогда $[G, \sigma] \subset P$, и поэтому σ является почти π-элементом. Пусть теперь $\sigma \in S$. Тогда $[G, \sigma]$ принадлежит $R(G)$, и эта группа является периодической π-группой. Следовательно, $[G, \sigma]$ содержится в P и $\sigma \in \Sigma$, так что $S = \Sigma$, что и требовалось.

Покажем дальше, что если допустить, что подгруппа P конечна, то все почти π-элементы из Γ окажутся π-элементами, причем порядки всех таких элементов ограничены числом, зависящим лишь от порядка группы P.

Пусть Φ — циклическая подгруппа в Σ, $\Phi = \{\sigma\}$, и пусть $\mathfrak{z}$ — Φ-централизатор подгруппы P. Если порядок P равен n, то ясно, что порядок $\Phi/\mathfrak{z}$ не превосходит $n!$. Пусть теперь $\mathfrak{z} = \{\gamma\}$. Элемент γ действует тождественно в G/P и в P. Поэтому при любом $g \in G$ из $g \circ \gamma = gh$ следует $g \circ \gamma^n = gh^n$. Так как $h^n = e$, то $\gamma^n = \varepsilon$, так что порядок γ не превосходит n и порядок σ ограничен числом $n \cdot n!$.

2.4. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара и пусть* G — *локально конечная* p-*группа, а* Γ *относительно локально конечна. Группа* Γ *тогда и только тогда квазистабильна, когда она является относительной* p-*группой.*

Если Γ квазистабильна, то, как мы уже знаем, каждый элемент из Γ является почти p-элементом. Докажем обратное.

Пусть (H, Σ) — подпара с конечным числом образующих в (G, Γ).

Тогда как H, так и $\Sigma/\mathfrak{z}$ — конечные группы, где $\mathfrak{z}$ — ядро представления Σ относительно H. Кроме того,

*) Тот факт, что множество всех почти π-элементов есть подгруппа, можно вывести также из соответствующего свойства локально относительно нильпотентных групп, если еще учесть основную теорему следующего пункта. Однако здесь содержится более точное утверждение.

$\Sigma/\mathfrak{z}$ — p-группа. Но тогда естественно возникающее здесь полупрямое произведение H на $\Sigma/\mathfrak{z}$ — конечная p-группа. Такая группа нильпотентна. Отсюда вытекает, что Σ нильпотентна относительно H. Этим теорема доказана.

Из нее, в частности, вытекает, что если Γ — локально конечная группа автоморфизмов локально конечной p-группы G, то Γ тогда и только тогда квазистабильна, когда она является p-группой.

Здесь мы имеем пример того, как абстрактное свойство группы автоморфизмов влечет определенное ее внешнее свойство.

Из результатов настоящего пункта мы получаем еще следующую картину приведения квазистабильных групповых пар.

Пусть (G, Γ) — квазистабильная групповая пара, $R(G)$ — радикал в G, H — периодическая часть $R(G)$ и $H = \Pi H_p$ — представление H в виде прямого произведения силовских p-подгрупп по разным простым p. Обозначим через $\mathfrak{z}$ Γ-централизатор ряда $E \subset H \subset R(G) \subset G$, и пусть Γ_1 и Γ_2 — проекции Γ относительно H и $R(G)/H$ соответственно. Тогда Γ_2 — чистая и Γ_1 — относительно периодическая группы автоморфизмов, $\mathfrak{z}$ — метабелева группа и $\Gamma/\mathfrak{z}$ изоморфна подпрямому произведению Γ_1 и Γ_2. Кроме того, группа Γ_1 изоморфна полному прямому произведению относительных p-групп автоморфизмов.

3. Существование центральной системы у квазистабильной группы автоморфизмов. Как уже отмечалось, если пара (G, Γ) квазифинитно стабильна, то она одновременно локально относительно нильпотентна, и следовательно, в случае точного действия, группа Γ обладает центральной системой. Сейчас будет показано, что и для квазистабильных пар это тоже верно.

3.1. *Квазистабильная группа автоморфизмов произвольной группы обладает центральной системой.*

Эта теорема была доказана в работе Плоткина [17]. Сохраняя методы указанной работы, мы докажем несколько больше, имея также в виду новую работу Ф. Холла — Хартли [1].

Понятно, что для доказательства теоремы 3.1 достаточно установить, что каждая квазистабильная пара

является локально относительно нильпотентной. С другой стороны, чтобы доказать этот последний факт, достаточно ограничиться случаем точной конечно порожденной пары.

Итак, пусть (G, Γ) — точная конечно порожденная квазистабильная пара. Такая пара стабильна, а группы G и Γ обладают конечными системами образующих. Покажем, что Γ — нильпотентная группа. Этим теорема будет доказана.

Так как G — счётная группа, то в ней имеется стабильный ряд вида

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots \subset \bigcup_n G_n = [G, \Gamma] \subset G,$$

где все G_n — нильпотентные группы с конечным числом образующих. Допустим теперь, что $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ — системы образующих соответственно в G и Γ. В указанном сейчас ряде найдется некоторый член G_n, содержащий все $[a_i, \sigma_j]$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$. Так как G_n — Γ-допустимая подгруппа, то при этом очевидно также, что в G_n содержатся и все коммутаторы $[a_i, \sigma]$ по всем σ из Γ. Обозначим, далее, $G_n = H$, и пусть Σ — Γ-централизатор этой подгруппы. Так как Γ действует в H финитно стабильно, то Γ/Σ — нильпотентная группа. Нужно еще показать, что в Σ имеется центральный в Γ ряд.

Так как H нильпотентна, то в этой подгруппе имеется такой конечный Γ-стабильный ряд, который является одновременно центральным рядом. Пусть ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s \subset \ldots \subset H_n = H$$

обладает указанным свойством.

Дальше для каждого образующего элемента a_i положим:

$$\Gamma_s(a_i) = \mathfrak{z}_\Gamma(a_i/H_s) \cap \Sigma, \quad s \leqslant n.$$

Здесь мы воспользовались следующим обозначением: если F — подгруппа в G и X — подмножество, то X/F — совокупность смежных классов вида gF, $g \in X$; если еще F — Γ-допустима, то можно говорить о действии Γ в множестве G/F, и при этом $\mathfrak{z}_\Gamma(X/F)$ обозначает соответ-

ствующий Г-централизатор. Другими словами, $\mathfrak{z}_\Gamma(X/F)$ — это совокупность всех $\sigma \in \Gamma$ таких, что $[g, \sigma] \in F$ при любом $g \in X$. В нашем случае X состоит из одного элемента a_i. Ясно, что при $s_1 < s_2$ выполняется $\Gamma_{s_1}(a_i) \subset \subset \Gamma_{s_2}(a_i)$ и что $\Gamma_0(a_i)$ совпадает с пересечением Г-централизатора элемента a_i и подгруппы Σ. Кроме того, так как при любом $\sigma \in \Sigma$ $[a_i, \sigma] \in H = H_n$, то $\Gamma_n(a_i) = \Sigma$. Таким образом, мы приходим к ряду подгрупп

$$\Gamma_0(a_i) \subset \Gamma_1(a_i) \subset \ldots \subset \Gamma_s(a_i) \subset \ldots \subset \Gamma_n(a_i) = \Sigma.$$

Дословно повторяя выкладки леммы 1.2.2 и учитывая еще, что ряд $[H_s]$ является центральным рядом, можно проверить, что для любого $\sigma \in \Gamma_s(a_i)$, $s \leqslant n$, и любого $\gamma \in \Gamma$ коммутатор $[\sigma, \gamma]$ принадлежит $\Gamma_{s-1}(a_i)$, так что построенный ряд является центральным в Г рядом. Отсюда следует, что $\Gamma/\Gamma_0(a_i)$ является нильпотентной группой. Учитывая дальше, что пересечение всех $\Gamma_0(a_i)$ по всем элементам a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, совпадает с единицей в Г, мы теперь можем заключить, что и $\Gamma = \Gamma/\bigcap_i \Gamma_0(a_i)$ является нильпотентной группой, что и требовалось.

Из теоремы 3.1, в частности, следует, что локально конечная квазистабильная группа автоморфизмов произвольной группы локально нильпотентна.

Дальше мы отдельно рассмотрим еще случай произвольной точной стабильной пары.

Пусть (G, Γ) — такая пара и пусть ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G$$

является Г-стабильным рядом в G. Обозначим: $\Gamma_\alpha = \mathfrak{z}_\Gamma(G_\alpha)$. Легко видеть, что все Γ_α составляют в Г убывающий инвариантный ряд, и этот ряд является разрешимым рядом. Обозначим еще $\bar{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_{\alpha+1}$ и будем рассматривать эту группу как группу автоморфизмов группы $G_{\alpha+1}$. Кроме того, пусть $\Sigma = \Gamma_\alpha/\Gamma_{\alpha+1} \subset \bar{\Gamma}$.

Возьмем дальше в $G_{\alpha+1}$ произвольный элемент g, и пусть $\bar{\Gamma}_\beta(g) = \mathfrak{z}_{\bar{\Gamma}}(g/G_\beta) \cap \Sigma$, $\beta \leqslant \alpha$. Нетрудно понять, что при этом мы получим возрастающий ряд:

$$\bar{\Gamma}_0(g) \subset \bar{\Gamma}_1(g) \subset \ldots \subset \bar{\Gamma}_\alpha(g) = \Sigma,$$

где на предельных местах стоят объединения предыдущих членов. Как и в лемме 1.2.2, устанавливаем, что этот ряд является центральным в $\bar{\Gamma}$ рядом. Используя теперь тот факт, что пересечение всех $\bar{\Gamma}_0(g)$ по всем $g \in G_{\alpha+1}$ есть единица, мы можем отметить, что в Σ имеется убывающий инвариантный ряд $\Sigma = \Sigma_0 \supset \Sigma_1 \supset \ldots \supset \Sigma_\mu = E$ такой, что в каждом факторе этого ряда имеется возрастающий, центральный в $\bar{\Gamma}$ ряд. Применяя сказанное к каждому $\alpha \leqslant \gamma$, мы докажем, что в группе Γ имеется центральная система следующего специального вида. Часть членов этой системы составляет убывающий инвариантный разрешимый ряд в Γ, а в скачках этого ряда располагаются члены, составляющие возрастающие ряды, центральные относительно Γ.

4. Одно уточнение для групп без кручения. Здесь мы докажем следующую теорему:

4.1. *Если Γ — квазистабильная группа автоморфизмов группы без кручения G, то в Γ имеется центральная система, все факторы которой — группы без кручения.*

Из условия теоремы вытекает, что Γ — группа без кручения. Следовательно, центральная система в Γ тогда и только тогда обладает нужным свойством, когда все ее члены — изолированные подгруппы.

Рассмотрим дальше случай точной стабильной групповой пары (G, Γ) с группой G без кручения и такой, что в G имеется стабильный относительно Γ ряд вида

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots \subset \bigcup_n G_n = R(G) \subset G.$$

В силу теоремы 1.4, можно считать, что все члены этого ряда (кроме G) изолированы в радикале $R(G)$. Будем показывать, что Γ обладает изолированной центральной системой.

В каждом члене G_n данного ряда Γ индуцирует нильпотентную группу автоморфизмов без кручения. Такая группа обладает, конечно, изолированной центральной системой. Но тогда и в $R(G)$ Γ индуцирует группу автоморфизмов, обладающую изолированной центральной системой. Таким образом, если Σ — Γ-централизатор подгруппы $R(G)$, то фактор-группа Γ/Σ обладает изолированной центральной системой. Дальше, как и в преды-

дущем пункте для каждого $g \in G$ и для всех n положим $\Gamma_n(g) = \mathfrak{z}_\Gamma(g/G_n) \cap \Sigma$. Мы сможем утверждать, очевидно, что в Γ имеется изолированная центральная система, если будет показано, что все $\Gamma_n(g)$ — изолированные подгруппы.

Пусть $\sigma \in \Gamma$ и пусть $\sigma^m \in \Gamma_n(g)$. Согласно п. 3.1 Σ — изолированная в Γ подгруппа, и поэтому $\sigma \in \Sigma$. Но тогда $g \circ \sigma = gh$, $h \in R(G)$ и $g \circ \sigma^m = gh^m$. Из $\sigma^m \in \Gamma_n(g)$ следует, что $h^m \in G_n$. В силу изолированности G_n в $R(G)$ получаем $h \in G_n$. Но это значит, что $\sigma \in \Gamma_n(g)$, т. е. $\Gamma_n(g)$ — изолированная в Γ подгруппа. Рассматриваемый частный случай разобран.

Переходим к общему случаю. Пусть (G, Γ) — точная квазистабильная пара с группой G без кручения. Согласно 1.5 в (G, Γ) имеется локальная система подпар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, таких, что Γ_α — изолированная подгруппа в Γ и в G_α имеется стабильный относительно Γ_α ряд со свойствами, отмеченными при рассмотрении специального частного случая. Поэтому если Σ_α — ядро представления Γ_α относительно G_α, то фактор-группа $\Gamma_\alpha/\Sigma_\alpha$ обладает центральной системой с факторами без кручения. Отсюда заключаем, что и в Γ_α имеется изолированная центральная система. Так как все Γ_α изолированы в Γ, то и все члены их изолированных центральных систем также изолированы в Γ.

Как известно (А. Г. Курош [3]), исходя из членов центральных систем в локальных подгруппах Γ_α, можно построить центральную систему всей группы Γ, причем в таком построении используются лишь теоретико-множественные операции. Такие операции над изолированными подгруппами снова приводят к изолированным подгруппам. Таким образом, в Γ имеется изолированная центральная система, что и доказывает теорему.

Нетрудно заметить, что доказательство теоремы проходит и при более слабом условии — достаточно предполагать, что группой без кручения является радикал $R(G)$ или даже коммутант $[G, \Gamma]$.

В качестве следствия теоремы отметим следующее предложение:

Если квазистабильная группа автоморфизмов группы без кручения удовлетворяет условию минимальности для

изолированных нормальных делителей, то такая группа обладает возрастающим центральным рядом.

5. Примеры. Следующий простой пример показывает, что стабильная группа автоморфизмов может не быть локально нильпотентной.

В качестве группы Γ возьмем свободную группу. Пусть Γ^n — члены нижнего центрального ряда в Γ. Исходя из внутренних автоморфизмов, определим действие Γ в каждой фактор-группе Γ/Γ^n. Пусть G — прямое произведение групп Γ/Γ^n. Зададим представление группы Γ автоморфизмами группы G, исходя из действия Γ в каждом множителе, — такое представление, как мы знаем, называется прямым произведением представлений Γ относительно всех Γ/Γ^n. Ясно, что при этом получится точное представление и Γ действует в G как стабильная группа. Вместе с тем Γ не локально нильпотентна.

Приведем теперь пример, показывающий, что слабо стабильная группа автоморфизмов может не обладать центральной системой (даже при абелевой области действия).

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ и A_0 — счетный набор аддитивных групп рациональных чисел и пусть G — прямая сумма всех этих групп. Фиксируем в каждом A_i, $i=0, 1, 2, \ldots$ по элементу e_i. Тогда каждый элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g=\sum\limits_i \alpha_i e_i$, где α_i — рациональные числа.

Определим отображения φ и σ группы G в G по формулам:

$$e_{2k-1} \circ \varphi = e_{2k-1} + e_{2k} + e_{2k+1},$$
$$e_{2k} \circ \varphi = e_{2k} + e_{2k+1},$$
$$e_0 \circ \varphi = e_0,$$
$$g \circ \varphi = \Sigma\alpha_i (e_i \circ \varphi),$$

$$\left.\begin{aligned} e_{2k-1} \circ \sigma &= e_{2k-1} + \frac{1}{2^{k-1}} e_0, \\ e_{2k} \circ \sigma &= e_{2k} + \frac{1}{2^k} e_0, \end{aligned}\right\} k \geqslant 1$$

$$e_0 \circ \sigma = e_0,$$
$$g_0 \circ \sigma = \Sigma\alpha_i (e_i \circ \sigma).$$

Группу G можно рассматривать как векторное пространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots, e_0$, и в этом базисе φ и σ представимы бесконечными треугольными матрицами с единицами на главной диагонали. Легко проверяется, что отображения $g \to g \circ \varphi$ и $g \to g \circ \sigma$ являются взаимно однозначными отображениями на все G, и, следовательно, эти отображения — автоморфизмы.

Проверим дальше, что имеет место соотношение

$$\varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = \sigma.$$

Для этого достаточно воспользоваться следующими выкладками:

$$e_{2k-1} \circ \varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = (e_{2k-1} + e_{2k} + e_{2k+1}) \circ \sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} =$$
$$= \left(e_{2k-1} + e_{2k} + e_{2k+1} + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right)e_0\right)\varphi^{-1}\sigma^{-1} =$$
$$= \left(\left(e_{2k-1} + \frac{1}{2^{k-1}}e_0\right) + \frac{1}{2^{k-1}}e_0\right) \circ \sigma^{-1} = e_{2k-1} + \frac{1}{2^{k-1}}e_0 = e_{2k-1} \circ \sigma;$$

$$e_{2k} \circ \varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = (e_{2k} + e_{2k+1}) \circ \sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} =$$
$$= \left(e_{2k} + e_{2k+1} + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right)e_0\right) \circ \varphi^{-1}\sigma^{-1} =$$
$$= \left(\left(e_{2k} + \frac{1}{2^k}e_0\right) + \frac{1}{2^k}e_0\right) \circ \sigma^{-1} = e_{2k} + \frac{1}{2^k}e_0 = e_{2k} \circ \sigma;$$
$$e_0 \circ \varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = e_0 \circ \sigma.$$

Пусть теперь через Φ обозначена подгруппа в группе всех автоморфизмов группы G, порожденная элементами φ и σ. Из соотношения $\varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = \sigma$ вытекает, что группа Φ не может быть Z-группой. Вместе с тем Φ — слабо стабильная группа автоморфизмов группы G. Действительно, пусть G_i — подгруппа в G, порожденная всеми A_k с $k \geqslant i$ и A_0, и пусть G_w — пересечение всех G_i. Ясно, что это пересечение совпадает с A_0. При этом убывающий ряд

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_w \supset E$$

является, очевидно, стабильным относительно Φ рядом.

Отметим далее, что в работе Холла—Хартли [1], содержащей много интересных результатов о слабой ста-

бильности, показывается, что вообще каждая группа допускает некоторое точное слабо стабильное представление с убывающим стабильным рядом, и здесь же подробно рассматриваются случаи, когда возможны такие представления с абелевой областью действия.

Приведем еще несколько замечаний по поводу слабо стабильного случая.

Пусть задана точная групповая пара (G, Γ) и пусть в G имеется некоторая стабильная относительно Γ нормальная система:

$$E = G_0 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \subset \ldots \subset G_\gamma = G.$$

Возьмем в G произвольный элемент g и положим $\Gamma_\alpha(g) = \mathfrak{z}_\Gamma(g/G_\alpha)$. Легко проверяется, что подгруппы $\Gamma_\alpha(g)$ составляют нормальную систему в Γ, возможно с повторениями, минимальный член которой совпадает, вообще, не с единицей, а с Γ-централизатором элемента g. Опираясь на обобщенную лемму Грюна, можно также заметить, что каждый фактор этой системы изоморфен некоторой подгруппе соответствующего фактора стабильной системы $[G_\alpha]$. Используя эти соображения, а также тот факт, что пересечение всех $\Gamma_0(g)$ есть единица в Γ, можно, например, заключить, что, если система $[G_\alpha]$ является разрешимой системой, то и в Γ имеется разрешимая нормальная система.

Докажем теперь следующую теорему (Ф. Холл— Б. Хартли [1]).

5.1. *Пусть задана точная групповая пара* (G, Γ) *и пусть в* G *имеется инвариантная стабильная относительно* Γ *система. Тогда группа* Γ *обладает разрешимой нормальной системой.*

Согласно 1.4.2 в рассматриваемом случае во взаимном коммутанте $[G, \Gamma]$ имеется центральная система, стабильная относительно Γ. Пусть теперь g — произвольный элемент в G. Подгруппа $H = \{[G, \Gamma], g\}$, очевидно, Γ-допустима и обладает разрешимой стабильной относительно Γ нормальной системой. Но тогда и в $\Gamma/\mathfrak{z}_\Gamma(H)$ имеется разрешимая нормальная система. Остается заметить, что пересечение всех $\mathfrak{z}_\Gamma(H)$ есть единица в Γ.

§ 4. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СТАБИЛЬНОСТИ

1. Коммутант и стабильность. Мы уже знаем, что в теории стабильных и квазистабильных пар особую роль играет случай, когда группа G локально нильпотентна и, в частности, нильпотентна. Для этого последнего случая мы сейчас и приведем достаточные условия стабильности и квазистабильности действующей группы.

Часто бывает так, что некоторые свойства действия действующей группы Γ относительно группы G определяются действием Γ на некоторой подгруппе или фактор-группе группы G. Примером такого рода служит следующая теорема:

1.1. *Если (G, Γ) — групповая пара с нильпотентной группой G, то группа Γ тогда и только тогда финитно стабильна, когда она финитно стабильна относительно фактор-группы G/G'* (здесь G' — коммутант группы G).

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы. Первая из них — это лемма 3.3 из первого параграфа этой главы. Напомним ее.

Пусть (G, Γ) — групповая пара, Σ и Φ — подгруппы в Γ, причем Σ инвариантна относительно Φ. Пусть еще H — Γ-допустимая инвариантная подгруппа в G такая, что Σ и Φ действуют тождественно в G/H, а Σ — еще и в H. Тогда для любого n справедлива формула

$$[G, [\Sigma, \Phi; n]] = [[G, \Sigma], \Phi; n].$$

Из этой формулы, в частности, видно, что если при некотором n будет $[\Sigma, \Phi; n] = E$, то $[[G, \Sigma], \Phi; n] = E$, т. е. Φ нильпотентна относительно $[G, \Sigma]$.

В следующей лемме приводится обобщение приведенного факта для случая, когда H — центральная подгруппа в G.

1.2. *Если в условиях отмеченной леммы H — центральная подгруппа в G, и Φ действует в G/H финитно стабильно, то из того, что при некотором n выполняется $[\Sigma, \Phi; n] = E$, следует, что Φ финитно стабильна относительно $[G, \Sigma]$.*

Пусть нормальный ряд

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{i-1} \subset G_i \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

является стабильным относительно Ф рядом. Так как все G_i содержат подгруппу H, то все они Σ-допустимы. Обозначим $H_i=[G_i, \Sigma]$. Мы получим ряд

$$E=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_{i-1}\subset H_i\subset\ldots\subset H_{n-1}\subset H_n=[G, \Sigma],$$

все члены которого являются Ф-допустимыми нормальными делителями группы G (так как все они в центре). Покажем, что этот ряд можно уплотнить до конечного стабильного относительно Ф ряда.

Беря в упоминавшейся лемме в качестве G подгруппу G_1, мы видим, что Ф нильпотентна (финитно стабильна) относительно H_1. Докажем теперь, что Ф нильпотентна относительно произвольного фактора H_i/H_{i-1}. Этим лемма будет доказана.

Введем обозначения:

$$\bar{G}=G_i/H_{i-1},\quad \bar{H}=G_{i-1}/H_{i-1},$$

и рассмотрим групповую пару $(\bar{G}, \Phi)$. Ясно, что Σ действует тождественно в $\bar{H}$ и $\bar{G}/\bar{H}$, а Ф — в $\bar{G}/\bar{H}$. Как и раньше, мы можем заключить, что $[[\bar{G}, \Sigma], \Phi; n]=\bar{E}$, т. е. Ф нильпотентна относительно $[\bar{G}, \Sigma]$. Но, очевидно, $[\bar{G}, \Sigma]=[G_i, \Sigma]/H_{i-1}$. Отсюда мы получаем, что Ф нильпотентна относительно H_i/H_{i-1}.

Переходим к доказательству теоремы. Применим индукцию по длине s нижнего центрального ряда группы G. Для $s=1$ теорема тривиальна.

Пусть она уже доказана для всех $s<k$ и пусть ряд

$$G=G^1\supset G^2\supset\ldots\supset G^{k-2}\supset G^{k-1}\supset G^k=E \tag{*}$$

является нижним центральным рядом группы G с длиной k. Пусть группа Г нильпотентна относительно G/G'. В силу предположения индукции, можно считать, что Г нильпотентна относительно фактор-группы G/G^{k-1}. Обозначим:

$$G^{k-2}=\mathfrak{G},\quad G^{k-1}=H.$$

H — центральная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Пусть, далее, Σ — группа внутренних автоморфизмов группы G, $\bar{\Gamma}$ — проекция Г относительно G, и $\mathfrak{A}$ — группа всех автоморфизмов группы G.

Так как G^{k-2} — характеристическая подгруппа в G, то имеет смысл групповая пара $(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. Очевидно, что Σ действует тождественно в H и $\mathfrak{G}/H$, $\bar{\Gamma}$ нильпотентна относительно $\mathfrak{G}/H$, что $[\mathfrak{G}, \Sigma] = [\mathfrak{G}, G]$ и что Σ инвариантна относительно $\bar{\Gamma}$.

Используя, далее, изоморфизм между парами $(G/Z, \bar{\Gamma})$ и внутренней парой $(\Sigma, \bar{\Gamma})$ и учитывая, что Γ нильпотентна относительно G/Z, можно утверждать, что при некотором n выполняется $[\Sigma, \bar{\Gamma}; n] = E$.

Теперь из леммы 1.2 сразу получим, что Γ нильпотентна относительно $[\mathfrak{G}, \Sigma] = G^{k-1}$, что и доказывает теорему.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующая теорема Ф. Холла [2]:

Если в группе $\mathfrak{G}$ имеется нильпотентный нормальный делитель G такой, что $\mathfrak{G}/G'$ — нильпотентная группа, то и $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа.

В действительности теорема 1.1 была получена в порядке обобщения этой теоремы.

2. Коммутант и квазистабильность. Здесь мы сохраняем обозначения предыдущего пункта.

2.1. *Пусть H — центральная подгруппа в G, Φ имеет конечное число образующих и в Σ имеется локальная система из инвариантных относительно Φ подгрупп Σ_α, для каждой из которых найдется $n_\alpha = n(\Sigma_\alpha)$ такое, что $[\Sigma_\alpha, \Phi; n_\alpha] = E$. Тогда если Φ квазифинитно стабильна относительно G/H, то Φ квазифинитно стабильна и относительно $[G, \Sigma]$.*

Подгруппы вида $[G, \Sigma_\alpha]$ составляют локальную систему в $[G, \Sigma]$ и все они Φ-допустимы. Поэтому достаточно показать, что Φ квазифинитно стабильна относительно каждой из этих подгрупп.

Так как Φ имеет конечное число образующих, то в G/H имеется локальная система из Φ-допустимых подгрупп G_β/H, относительно каждой из которых Φ финитно стабильна. Беря теперь в лемме 1.2 в качестве G подгруппу G_β, а в качестве Σ — Σ_α, мы получим, что Φ финитно стабильна относительно $[G_\beta, \Sigma_\alpha]$. Так как подгруппы $[G_\beta, \Sigma_\alpha]$ по всем β составляют, очевидно, локальную систему в $[G, \Sigma_\alpha]$, то утверждение доказано.

Докажем теперь следующую теорему:

2.2. *Конечное множество M действующей группы* Γ *нильпотентной группы G тогда и только тогда является нильмножеством относительно G, когда оно есть нильмножество относительно фактор-группы G/G'.*

Будем считать, что теорема доказана для всех нильпотентных групп класса $s<k$, и допустим, что G — нильпотентная группа, нижний центральный ряд которой (*) имеет длину k. Пусть M — конечное множество автоморфизмов группы G, являющееся нильмножеством относительно G/G'; M — нильмножество также и относительно G/G^{k-1}. Обозначим через Φ группу автоморфизмов группы G, порожденную множеством M. Так как G — нильпотентная группа, то из нильсвойства M относительно G/G^{k-1} следует, что Φ квазифинитно стабильна относительно G/G^{k-1}. Это значит, что в G/G^{k-1} имеется локальная система из Φ-допустимых подгрупп G_α/G^{k-1}, относительно каждой из которых Φ действует как финитно стабильная группа — для каждой G_α найдется такое $n_\alpha=n(G_\alpha)$, что $[G_\alpha, \Phi; n_\alpha]$ принадлежит центру группы G. В дальнейшем мы воспользуемся теми же обозначениями, что и при доказательстве леммы 2.1. Обозначим еще через Σ_α подгруппу в $\Sigma=\hat{G}$, соответствующую G_α. Ясно, что Σ_α инвариантна относительно Φ, и для $n_\alpha=n(G_\alpha)$ будет $[\Sigma_\alpha, \Phi; n_\alpha]=E$. Поэтому условия леммы 2.1 выполняются, так что Φ квазифинитно стабильна относительно $[\mathfrak{G}, \Sigma]=G^{k-1}$, что и доказывает теорему.

Одновременно доказана следующая теорема:

2.3. *Пусть G — нильпотентная группа и* Γ *— ее группа автоморфизмов.* Γ *тогда и только тогда локально нильпотентна относительно G, когда она локально нильпотентна относительно G/G'.*

Из этой теоремы легко вытекает следующий признак локально нильпотентной абстрактной группы.

Если в группе $\mathfrak{G}$ имеется нильпотентный нормальный делитель G такой, что $\mathfrak{G}/G'$ — локально нильпотентная группа, то и $\mathfrak{G}$ — локально нильпотентная группа.

2.4. *Пусть (G, Γ) — групповая пара с нильпотентной группой G и пусть Σ — нормальный делитель в* Γ *такой, что* Γ *нильпотентна (локально нильпотентна) относи-*

тельно $G/[G, \Sigma]$ *и* (*во внутренней паре*) *относительно* Σ/Σ'. *Тогда, если* Σ *нильпотентна относительно* G, *то и* Γ *нильпотентна* (*локально нильпотентна*) *относительно* G.

Рассмотрим только случай внешней локальной нильпотентности. Из того, что Σ финитно стабильна относительно G, следует, что Σ — нильпотентная группа. Но тогда по предыдущей теореме Γ локально нильпотентна относительно Σ. Ограничиваясь случаем, когда Γ имеет конечное число образующих, мы видим, что в Σ имеется локальная система из инвариантных относительно Γ подгрупп Σ_α, в каждой из которых Γ индуцирует финитно стабильную группу автоморфизмов.

Пусть вначале G — абелева группа. Обозначив $[G, \Sigma] = G_1, \ldots, [G_i, \Sigma] = G_{i+1}, \ldots$, получим в G убывающий ряд Σ-коммутантов $G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-2} \supset G_{k-1} \supset \supset G_k = E$. Этот ряд состоит из Γ-допустимых подгрупп и является стабильным относительно Σ. Если ряд имеет длину $k = 2$, то теорема непосредственно содержится в лемме 2.1. Пусть она уже доказана для рядов длины $\leqslant k-1$. Тогда Γ локально нильпотентна относительно G/G_{k-1} и, в частности, относительно G_{k-2}/G_{k-1}. Применяя лемму 2.1 к группе G_{k-2}, мы получим, что Γ локально нильпотентна относительно $[G_{k-2}, \Sigma] = G_{k-1}$. Следовательно, Γ локально нильпотентна относительно G.

Рассмотрим теперь случай, когда G — нильпотентная группа. Так как Σ финитно стабильна относительно G, то Σ финитно стабильна и относительно фактор-группы G/G'. Ясно также, что из локальной нильпотентности Γ относительно $G/[G, \Sigma]$ вытекает локальная нильпотентность Γ относительно фактор-группы G/G' по ее Σ-коммутанту. Отсюда следует, что Γ локально нильпотентна относительно G/G'. По теореме 2.3 Γ локально нильпотентна относительно G.

В связи с рассмотрениями этого пункта отметим еще, что было бы интересно исследовать роль подгруппы Фраттини в аналогичных вопросах.

3. Роль центра. Выше были рассмотрены случаи, когда стабильность Γ достаточно проверять на абелевой фактор-группе G/G'. Сейчас будет рассмотрен случай, когда

такую проверку достаточно осуществлять для центра группы G. Вначале отметим следующий, почти очевидный факт для внутренней пары.

Если $\mathfrak{G}$ — группа и H — ее локально нильпотентный нормальный делитель, то во внутренней паре $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ подпара $(\mathfrak{G}, H)$ квазистабильна.

Действительно, пусть (A, B) — подпара из $(\mathfrak{G}, H)$ с конечным числом образующих и пусть C — подгруппа в $\mathfrak{G}$, порожденная A и B. C имеет конечное число образующих, и следовательно, в пересечении $C \cap H$ можно построить возрастающий нормальный ряд, начинающийся с B.

Дополнив этот ряд подгруппой C, мы получим в C стабильный относительно B ряд. Так как B стабильна относительно C, то тем более B стабильна относительно A, так что в $(\mathfrak{G}, H)$ имеется локальная система из стабильных подпар.

Понятно, что если H — группа с центральным рядом, то пара $(\mathfrak{G}, H)$ стабильна, а если H нильпотентна, то H нильпотентна также и относительно $\mathfrak{G}$.

Определим дальше еще одно свойство представления, играющее в ряде вопросов важную роль и уже применявшееся раньше.

Представление группы Γ относительно группы G назовем *G-инвариантным*, если проекция Γ в группе всех автоморфизмов группы G инвариантна относительно внутренних автоморфизмов.

Имеет место следующая теорема:

3.1. *Если представление Γ относительно G является G-инвариантным и Γ — локально нильпотентная группа, то для квазистабильности пары (G, Γ) достаточно, чтобы группа Γ была квазистабильной относительно центра Z группы G.*

Пусть условия теоремы удовлетворены. Покажем вначале, что пара $(G/Z, \Gamma)$ является квазистабильной. Для этого достаточно установить, что квазистабильна пара $(G/Z, \bar{\Gamma})$, где $\bar{\Gamma}$ — проекция Γ относительно G. Обозначим через I группу внутренних автоморфизмов группы G и рассмотрим в группе всех автоморфизмов группы G внутреннюю подпару $(I, \bar{\Gamma})$. Так как $\bar{\Gamma}$ инвариантна относительно I, то, в силу предыдущих

замечаний, пара $(I, \bar{\Gamma})$ квазистабильна. Имея в виду, что между парами $(G/Z, \bar{\Gamma})$ и $(I, \bar{\Gamma})$ имеется изоморфизм, мы теперь заключаем, что и $(G/Z, \bar{\Gamma})$ — квазистабильная пара. Но тогда квазистабильна и пара $(G/Z, \Gamma)$.

Если теперь Γ квазистабильна относительно центра Z, то, в силу теоремы 7.2.2.7, Γ квазистабильна и относительно G.

Если, в частности, группа G является группой без центра, то для G-инвариантного представления внутренняя локальная нильпотентность Γ влечет ее внешнюю локальную нильпотентность.

В заключение пункта с помощью теоремы 2.3 докажем еще следующую теорему (обобщение теоремы 7.2.1.1):

3.2. *Пусть (G, Γ) — групповая пара с локально нильпотентной группой G, и допустим, что в G имеется система образующих X такая, что для любого $x \in X$ и любого конечного подмножества $Y \subset \bar{\Gamma}$ найдется $n = n(x, Y)$, при котором все коммутаторы $[x, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, $\sigma_i \in Y$, обратятся в единицу. Тогда Γ — квазистабильная группа.*

Возьмем в X некоторое конечное подмножество X_0, в Γ — конечное подмножество Y, и пусть (H, Σ) — подпара, порожденная этими подмножествами. Легко видеть, что ввиду условий H имеет конечное число образующих и, следовательно, нильпотентна. Рассмотрим пару $(H/H', \Sigma)$. Ясно, что в H/H' имеется система образующих типа X относительно Y (это — смежные классы xH', $x \in X_0$, и классы $[x, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]H'$, $\sigma_i \in Y$). Согласно п. 2.1 можно утверждать, что группа Σ стабильна относительно H/H'. По теореме 2.3 теперь заключаем, что Σ стабильна и относительно H. Так как подпары вида (H, Σ) составляют локальную систему в (G, Γ), то доказано, что (G, Γ) — квазистабильная пара.

§ 5. РАДИКАЛЫ СТАБИЛЬНОГО ТИПА В ГРУППОВЫХ ПАРАХ

1. Радикалы действующей группы. Все эти радикалы уже рассматривались в третьей главе в связи с представлениями групп относительно общих Ω-групп. Здесь мы сделаем дополнительные замечания применительно к тому случаю, когда областью действия служит группа.

В п. 3.3.3. приводились два случая существования квазистабильного радикала действующей группы. Если иметь дело с групповыми парами, соответствующие предположения могут быть ослаблены, а именно, теперь уже не нужно предполагать, чтобы область действия G была локально нетеровой. Имеет место следующая теорема:

1.1. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара и пусть выполнено одно из следующих условий:* а) *группа* Γ *локально нетерова*, б) *пара* (G, Γ) *локально ограничена. Тогда в* Γ *существует* β-*радикал.*

Для доказательства возьмем в G радикал $R(G)$, и пусть A и B — квазистабильные относительно G нормальные делители в Γ. Так как $R(G)$ — локально нетерова группа, то из 3.3.3 следует, что произведение AB квазистабильно относительно $R(G)$. Кроме того, A и B, а вместе с ними и AB, действуют тождественно в $G/R(G)$. Согласно теореме 2.2.7 теперь заключаем, что AB — квазистабильная группа. Отсюда следует, что в Γ имеется β-радикал.

Отметим теперь следующую лемму:

1.2. *Если* (G, Γ) — *групповая пара, и* A *и* B — *подгруппы в* Γ, *составляющие локально ограниченную внутреннюю пару, то из того, что каждая из этих подгрупп квазистабильна, следует, что и произведение* AB — *квазистабильная группа.*

Для доказательства этой леммы достаточно ограничиться, как и в предыдущей теореме, случаем локально нильпотентной группы G, а для этого случая доказательство совпадает с соответствующими рассуждениями из доказательства теоремы 3.3.1.2.

С помощью этой леммы легко доказывается следующее предложение:

1.3. *Если* G — *группа,* $R(G)$ — *ее радикал и* $\hat{R}$ — *группа внутренних автоморфизмов, индуцируемых в* G *радикалом, то для любой квазистабильной группы автоморфизмов* Γ *группы* G *группа* $\hat{R}\Gamma$ *также квазистабильна.*

Действительно, $\hat{R}$ является, очевидно, квазистабильной группой автоморфизмов группы G. С другой стороны, так как пара $(R(G), \Gamma)$ квазистабильна, а внутренняя пара $(\hat{R}, \Gamma)$, взятая в группе всех автоморфизмов

группы G, является гомоморфным образом пары $(R(G), \Gamma)$, то и пара $(\hat{R}, \Gamma)$ квазистабильна. Следовательно, пара подгрупп $(\hat{R}, \Gamma)$ является локально ограниченной парой. Остается сослаться на лемму 1.2.

Из отмеченного предложения в свою очередь вытекает, что если групповая пара (G, Γ) квазистабильна, то в радикале $R(G)$ имеется стабильная относительно Γ центральная система.

В самом деле, пусть $\bar{\Gamma}$ — проекция Γ относительно G. Так как группа $\hat{R}\bar{\Gamma}$ квазистабильна относительно $R(G)$, то по теореме 1.3 в $R(G)$ имеется стабильная относительно $\hat{R}\Gamma$ нормальная система. Такая система и обладает нужным свойством.

1.4. *Пусть для любой подгруппы с конечным числом образующих* $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ *в радикале* $R(G)$ *имеется локальная система из* Γ_α*-допустимых подгрупп конечного ранга. Тогда произведение всех квазистабильных нормальных делителей из* Γ *также является квазистабильным нормальным делителем.*

Достаточно рассмотреть случай двух сомножителей. При этом мы докажем больше: если Σ и Φ — две квазистабильные подгруппы и одна из них, например Σ, — нормальный делитель в Γ, то произведение $\Sigma\Phi$ — также квазистабильная подгруппа.

В группе $\Sigma\Phi$ имеется, очевидно, локальная система из подгрупп с конечным числом образующих вида $\Gamma_\alpha = \Sigma_\alpha\Phi_\alpha$, где $\Sigma_\alpha = \Gamma_\alpha \cap \Sigma$ и $\Phi_\alpha = \Gamma_\alpha \cap \Phi$. Пусть теперь H — Γ_α-допустимая подгруппа конечного ранга в $R(G)$. В силу теоремы 1.2.1 из следующей главы, подгруппы Σ_α и Φ_α стабильны относительно H. Кроме того, мы знаем, что в H имеется возрастающий разрешимый ряд из характеристических подгрупп, так что произведение $\Gamma_\alpha = \Sigma_\alpha\Phi_\alpha$ стабильно относительно H. Так как подгруппы типа H составляют в $R(G)$ локальную систему, то доказано, что группа Γ_α квазистабильна относительно $R(G)$. По теореме 2.2.7 Γ_α квазистабильна и относительно G. Этим доказано, что группа $\Sigma\Phi$ квазистабильна относительно G.

Заметим, что условие теоремы 1.4 заведомо выполнено, если представление Γ относительно $R(G)$ является локально ограниченным.

Действительно, в этом случае для любой подгруппы Γ_α из Γ с конечным числом образующих в радикале $R(G)$ имеется локальная система из Γ_α-допустимых подгрупп с конечным числом образующих. Все такие подгруппы, будучи нильпотентными, имеют конечный ранг.

Отметим далее, что в работе В. Г. Виляцера [5] строится пример, показывающий, что β-радикал существует не всегда. Конструкция этого примера близка к конструкции примера из п. 2.4.5.

Приведем теперь следующую теорему:

1.5. *Пусть (G, Γ) — групповая пара и пусть в группе G имеется возрастающий нормальный ряд $[G_\alpha]$ из Γ-допустимых подгрупп, такой, что квазистабильные радикалы группы Γ относительно всех $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ сами квазистабильны. Тогда квазистабильный радикал группы Γ относительно G также является квазистабильной подгруппой и совпадает с пересечением всех квазистабильных радикалов Γ, определяемых парами $(G_{\alpha+1}/G_\alpha, \Gamma)$.*

Пусть Γ_α — квазистабильный радикал в Γ, связанный с парой $(G_{\alpha+1}/G_\alpha, \Gamma)$. По условию, пересечение $\mathfrak{z}$ всех Γ_α индуцирует в каждом факторе ряда $[G_\alpha]$ квазистабильную группу автоморфизмов. По теореме 2.2.7 $\mathfrak{z}$ квазистабильна относительно G, и поэтому имеем включение $\mathfrak{z} \subset \beta_G(\Gamma)$.

Если, с другой стороны, Σ — некоторый квазистабильный нормальный делитель в Γ, то он индуцирует квазистабильную группу автоморфизмов в каждом факторе ряда $[G_\alpha]$, и поэтому, $\Sigma \subset \mathfrak{z}$. Тем самым мы получаем обратное включение $\beta_G(\Gamma) \subset \mathfrak{z}$, что и доказывает теорему.

Следующее предложение относится к случаю нильпотентной области действия.

1.6. *Пусть (G, Γ) — групповая пара с нильпотентной группой G. Тогда имеет место равенство $\beta_G(\Gamma) = \beta_{G/G'}(\Gamma)$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться теоремой 2.3 из предыдущего параграфа. Согласно этой теореме подгруппа $\Sigma \subset \Gamma$ тогда и только тогда квазистабильна относительно G, когда она квазистабильна относительно фактор-группы по ком-

мутанту G/G', так что $\beta_G(\Gamma)$ и $\beta_{G/G'}(\Gamma)$ порождаются одними и теми же подгруппами и поэтому совпадают.

Сейчас мы намерены перейти к локально стабильному радикалу, который обозначим через $\beta_G^*(\Gamma)$. Вначале приведем одну лемму, обобщающую рассуждение, уже применявшееся в п. 5.2.3.

1.7. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара с областью действия* G, *являющейся* RN^*-*группой, и пусть* Y — *конечное ограниченное симметрическое подмножество в* Γ. *Тогда в* G *имеется возрастающий нормальный разрешимый ряд, все члены которого* Y-*допустимы.*

Пусть $[A_\alpha]$ — произвольный возрастающий нормальный разрешимый ряд в G. Для каждой подгруппы A_α через B_α обозначим пересечение всех подгрупп вида $A_\alpha \circ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_k}$, $\sigma_{i_j} \in Y$. Как и в п. 5.2.3, показывается, что B_α — нормальный делитель в $B_{\alpha+1}$, и $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ — абелевы группы. Покажем теперь, что если β предельное, то B_β есть объединение всех B_α, $\alpha < \beta$. Пусть $g \in B_\beta = \bigcap A_\beta \circ \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_k}$.

Последнее условие равносильно тому, что элементы $g \circ \sigma_{i_k}^{-1}\ldots\sigma_{i_2}^{-1}\sigma_{i_1}^{-1} \in A_\beta$ при всех $\sigma_{i_j} \in Y$.

По определению ограниченного множества действующих элементов подгруппа, порожденная всеми элементами $g \circ \sigma_{i_k}^{-1}\ldots\sigma_{i_2}^{-1}\sigma_{i_1}^{-1}$, порождается некоторым конечным подмножеством этого множества. Отсюда следует, что найдется число $\alpha < \beta$ такое, что все рассматриваемые элементы принадлежат A_α. Но тогда g принадлежит B_α, что и требовалось. Ряд, составленный из всех B_α, инвариантен относительно Y.

Докажем теперь следующую теорему:

1.8. *Если* (G, Γ) — *групповая пара, в которой* Γ — *квазистабильная группа, такая, что* $[G, \Gamma] \subset \beta^*(G)$, *то* Γ *локально стабильна.*

Пусть Σ — подгруппа с конечным числом образующих в Γ. Так как Γ — локально ограниченная группа, то по лемме в $\beta^*(G)$ имеется возрастающий нормальный разрешимый ряд из Σ-допустимых подгрупп. Теперь можно заключить, что множество Σ стабильно относительно $\beta^*(G)$. Так как Σ действует тождественно

и в $G/\beta^*(G)$, то ясно, что Σ — стабильная относительно G группа.

Следствие. *Если в групповой паре* (G, Γ) $R(G)$ *есть* RN^**-группа, то всякая квазистабильная подгруппа из* Γ *является локально стабильной.*

Теперь мы можем доказать теорему, параллельную теореме 1.1:

1.9. Пусть (G, Γ) — *групповая пара и пусть выполнено одно из следующих условий:* а) *группа* Γ *локально нетерова,* б) *пара* (G, Γ) *локально ограничена. Тогда в* Γ *существует локально стабильный радикал* $\beta^*_G(\Gamma)$.

Пусть Σ и Φ — два локально стабильных нормальных делителя в Γ. По теореме 1.1 $\Sigma\Phi$ — квазистабильный нормальный делитель. Так как $[G, \Sigma\Phi] \subset \beta^*(G)$, то согласно 1.8 $\Sigma\Phi$ — локально стабильный нормальный делитель, что и требовалось.

Ясно также, что если (G, G) — внутренняя пара, то $\beta^*_G(G)$ существует, и этот внешний радикал совпадает с внутренним радикалом $\beta^*(G)$. Кроме того, всегда имеем $[G, \beta^*_G(\Gamma)] \subset \beta^*(G)$.

Как мы уже уславливались, всякий возрастающий нормальный ряд Γ-допустимых подгрупп группы G коротко называется Γ-рядом. Легко проверить, что если Γ-ряд $[H_\alpha]$ является уплотнением Γ-ряда $[F_\beta]$, то Γ-централизатор второго ряда принадлежит Γ-централизатору первого ряда. Отсюда следует, что теоретико-множественная сумма всех таких Γ-централизаторов является (инвариантной) подгруппой в Γ. Обозначим эту подгруппу через $\mathfrak{z}_G(\Gamma)$. В случае, когда группа G обладает композиционными Γ-рядами, Γ-централизаторы всех таких рядов совпадают с $\mathfrak{z}_G(\Gamma)$. Ясно, что $\mathfrak{z}_G(\Gamma)$ — локально стабильный нормальный делитель в Γ: $\mathfrak{z}_G(\Gamma) \subset \beta^*_G(\Gamma)$.

Перейдем теперь к рассмотрению того специального случая, когда действующая группа Γ является локально относительно нильпотентной группой. (В частности, она может быть и абстрактно локально нильпотентной группой.)

1.10. *Если в групповой паре* (G, Γ) *группа* Γ *локально относительно нильпотентна, то совокупность всех*

квазистабильных элементов из Γ *совпадает с* β*-радикалом группы* Γ.

Рассмотрим вначале случай, когда группа Γ является нильпотентной группой автоморфизмов группы G. Обозначим через Φ подгруппу в Γ, порожденную всеми квазистабильными автоморфизмами группы G, лежащими в Γ. Пусть еще $\mathfrak{G} = G\Phi$ — подгруппа в голоморфе группы G, порожденная G и Φ. Если σ — квазистабильный автоморфизм группы G и $\sigma \in \Phi$, то, так как Φ — нильпотентная группа, в силу теоремы 2.2.7, σ — квазистабильный элемент в группе $\mathfrak{G}$. Отсюда $\sigma \in R(\mathfrak{G})$. По условию, Φ порождается всеми такими σ, и следовательно, $\Phi \subset R(\mathfrak{G})$. Будучи подгруппой в $R(\mathfrak{G})$, группа Φ квазистабильна относительно $\mathfrak{G}$ и, следовательно, относительно G. Это, в частности, означает, что подгруппа Φ совпадает с множеством всех квазистабильных автоморфизмов, содержащихся в Γ.

Пусть теперь группа Γ локально относительно нильпотентна и пусть $S = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — конечное число квазистабильных элементов в Γ. Покажем, что подгруппа Σ, порожденная этим множеством, квазистабильна. По условию, в группе G имеется локальная система из Σ-допустимых подгрупп G_α таких, что каждый раз проекция Σ относительно G_α нильпотентна. Пусть Σ_α — такая проекция. Так как Σ_α порождается квазистабильными автоморфизмами группы G_α, то, в силу предыдущего, Σ_α — квазистабильная группа автоморфизмов группы G_α. Отсюда следует, что группа Σ квазистабильна относительно G. Система всех подгрупп типа Σ составляет локальную систему в группе Φ, порожденной всеми квазистабильными элементами из Γ. Поэтому Φ — также квазистабильная группа и совпадает, следовательно, с множеством всех квазистабильных элементов группы Γ.

Пусть дальше γ — произвольный элемент в Γ. Так как пары (G, Φ) и $(G, \gamma^{-1}\Phi\gamma)$ изоморфны, то группа $\gamma^{-1}\Phi\gamma$ квазистабильна относительно G. Но тогда $\gamma^{-1}\Phi\gamma \subset \Phi$, что и доказывает инвариантность подгруппы Φ в Γ.

Раньше, п. 3.3, отмечалось, что если группа Γ квазистабильна, то она также и локально относительно нильпотентна. Из приведенной теоремы вытекает, что обрат-

ное утверждение также справедливо, если дополнительно допустить, что группа Г порождается квазистабильными элементами. Таким образом, группа Г тогда и только тогда квазистабильна, когда она локально относительно нильпотентна и порождается квазистабильными элементами.

1.11. *Если в групповой паре* (G, Γ) *группа* Γ *локально относительно нильпотентна, то радикал* $\beta_G^*(\Gamma)$ *совпадает с множеством стабильных элементов из* Γ.

Пусть Y — указанное множество стабильных элементов и $\Phi=\{Y\}$. По предыдущему, Φ — квазистабильная группа, и, кроме того, $[G, \Phi]\subset\beta^*(G)$, так что Φ — локально стабильная группа. Но тогда все элементы из Φ стабильны относительно G и $Y=\Phi=\beta_G^*(\Gamma)$.

Напомним, что аналогичная теорема для γ-радикала уже доказывалась.

Естественно определить теперь следующие два внешних радикала действующей группы Г.

Обозначим через $\tilde{R}(\Gamma)$ полный прообраз в Г локально нильпотентного радикала проекции Г относительно G. Ясно, что $\tilde{R}(\Gamma)$ — локально относительно нильпотентная группа. Внешний радикал $R_G(\Gamma)$ — это теперь совокупность всех квазистабильных элементов из Г, лежащих в $\tilde{R}(\Gamma)$. Согласно предыдущему, $R_G(\Gamma)$ — квазистабильный нормальный делитель в Г. Пусть еще $R_G^*(\Gamma)$ — совокупность всех стабильных элементов из Г, принадлежащих $\tilde{R}(\Gamma)$. Как мы видели, $R_G^*(\Gamma)$ — локально стабильный нормальный делитель в Г.

Мы теперь имеем следующие включения:

$$\gamma_G(\Gamma)\subset R_G^*(\Gamma)\subset\beta_G^*(\Gamma)\subset\beta_G(\Gamma),$$
$$R_G^*(\Gamma)\subset R_G(\Gamma)\subset\beta_G(\Gamma).$$

В связи с этими соотношениями интересно еще обратить внимание на следующее обстоятельство. Согласно теоремам 1.1 и 1.9, если (G, Γ) — групповая пара, в которой группа Г локально нетерова, или если эта пара локально ограничена, то в Г имеются квазистабильный и локально стабильный радикалы. С другой стороны, согласно теоремам 2.4.2.1 и 2.4.6.3 в отмеченных случаях в Г имеется также и локально относи-

тельно нильпотентный радикал. Обозначим здесь этот радикал через $\tilde{\tilde{R}}_G(\Gamma)$. Ясно, что $\beta_G(\Gamma)$ и $\beta_G^*(\Gamma)$ принадлежат $\tilde{\tilde{R}}_G(\Gamma)$. Более того, из предложений 1.10 и 1.11 можно еще заключить, что $\beta_G(\Gamma)$ есть множество всех квазистабильных элементов из Г, принадлежащих $\tilde{\tilde{R}}_G(\Gamma)$, а радикал $\beta_G^*(\Gamma)$ получается соответственно как множество стабильных элементов.

Сделаем еще одно замечание по поводу γ-радикала.

Как мы знаем, для произвольной пары (G, Γ) имеет место включение $[G, \gamma_G(\Gamma)] \subset \gamma(G)$, причем внутренний радикал Бера $\gamma(G)$ совпадает с внешним радикалом $\gamma_G(G)$, определенным для внутренней пары (G, G). Кроме того, если Г — точная группа автоморфизмов, радикал $\gamma_G(\Gamma)$ является локально нильпотентной группой. Нам остается еще пожелать, чтобы группа $\gamma_G(\Gamma)$ оказывалась всегда беровской и мы получили бы здесь включение $\gamma_G(\Gamma) \subset \subset \gamma(\Gamma)$. Однако это неверно, и соответствующие примеры нетрудно построить.

Допустим далее, что область действия G не имеет центра и представление Г относительно G G-инвариантно. Из рассмотрений п. 4.3 легко следует, что в этом случае имеет место включение $\gamma(\Gamma) \subset \gamma_G(\Gamma)$. Было бы интересно исследовать, когда здесь можно ставить знак равенства.

В заключение этого пункта приведем два замечания относительно внешнего радикала $R_G(\Gamma)$.

Пусть G — группа, Г — ее группа автоморфизмов и $\mathfrak{G}$ — подгруппа в голоморфе группы G, порожденная G и Г. Тогда

$$R_G(\Gamma) = R(\mathfrak{G}) \cap \Gamma.$$

Очевидно, каждый элемент из $R(\mathfrak{G}) \cap \Gamma$ индуцирует в G квазистабильный автоморфизм, и следовательно, $R(\mathfrak{G}) \cap \Gamma \subset R_G(\Gamma)$.

Докажем обратное включение. Нужно показать, что $R_G(\Gamma) \subset R(\mathfrak{G})$.

Так как каждый элемент из $R_G(\Gamma)$ индуцирует в $R(G)$ нильавтоморфизм, то группа $R_G(\Gamma) \cdot R(G)$ локально нильпотентна. Покажем, ччо эта подгруппа инвариантна в $\mathfrak{G}$. Инвариантность этой подгруппы относительно элементов из Г очевидна. Пусть теперь $g \in G$ и $\sigma \in R_G(\Gamma)$. Тогда из $[g, \sigma] \in R(G)$ следует инвариантность подгруппы

$R_G(\Gamma) \times R(G)$ относительно элементов из G, и следовательно, эта подгруппа — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$.

Так как $R_G(\Gamma) \cdot R(G)$ — локально нильпотентный нормальный делитель в $\mathfrak{G}$, то эта подгруппа, а следовательно, и $R_G(\Gamma)$ содержатся в $R(\mathfrak{G})$, так что равенство $R_G(\Gamma) = R(\mathfrak{G}) \cap \Gamma$ доказано.

Второе замечание относится к случаю G-инвариантного представления.

Если представление Γ относительно G является G-инвариантным и Z — центр группы G, то имеет место формула

$$R_G(\Gamma) = \tilde{R}(\Gamma) \cap R_Z(\Gamma).$$

Включение $R_G(\Gamma) \subset \tilde{R}(\Gamma) \cap R_Z(\Gamma)$ очевидно, а обратное включение непосредственно следует из п. 3 предыдущего параграфа.

2. Связи с α-радикалом. Сейчас мы покажем, что даже самый малый из приведенных в предыдущем пункте радикалов, γ-радикал, вообще говоря, не принадлежит радикалу представления $\alpha_G(\Gamma)$.

Пусть G — группа Адо — Маклейна (см. п. 5.4.3) — локально нильпотентная, даже беровская группа без собственных характеристических подгрупп и пусть H — голоморф этой группы. Рассмотрим внутреннюю пару (H, H). Группа G, рассматриваемая здесь как подгруппа в правой группе H, квазистабильна. С другой стороны, между E и G (в левой H) нет нетривиальных H-допустимых подгрупп, и G — H-композиционный фактор. Так как G правая не принадлежит централизатору левой G, то ясно, что эта правая G не принадлежит и $\alpha_H(H)$. Действующая группа G здесь даже локально финитно стабильна. Следовательно, $\gamma_H(H) \not\subset \alpha_H(H)$.

В третьей главе приводились достаточные условия, при которых β-радикал принадлежит α-радикалу. Для групповых пар эти условия могут быть ослаблены ввиду тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 5.1.1. Сформулируем относящуюся сюда теорему.

2.1. *Включение $\beta_G(\Gamma) \subset \alpha_G(\Gamma)$ имеет место в следующих случаях:* 1) *представление Γ относительно G является*

локально ограниченным, 2) *все* Г*-композиционные факторы группы* G *абелевы и группа* Г *является локально нетеровой группой,* 3) *все* Г*-композиционные факторы, являющиеся локально нильпотентными группами, имеют конечный ранг.*

Пусть $\mathfrak{G}$ обозначает произвольный Г-композиционный фактор группы G, и Σ — квазистабильный нормальный делитель в Г. Чтобы установить требуемое включение, нужно показать, что каждый раз подгруппа Σ действует тождественно в $\mathfrak{G}$.

Пусть $R(\mathfrak{G})$ — локально нильпотентный радикал в $\mathfrak{G}$. Так как в $\mathfrak{G}$ нет нетривиальных Г-допустимых подгрупп, то либо $R(\mathfrak{G})$ совпадает с единицей в $\mathfrak{G}$, либо $R(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. В первом случае согласно теореме 2.2.1 группа Σ действует тождественно в $\mathfrak{G}$. Таким образом, остается исходить из того, что $\mathfrak{G}$ — локально нильпотентная группа.

Рассмотрим дальше только третью часть теоремы.

Так как $\mathfrak{G}$ имеет конечный ранг, то всякая квазистабильная относительно $\mathfrak{G}$ группа является стабильной. Учитывая еще, что группа $\mathfrak{G}$ (конечного ранга) обладает возрастающим центральным рядом и, следовательно, абелева, мы получим, что в $\mathfrak{G}$ имеется стабильный относительно Σ ряд из Г-допустимых подгрупп. Следовательно, Σ действует в $\mathfrak{G}$ тождественно.

Заметим дальше, что если представление Г относительно G является локально ограниченным и G — локально конечная группа, то радикалы $\alpha_G(\Gamma)$ и $\beta_G(\Gamma)$ совпадают.

Из этого замечания, в частности, следует, что если обе группы, Г и G, локально конечны, то $\alpha_G(\Gamma) = \beta_G(\Gamma)$.

Напомним еще, что в третьей главе было показано, что если группа Г является локально нетеровой группой, то радикал $\gamma_G(\Gamma)$ при любой G принадлежит радикалу представления. Некоторые связи между α- и β-радикалами при различных предположениях конечности будут рассмотрены еще в п. 8.1.6.

Приведем дальше пример группы автоморфизмов, в которой внешний α-радикал не является Z-группой. Мы воспользуемся примером из п. 3.5, но только все

A_i будем считать теперь группами одного и того же простого порядка $p \neq 2$, и, кроме того, добавим еще набор автоморфизмов ψ_i, $i=0, 1, \ldots$, определяемых следующим правилом:

$$e_i \circ \psi_j = e_i + e_{i+1} \text{ для } 1 \leqslant i < j,$$
$$e_i \circ \psi_j = e_i \text{ для } i \geqslant j \text{ и } i=0.$$

Легко видеть, что группа автоморфизмов Φ, порожденная Γ и всеми ψ_i, имеет ряд (*) (п. 3.5) своим стабильным (убывающим) рядом. Кроме того, нетрудно показать, что факторами этого ряда исчерпываются все Φ-композиционные факторы в G, так что $\alpha_G(\Phi)=\Phi$, и такая группа не является Z-группой — ее подгруппа Γ, как мы знаем, не обладает центральной системой.

Отметим далее, что в случае некоммутативной области действия G наряду с α-радикалом представления полезно выделить еще следующий близкий ему радикал $\alpha_G^*(\Gamma)$. Если (G, Γ) — групповая пара, то через $\alpha_G^*(\Gamma)$ мы обозначим пересечение ядер индуцированных представлений группы Γ относительно таких факторов B/A, в которых A и B — Γ-допустимые подгруппы в G, и фактор-группа B/A не содержит нетривиальных Γ-допустимых нормальных делителей. Ясно, что всегда имеет место включение $\alpha_G^*(\Gamma) \subset \alpha_G(\Gamma)$. Нетрудно показать, что первый пункт теоремы 2.1 может быть следующим образом усилен.

2.2. *Если представление группы* Γ *относительно* G *локально ограничено, то имеет место включение* $\beta_G(\Gamma) \subset \subset \alpha_G^*(\Gamma)$.

3. Радикалы в области действия. В третьей главе, п. 3.6, был определен квазистабильный радикал области действия G, являющейся Ω-группой. При этом предполагалось, что G — локально нетерова Ω-группа. Если G — группа (без мультиоператоров), то указанное ограничение можно снять. Это можно сделать, опираясь на теорему 2.2.1. Таким образом, если (G, Γ) — групповая пара, то в группе G всегда существует квазистабильный радикал $\beta_\Gamma(G)$. Рассмотрим сейчас один специальный случай.

Элемент $g \in G$ называется Γ-*гиперцентральным*, если для любого конечного множества Y из Γ найдется такое

$n = n(g, Y)$, что все коммутаторы вида $[g; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n]$, $\sigma_i \in Y$, обращаются в единицу группы G.

3.1. *Если в паре* (G, Γ) *проекция* Γ *относительно* G *содержит все внутренние автоморфизмы, то квазистабильный радикал в* G *совпадает с множеством всех* Γ-*гиперцентральных элементов из* G.

Пусть H — множество всех Γ-гиперцентральных элементов из G. Покажем, что это множество является Γ-характеристическим. Нужно показать, что если пара (G, Γ) содержится в паре (G, Φ) и Γ — нормальный делитель в Φ, то для любых $\varphi \in \Phi$ и $h \in H$ элемент $h \circ \varphi$ также принадлежит H. С помощью элемента φ зададим автоморфизм пары (G, Γ): каждому $g \in G$ сопоставим элемент $g \circ \varphi$, а $\sigma \in \Gamma$ сопоставим $\varphi^{-1}\sigma\varphi$. Мы знаем, что такое отображение действительно является автоморфизмом. Поэтому справедлива формула

$$[g; \sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}] \circ \varphi = [g \circ \varphi, \varphi^{-1}\sigma_{i_1}\varphi, \varphi^{-1}\sigma_{i_2}\varphi, \ldots, \varphi^{-1}\sigma_{i_n}\varphi].$$

Из этой формулы следует, что $h \circ \varphi \in H$.

Обозначим через $\tilde{H}$ подгруппу, порожденную множеством H. Ясно, что $\tilde{H}$ допустима относительно Γ и, в частности, является нормальным делителем в G. Будем доказывать, что пара $(\tilde{H}, \Gamma)$ является квазистабильной.

Пусть (A, Σ) — подпара в $(\tilde{H}, \Gamma)$ такая, что Σ имеет конечное число образующих и $A = \{X \circ \Sigma\}$, где X — конечное подмножество в H. Из того, что каждый элемент из X является Γ-гиперцентральным, следует, что подгруппа A имеет конечное число образующих. Множество таких подпар составляет локальную систему в $(\tilde{H}, \Gamma)$. Нужно показать, что Σ стабильна относительно A. Обозначим через $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Sigma}$ образы Γ и Σ в группе всех автоморфизмов группы G, через $\hat{G}$ — группу внутренних автоморфизмов и через $\hat{A}$ — ее подгруппу, соответствующую подгруппе A. Положим еще $S = \{\hat{A}, \bar{\Sigma}\}$. Так как $S \subset \bar{\Gamma}$, то каждый элемент из H является S-гиперцентральным. Подгруппа A, очевидно, S-допустима. Рассмотрим пару (A, S). Так как S содержит внутренние автоморфизмы группы A, то в A существует верхний стабильный относительно S ряд. Пусть B — объединение членов такого ряда. Покажем, что B совпадает с A. Допустим, что элемент g из X не принад-

лежит B. Возьмем в S конечную систему образующих Y. Так как g — S-гиперцентральный элемент, то существует такое n, что все элементы вида

$$[g;\ \sigma_{i_1},\ \sigma_{i_2},\ \ldots,\ \sigma_{i_n}],\quad \sigma_{i_n} \in Y,$$

обращаются в единицу. Значит, найдется такое первое k, что все элементы вида $[g;\ \sigma_{i_1},\ \sigma_{i_2},\ \ldots,\ \sigma_{i_k},\ \sigma_{i_{k+1}}]$ попадают в B. Тогда некоторый элемент $a = [g;\ \sigma_{i_1},\ \sigma_{i_2},\ \ldots,\ \sigma_{i_k}]$ не принадлежит B, однако для каждого $\sigma \in S$ будет $[a, \sigma] \in B$. Это означает, что в A/B имеется нетривиальный S-центр, что противоречит определению подгруппы B. Таким образом, $A = B$ и пара (A, S) оказывается стабильной. Но тогда и пара (A, Σ) стабильна, а пара $(\tilde{H}, \Gamma)$ квазистабильна. Так как пара $(\tilde{H}, \Gamma)$ квазистабильна, то каждый элемент из $\tilde{H}$ является Γ-гиперцентральным. Это для нас означает, что $\tilde{H} = H$, т. е. H — нормальный делитель в G. Теперь ясно, что H совпадает с квазистабильным радикалом в G. Очевидно также, что H — локально нильпотентная группа.

Если исходить из внутренней пары (G, G), то квазистабильный радикал области действия G превращается в одну из разновидностей гиперцентров (см. в связи с этим серию работ Р. Бера [3—5]).

Нормальный делитель $H \subset G$ естественно назвать *внешне локально нильпотентным*, если каждый его элемент является Γ-гиперцентральным элементом. Точно так же, как это делалось раньше, можно показать, что подгруппа в G, порожденная всеми внешне локально нильпотентными нормальными делителями, сама обладает таким свойством. Обозначим эту подгруппу через $\beta'_\Gamma(G)$. Из предыдущей теоремы следует, что в рассмотренном там случае $\beta' = \beta$. Понятно, что это же равенство выполняется, если допустить, что группа G является NR-группой.

Очевидным образом определяется также локально стабильный радикал области действия.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ В ГРУППОВЫХ ПАРАХ

§ 1. СТАБИЛЬНОСТЬ И УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ

1. Ранг группы. Под рангом группы мы везде понимаем специальный ранг в смысле А. И. Мальцева [6]. Приведем определение. Группа G называется *группой конечного ранга* $r=r(G)$, если все подгруппы из G с конечным числом образующих имеют не более r образующих, причем r — минимальное число с таким свойством.

Для абелевых групп без кручения этот ранг совпадает с обычным рангом, а для нильпотентных групп без кручения ранг группы есть сумма рангов факторов ее верхнего центрального ряда. Если группа G имеет конечный ранг r, то конечными будут ранги всех ее подгрупп (причем, если H — подгруппа в G, то $r(H)\leqslant r(G)$) и фактор-групп (и здесь, если H — нормальный делитель в G, то $r(G/H)\leqslant r(G)$). Если H — нормальный делитель в G, то, кроме того, $r(G)\leqslant r(H)+r(G/H)$.

В первую очередь нас будет интересовать следующая теорема:

1.1. *Если G — локально нильпотентная группа и H — ее нормальный делитель конечного ранга, то внутренняя пара (H, G) стабильна.*

Для доказательства теоремы следует воспользоваться двумя предложениями Н. Н. Мягковой [1]. Согласно первому из них всякая локально конечная p-группа конечного ранга есть группа Черникова — конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Вторым предложением является утверждение о том, что всякая локально нильпотентная группа без кручения конечного ранга нильпотентна. Мы ограничимся доказательством второго утверждения, причем докажем следующий более сильный результат (А. И. Мальцев [5]): *если в локально нильпотентной*

группе без кручения все абелевы подгруппы имеют конечный ранг, то такая группа нильпотентна.

Пусть группа G удовлетворяет условиям отмеченного предложения, но не нильпотентна. В таком случае в G имеется бесконечная возрастающая последовательность нильпотентных подгрупп

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

со строго возрастающими классами нильпотентности. Известно (см., например, А. В. Курош [3]), что изолятор каждой нильпотентной подгруппы из G также является нильпотентной подгруппой и при переходе к изоляторам сохраняется класс нильпотентности. Поэтому мы можем считать, что все члены последовательности являются изолированными в G подгруппами. Обозначим через $\mathfrak{z}_i$ центр в A_i, и пусть B_n — изолятор подгруппы, порожденной всеми $\mathfrak{z}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Через B обозначим сумму всех B_n. B — изолированная абелева подгруппа и, следовательно, имеет конечный ранг. Но это означает, что при некотором n все $\mathfrak{z}_i$, $i \geqslant n$, начинают совпадать с $\mathfrak{z}_n$. Таким образом, в объединении $A = \bigcup A_n$ имеется нетривиальный центр, который обозначим через Z. Покажем, что в A/Z все абелевы подгруппы имеют конечный ранг. Пусть C/Z — одна из таких подгрупп и пусть D — одна из максимальных инвариантных абелевых подгрупп в C. Рассмотрим пару (внутреннюю) (D, C), и пусть $\bar{C}$ — проекция C относительно D. Так как пара (D, C) квазистабильна, то согласно теореме 2.6 из следующего пункта $\bar{C}$ — группа конечного ранга. Кроме того, $\bar{C}$ совпадает со своим централизатором, и поэтому имеем изоморфизм $\bar{C} \approx C/D$, так что C, а значит, и C/Z имеют конечный ранг. Теперь можно утверждать, что и в A/Z имеется нетривиальный центр. Так, по индукции, устанавливается, что в A имеется бесконечный верхний центральный ряд. Если, далее, F — максимальная абелева инвариантная подгруппа в A, то F совпадает со своим централизатором. Как и выше, теперь уже можно заключить, что вся группа A имеет конечный ранг и нильпотентна. Но это противоречит предположению о характере A. Следовательно, вся группа G нильпотентна (и даже имеет конечный ранг).

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.1.

Пусть G — произвольная локально нильпотентная группа и пусть в G имеется нормальный делитель H конечного ранга. Через F обозначим периодическую часть в H, и пусть F_p — силовская p-подгруппа в F. Каждая F_p есть группа Черникова. Так как F есть прямое произведение всех F_p, то теперь можно утверждать, что в F имеется возрастающий ряд характеристических подгрупп $[F_\alpha]$, каждый фактор которого — элементарная абелева группа. Во всех этих факторах группа G действует как финитно стабильная группа.

С другой стороны, так как H/F — нильпотентная группа без кручения, то имеется еще ряд характеристических подгрупп

$$F = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset H_n = H$$

с абелевыми факторами конечного ранга. В каждом факторе H_{i+1}/H_i группа G действует как финитно стабильная группа.

Итак, в H имеется возрастающий ряд характеристических подгрупп, в каждом факторе которого G действует как финитно стабильная группа. Следовательно, вся пара (H, G) является стабильной парой.

Из доказанной теоремы получаем такое следствие:

1.2. *Если в локально нильпотентной группе имеется возрастающий инвариантный ряд с факторами конечных рангов, то такая группа обладает возрастающим центральным рядом.*

В дальнейшем еще используется данная А. И. Мальцевым классификация условий конечности в разрешимых группах. Вначале определим абелевы A_i-группы, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

A_1 — абелевы группы, фактор-группы которых по периодической части имеют конечный ранг.

A_2 — абелевы группы конечного ранга.

A_3 — группы типа A_1, периодическая часть которых удовлетворяет условию минимальности.

A_4 — группы типа A_1, периодическая часть которых конечна.

A_5 — нетеровы абелевы группы, т. е. абелевы группы с конечным числом образующих.

В соответствии с этим разрешимые A_i-группы — это разрешимые группы, обладающие конечным нормальным рядом, все факторы которого являются абелевыми A_i-группами. При этом легко видеть, что разрешимые A_2-группы — это разрешимые группы конечного ранга, разрешимые A_4-группы — это разрешимые группы конечного ранга, в которых все периодические подгруппы конечны, и разрешимые A_5-группы совпадают с полициклическими группами Гирша.

2. Конечность ранга области действия. Здесь будет предполагаться, что область действия G есть группа конечного ранга или обладает некоторым другим свойством конечности, связанным с понятием ранга. Начнем с теоремы, обобщающей теорему 1.1 из предыдущего пункта (точнее, ее следствие).

2.1. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара и пусть в радикале* $R(G)$ *имеется возрастающий ряд* из Γ-*допустимых подгрупп с факторами конечных рангов. Тогда, если каждый элемент из* Γ *является квазистабильным, то вся группа* Γ *стабильна.*

Рассмотрим вначале случай, когда сама группа G локально нильпотентна и имеет конечный ранг. В таком случае, как это было только что показано, G является ZA-группой, и в ней имеется возрастающий ряд характеристических подгрупп

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\gamma = G \tag{*}$$

такой, что все его факторы — либо абелевы группы без кручения конечного ранга, либо конечные p-группы.

Как мы знаем, группа Γ нильпотентна относительно каждого из таких факторов. Но тогда Γ стабильна относительно G.

Переходя к общему случаю, допустим, что ряд $[G_\alpha]$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда группа Γ стабильна относительно каждого фактора $G_{\beta+1}/G_\beta$. Следовательно, Γ стабильна и относительно радикала. Кроме того, в $G/R(G)$ элементы из Γ действуют тождественно. Поэтому Γ стабильна относительно G.

Приведенную теорему можно также рассматривать как один из случаев положительного решения соответ-

ствующей проблемы бернсайдовского типа. Правда, здесь мы исходим не из внешних нильэлементов, а квазистабильных элементов. Это одно и то же, если группа G является NR-группой, так что, в частности, для нетеровых групп указанная проблема решается положительно.

Как было отмечено, нильпотентная A_4-группа — это нильпотентная группа конечного ранга с конечной периодической частью. В такой группе имеется конечный ряд вида (*). Следовательно, если в условиях теоремы 2.1 радикал $R(G)$ является нильпотентной A_4-группой, то группа Γ нильпотентна относительно G и поэтому нильпотентна как абстрактная группа, если пара точная.

Опираясь на приведенную теорему, непосредственно получаем также следующее предложение:

2.2. *Если в локально нильпотентном радикале $R(G)$ имеется возрастающий Γ-ряд с факторами конечного ранга*, то $\beta_G(\Gamma) = \mathfrak{z}_G(\Gamma) = \beta_G^*(\Gamma)$.

Приведем теперь несколько замечаний по поводу случая, когда группа G является нетеровой группой. В этом случае радикал $R(G)$ имеет конечный ранг. Следовательно, всякая квазистабильная относительно G действующая группа Γ должна быть стабильной. Ввиду условия максимальности такая группа должна быть даже финитно стабильной. Имеет место также следующая теорема (Д. М. Смирнов [1]):

2.3. *Стабильная группа автоморфизмов нетеровой группы также является нетеровой группой.*

Пусть G — нетерова группа и Γ — ее стабильная группа автоморфизмов. Все стабильные ряды в G имеют конечную длину. Теорему будем доказывать индукцией по длине соответствующих стабильных рядов. Для длины, равной нулю и единице, теорема тривиальна. Допустим, что уже доказано, что в случае, если в G имеется стабильный относительно Γ ряд длины $\leqslant n-1$, то Γ — нетерова группа.

Пусть теперь в G имеется стабильный относительно Γ ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

длины n. Пусть Σ — Γ-централизатор подгруппы G_{n-1}. По предположению индукции, фактор-группа Γ/Σ удов-

летворяет условию максимальности. Покажем, что и Σ удовлетворяет условию максимальности.

Для этого возьмем в G произвольную систему образующих $g_1, g_2, \ldots, g_m$, и пусть Σ_k — Σ-централизатор элемента g_k, $k \leqslant m$. Пересечение всех Σ_k совпадает с единицей в Σ. Согласно обобщенной лемме Грюна отображение $\sigma \to [g_k, \sigma]$ является гомоморфизмом Σ в группу G_{n-1} с ядром Σ_k, так что Σ/Σ_k — нетерова группа. Но подпрямое произведение конечного числа нетеровых групп — также нетерова группа, так что группа Σ нетерова, и теорема доказана. Добавим еще, что группа Γ нильпотентна.

Докажем дальше вспомогательные леммы.

2.4. *Пусть G — группа и Γ — ее группа автоморфизмов. Пусть, далее, в G имеется конечный Γ-допустимый нормальный делитель H порядка n такой, что Γ действует тождественно в G/H. Тогда:*

а) *Если группа G имеет конечный ранг r, то Γ — конечная группа порядка, не большего $n^r \cdot n\,!$.*

б) *Если Γ имеет конечный ранг r, то порядок Γ конечен и также не превосходит $n^r \cdot n\,!$.*

Пусть $\mathfrak{z}$ — подгруппа в Γ из всех элементов, оставляющих на месте каждый элемент из H. Порядок $\Gamma/\mathfrak{z}$ ограничен числом $n\,!$. Пусть теперь G — группа конечного ранга r. В G имеется локальная система из подгрупп G_α, содержащих H и имеющих не более r образующих. Все G_α $\mathfrak{z}$-допустимы, а их $\mathfrak{z}$-централизаторы $\mathfrak{z}_\alpha$ являются нормальными делителями в $\mathfrak{z}$ и удовлетворяют следующим двум условиям:

а) для любых $\mathfrak{z}_\alpha$ и $\mathfrak{z}_\beta$ найдется $\mathfrak{z}_\gamma$ с условием $\mathfrak{z}_\gamma \subset \mathfrak{z}_\alpha \cap \mathfrak{z}_\beta$,

б) пересечение всех $\mathfrak{z}_\alpha$ совпадает с единицей группы Γ.

Систему подгрупп с отмеченными двумя свойствами мы называем *двойственно локальной системой*.

Так как подгруппы $\mathfrak{z}_\alpha$ составляют двойственно локальную систему в $\mathfrak{z}$, то для того, чтобы показать, что порядок $\mathfrak{z}$ ограничен числом n^r, достаточно показать, что порядки всех $\mathfrak{z}/\mathfrak{z}_\alpha$ ограничены числом n^r.

Используя обобщенную лемму Грюна, так же как и в теореме 2.3, легко показать, что $\mathfrak{z}/\mathfrak{z}_\alpha$ изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения r экземпляров

группы H, и следовательно, порядок $\mathfrak{z}/\mathfrak{z}_\alpha$ не превосходит n^r, а значит, и порядок $\mathfrak{z}$ не превосходит n^r. Отсюда следует, что порядок Γ не превосходит $n^r \cdot n\,!$.

Пусть теперь Γ имеет конечный ранг r. Так как для каждого $g \in G$ отображение $\sigma \to [g, \sigma]$, $\sigma \in \mathfrak{z}$, является гомоморфизмом $\mathfrak{z}$ в H и так как пересечение ядер всех таких гомоморфизмов совпадает с единицей в $\mathfrak{z}$, то $\mathfrak{z}$ является подгруппой полного прямого произведения групп, изоморфных H. Поэтому все элементы из $\mathfrak{z}$ имеют конечные, ограниченные в совокупности порядки, причем эти порядки не превосходят число n.

Учитывая, что $\mathfrak{z}$ — абелева группа конечного ранга $\leqslant r$, получаем, что порядок $\mathfrak{z}$ не может быть больше числа n^r, и следовательно, порядок Γ не превосходит $n^r \cdot n\,!$.

2.5. *Пусть Γ — квазистабильная группа автоморфизмов группы G, и пусть периодическая часть взаимного коммутанта $[G, \Gamma]$ конечна. Тогда, если G или Γ — группа конечного ранга, то совокупность всех элементов конечного порядка из Γ является конечной группой.*

Пусть P — периодическая часть в $[G, \Gamma]$. Согласно теореме 7.3.2.3 совокупность всех элементов конечного порядка из Γ совпадает с ядром представления Γ относительно фактор-группы G/P. По предыдущей лемме это ядро конечно.

Следующая теорема параллельна теореме 2.3.

2.6. *Пусть Γ — стабильная группа автоморфизмов группы G конечного ранга. Тогда, если периодическая часть радикала $R(G)$ конечна, то Γ — нильпотентная A_4-группа.*

Пусть P — конечная периодическая часть в $R(G)$ и пусть Σ — ядро представления Γ относительно G/P. Согласно предыдущему, Σ — конечная группа и Γ/Σ — группа без кручения. Обозначим $\Gamma/\Sigma = \Phi$ и $G/P = \mathfrak{G}$. Группу Φ можно рассматривать как стабильную группу автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$. Обозначим еще $\tilde{R} = R(G)/P$. $\tilde{R}$ — нильпотентная группа конечного ранга и без кручения. Кроме того, очевидно включение $[\mathfrak{G}, \Phi] \subset \tilde{R}$. Пусть дальше $\mathfrak{z}$ — ядро представления группы Φ относительно $\tilde{R}$. $\mathfrak{z}$ действует тождественно как в $\tilde{R}$, так и в $\mathfrak{G}/\tilde{R}$. Покажем, что ранг $\mathfrak{z}$ не превосходит r^2, где r — ранг группы G. Для этого рассуждаем, как и в лемме 2.4.

Пусть H — подгруппа в $\mathfrak{G}$, содержащая $\tilde{R}$ и такая, что фактор-группа $H/\tilde{R}$ имеет конечное число образующих. Подгруппа H допустима относительно $\mathfrak{z}$. Пусть $\mathfrak{z}_H$ — ядро представления $\mathfrak{z}$ относительно H. Так как в $H/\tilde{R}$ имеется не более r образующих, то с помощью обобщенной леммы Грюна можно заключить, что группа $\mathfrak{z}/\mathfrak{z}_H$ изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения r экземпляров группы $\tilde{R}$. Так как ранг $\tilde{R}$ не превосходит r, то ранг группы $\mathfrak{z}/\mathfrak{z}_H$ не более r^2. Подгруппы типа $\mathfrak{z}_H$ составляют в $\mathfrak{z}$ двойственно локальную систему. Отсюда заключаем, что и ранг группы $\mathfrak{z}$ ограничен числом r^2.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что фактор-группа $\Phi/\mathfrak{z}$ является нильпотентной группой без кручения конечного ранга. Этот последний факт вытекает из следующего предложения.

Стабильная группа автоморфизмов нильпотентной группы без кручения конечного ранга также является нильпотентной группой без кручения конечного ранга. Если ранг группы равен r, то ранг группы автоморфизмов не превосходит $\frac{r(r-1)}{2}$.

Это предложение легко выводится из одного результата Н. Ф. Сесекина [1] (см. также В. С. Чарин [1]). Приведем независимое доказательство.

Пусть G — группа и Γ — ее группа автоморфизмов, удовлетворяющие условиям предложения. В группе G имеется рациональный ряд длины r

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{r-1} \subset G_r = G,$$

являющийся центральным рядом в G и стабильным относительно Γ. Проведем индукцию по длине таких рядов, т. е. по рангу группы G. Для ранга, равного единице, предложение очевидно. Допустим, что оно уже доказано для рангов, меньших r. Пусть Σ — ядро представления Γ относительно G_{r-1}. В силу предположения индукции, группа Γ/Σ имеет ранг, не больший $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$. Покажем, что ранг подгруппы Σ ограничен числом $r-1$. Возьмем в G элемент g, не принадлежащий G_{r-1}, и пусть

$\mathfrak{z}$ — Σ-централизатор этого элемента. Из обобщенной леммы Грюна следует, что группа $\Sigma/\mathfrak{z}$ изоморфна некоторой подгруппе из G_{r-1}. Но подгруппа $\mathfrak{z}$ совпадает с единицей в Σ. Действительно, так как G — R-группа, то $\mathfrak{z}$-центр G должен быть изолированной подгруппой. Так как этот $\mathfrak{z}$-центр строго больше G_{r-1}, то он совпадает с G. Это значит, что $\mathfrak{z}$ — единичная подгруппа. Итак, ранг Σ не превосходит ранг G_{r-1}, равный $r-1$, и ранг группы Γ ограничен числом $\frac{1}{2}r(r-1)$.

Теорема 2.6 доказана. В связи с рассмотрениями этого пункта см. еще новую работу Д. Хельда [5].

3. Конечность ранга действующей группы. Следующую теорему можно также рассматривать как одно из обобщений теоремы Калужнина.

3.1. *Пусть (G, Γ) — точная квазистабильная групповая пара и пусть в радикале $R(G)$ периодическая часть конечна. Тогда группа Γ в том и только в том случае локальна нильпотентна, когда в ней имеется локальная система из подгрупп конечного ранга.*

Так как всякая локально нильпотентная группа обладает локальной системой из нильпотентных нетеровых подгрупп, а последние имеют конечный ранг, то необходимость приведенного условия очевидна. Для доказательства достаточности нужно рассмотреть лишь случай, когда Γ имеет конечное число образующих и, следовательно, конечный ранг.

Вначале разберем подслучай, когда $[G, \Gamma]$ — группа без кручения. Здесь мы имеем ситуацию, разбиравшуюся в теореме 7.3.4.1. Рассмотрим приводившиеся там построения в применении к нашему случаю. Пусть $[G_\alpha]$ — локальная система из Γ-допустимых подгрупп в G и пусть Γ^α — группа автоморфизмов, индуцируемая группой Γ в G_α. Для построения центральной системы в Γ^α применялся следующий прием. В группе Γ^α выделялась некоторая система инвариантных подгрупп Φ_β таких, что все Γ^α/Φ_β — нильпотентные группы без кручения. Затем берется пересечение Σ^α всех Φ_β. Сразу заметим, что в нашем случае фактор-группа $\Gamma^\alpha/\Sigma^\alpha$ также нильпотентна. Действительно, если r — ранг группы Γ, то длины

верхних центральных рядов во всех Γ^α/Φ_β ограничены числом r. Следовательно, $\Gamma^\alpha/\Sigma^\alpha$ изоморфна подпрямому произведению нильпотентных групп с ограниченным в совокупности классом нильпотентности, так что и $\Gamma^\alpha/\Sigma^\alpha$ — нильпотентная группа. Дальше в Σ^α выделялась система изолированных нормальных делителей $\Gamma_0^\alpha(g)$ таких, что в $\Sigma^\alpha/\Gamma_0^\alpha(g)$ имеется возрастающий центральный в Γ^α ряд, так что и в $\Gamma^\alpha/\Gamma_0^\alpha(g)$ имеется возрастающий центральный ряд. Но Γ^α имеет конечный ранг, и поэтому $\Gamma^\alpha/\Gamma_0^\alpha(g)$ нильпотентны и имеют класс нильпотентности, не больший r. Единица Γ^α совпадает с пересечением некоторых $\Gamma_0^\alpha(g)$, так что и Γ^α — нильпотентная группа класса $\leqslant r$. Пусть теперь $\mathfrak{z}_\alpha$ — ядро представления Γ относительно G_α. По предыдущему, фактор-группа $\Gamma/\mathfrak{z}_\alpha$ нильпотентна класса $\leqslant r$. Но поскольку пересечение всех $\mathfrak{z}_\alpha$ совпадает с единицей в Γ, то и Γ — нильпотентная группа.

Пусть теперь периодическая часть P в $R(G)$ нетривиальна, но конечна.

Обозначим через Σ ядро представления Γ относительно фактор-группы G/P. Подгруппа Σ совпадает с периодической частью в Γ и конечна (согласно лемме 2.4). Обозначим дальше $G/P = \mathfrak{G}$, $\Gamma/\Sigma = \bar{\Gamma}$, $R(G)/P = \bar{R}$. Понятно, что $[\mathfrak{G}, \bar{\Gamma}] \subset \bar{R}$, и поэтому для пары $(\mathfrak{G}, \bar{\Gamma})$ мы имеем только что рассмотренный случай. Следовательно, $\bar{\Gamma}$ — нильпотентная группа. Так как Σ — конечная локально стабильная группа, то и Σ нильпотентна.

Нильпотентность всей группы Γ получается из следующих соображений. Согласно теореме 7.3.3.1 в Γ имеется центральная система. Если $[\Gamma_\alpha]$ — такая система, то пересечения $\Gamma_\alpha \cap \Sigma$ после удаления повторений составят в Σ конечный ряд, центральный относительно всей группы Γ. Так как группа Γ/Σ нильпотентна, то отсюда следует, что и Γ нильпотентна. Теорема доказана.

Нам неизвестно, будет ли верна теорема, аналогичная доказанной, без каких-либо предположений о группе G. Заметим еще, что из всего сказанного раньше вытекают также следующие утверждения.

Если группа G имеет конечный ранг и периодическая часть радикала $R(G)$ конечна, то $\beta_G(\Gamma) = R_G(\Gamma)$,

и в случае точного представления оба эти радикала являются нильпотентными группами.

Если Γ — локально конечная группа, то $\beta_G(\Gamma) = R_G(\Gamma)$, и в случае точного представления обе эти группы локально нильпотентны.

Если $R(G)$ — группа без кручения и в Γ имеется локальная система из подгрупп конечного ранга, то $\beta_G(\Gamma) = R_G(\Gamma)$, и для точного представления эти радикалы локально нильпотентны.

Если $R(G)$ — локально конечная p-группа, а Γ локально конечна, то радикал $\beta_G(\Gamma)$ совпадает с пересечением всех силовских p-подгрупп группы G.

4. Условия обрыва в действующей группе. Из доказанной раньше теоремы 7.3.3.1 вытекает, что если (G, Γ) — точная квазистабильная пара, то условие минимальности для нормальных делителей в Γ влечет локальную нильпотентность Γ. Здесь мы займемся обобщением этого факта. Вначале докажем следующую теорему:

4.1. *Пусть* Φ — *группа автоморфизмов группы* G *и пусть* Γ — *квазистабильный нормальный делитель в* Φ *такой, что* Φ/Γ — *локально конечная группа. Тогда в* Γ *имеется центральная система из нормальных делителей группы* Φ.

Рассмотрим вначале случай, когда Φ имеет конечное число образующих и G — счетная группа. В этом случае Φ/Γ — конечная группа и Γ также имеет конечное число образующих. Подгруппа $[G, \Gamma]$ является Φ-допустимой подгруппой. Покажем, что если X — конечное подмножество в G, то подгруппа $\{X \circ \Phi\}$ — минимальная Φ-допустимая подгруппа в G, содержащая X, — имеет конечное число образующих. Подгруппа $\{X \circ \Gamma\}$ имеет конечное число образующих, и так как она Γ-допустима, то Φ-нормализатор $\{X \circ \Gamma\}$ имеет конечный индекс в Φ. Следовательно, имеется лишь конечное число различных подгрупп вида $\{X \circ \Gamma\} \circ \varphi$ с $\varphi \in \Phi$. Таким образом, и $\{X \circ \Phi\}$ имеет конечное число образующих.

Пусть теперь Σ — Γ-централизатор подгруппы $[G, \Gamma]$. Так как $[G, \Gamma]$ — Φ-допустимая подгруппа, то Σ — нормальный делитель в Φ. Покажем, что в Γ/Σ имеется

центральная система из нормальных делителей группы Φ/Σ.

Из предыдущих замечаний вытекает, что в группе $[G, \Gamma]$ имеется возрастающий нормальный ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots \subset \bigcup G_n = [G, \Gamma], \qquad (*)$$

все члены которого Ф-допустимы и имеют конечное число образующих. Такой ряд можно уплотнить до Г-стабильного ряда, состоящего из Ф-допустимых подгрупп. Будем дальше считать, что уже ряд (*) обладает указанным свойством. Пусть Γ_n и Φ_n — образы Γ и Φ в группе всех автоморфизмов группы G_n. Так как Γ_n нильпотентна, то в Γ_n имеется центральный ряд из нормальных делителей группы Φ_n. Обозначим через Σ_n Г-централизатор подгруппы G_n. Σ_n является нормальным делителем в Φ, и ясно, что в Γ/Σ_n имеется центральный ряд из нормальных делителей группы Φ/Σ_n. Так как пересечение всех Σ_n совпадает с Σ, то нужное свойство получено.

Рассмотрим теперь действие группы Φ в фактор-группе $G/[G, \Gamma]$. Так как Γ действует в этой фактор-группе тождественно, то Φ индуцирует в ней конечную группу автоморфизмов. Опираясь на это свойство, группу $G/[G, \Gamma]$ можно расщепить на конечные подмножества, допустимые относительно Φ. Пусть

$$a_1[G, \Gamma],\ a_2[G, \Gamma],\ \ldots,\ a_m[G, \Gamma]$$

— одно из таких подмножеств и пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Используем ряд (*) и обозначим $\Gamma_n(A) = \mathfrak{z}_\Phi(A/G_n) \cap \Sigma$. Легко заметить, что подгруппа Σ совпадает с объединением всех $\Gamma_n(a)$: $\Sigma = \bigcup \Gamma_n(a)$, так что в Σ мы получаем ряд

$$\Gamma_0(A) \subset \Gamma_1(A) \subset \ldots \subset \Gamma_n(A) \subset \ldots \subset \Sigma.$$

Так же, как и в теореме 7.3.3.1, непосредственно проверяется, что этот ряд является центральным относительно Γ рядом. Покажем теперь, что все $\Gamma_n(A)$ являются нормальными делителями в Φ. С этой целью приведем следующее предложение.

Пусть H и F — две Ф-допустимые подгруппы в $\mathfrak{G}$, причем F — нормальный делитель, содержащий H. Пусть еще Σ — нормальный делитель в Φ, индуцирующий тождества в F и $\mathfrak{G}/F$, и A — подмножество в $\mathfrak{G}$ такое,

что множество смежных классов A/F допустимо относительно представления Φ в $\mathfrak{G}/F$. Тогда подгруппа $\mathfrak{z}(A/H)\cap\Sigma$ является нормальным делителем в Φ.

Возьмем $\sigma\in\mathfrak{z}(A/H)\cap\Sigma$, $\gamma\in\Phi$ и $a\in A$. Нужно показать, что $a\circ\gamma^{-1}\sigma\gamma H=aH$. Обозначим $a\circ\gamma^{-1}=a_1f$ и $a_1\circ\sigma=$ $=a_1h$. Здесь $a_1\in A$, $f\in F$, $h\in H$. Известно, что h принадлежит центру подгруппы F, поэтому h и f перестановочны. Теперь имеем:

$$a\circ\gamma^{-1}\sigma\gamma H=(a_1f)\circ\sigma\gamma H=((a_1\circ\sigma)f)\circ\gamma H=(a_1hf)\circ\gamma H=$$
$$=(a_1fh)\circ\gamma H=((a\circ\gamma^{-1})h)\circ\gamma H=a(h\circ\gamma)H=aH,$$

т. е. $\gamma^{-1}\sigma\gamma\in\mathfrak{z}(A/H)$. Так как Σ — нормальный делитель в Φ, то утверждение доказано.

Беря теперь за F подгруппу $[G, \Gamma]$, а в качестве H и A соответственно G_n и $A=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, получим инвариантность всех $\Gamma_n(A)$ в Φ. Тем самым доказано, что в $\Gamma/\Gamma_0(A)$ имеется центральная система из нормальных делителей группы $\Phi/\Gamma_0(A)$.

Очевидно также, что пересечение подгрупп $\Gamma_0(A)$ по всем A, построенным указанным выше способом, совпадает с единицей в Γ. С помощью теоремы Ремака отсюда легко вывести, что в Γ имеется центральная система из инвариантных в Φ подгрупп. Случай, когда Φ имеет конечное число образующих и G — счетная группа, разобран.

Теперь докажем теорему в общем случае.

Пусть Φ_α — подгруппа с конечным числом образующих в Φ. Из $\Phi_\alpha\Gamma/\Gamma\approx\Phi_\alpha/\Phi_\alpha\cap\Gamma$ следует, что $\Phi_\alpha\cap\Gamma$ имеет конечный индекс в Φ_α и конечное число образующих. Мы знаем, что отсюда вытекает существование в G локальной системы из Φ_α-допустимых подгрупп с конечным числом образующих. Пусть $[G_\alpha^\beta]$ — такая локальная система и пусть $\mathfrak{z}_\alpha^\beta$ обозначает $\Phi_\alpha\cap\Gamma$-централизатор подгруппы G_α^β. Согласно первой части доказательства теоремы можно утверждать, что в $\Phi_\alpha\cap\Gamma/\mathfrak{z}_\alpha^\beta$ имеется центральная система из инвариантных в $\Phi_\alpha/\mathfrak{z}_\alpha^\beta$ подгрупп. Так как пересечение $\mathfrak{z}_\alpha^\beta$ по всем β совпадает с единицей в Φ, то и в $\Phi_\alpha\cap\Gamma$ имеется центральная система из инвариантных в Φ_α подгрупп.

Рассмотрим, далее, групповую пару (Γ, Φ), где представление группы Φ относительно Γ определяется вну-

тренними автоморфизмами в Ф. Беря в Ф различные подгруппы с конечным числом образующих Φ_α, мы получим в (Г, Ф) локальную систему подпар вида ($\Phi_\alpha \cap \Gamma$, Φ_α). Из рассмотренного только что свойства подгрупп вытекает, что мы находимся в условиях, когда можно воспользоваться локальной теоремой из п. 3.3.5. Значит, в Г имеется центральная система из инвариантных в Ф подгрупп. Теорема доказана.

Из приведенной теоремы как следствие получаем следующие предложения.

1. Пусть Ф — группа автоморфизмов группы G и пусть в Ф содержится квазистабильный относительно G нормальный делитель Г такой, что Ф/Г — локально конечная группа. Тогда, если в Ф выполняется условие минимальности для нормальных делителей, то Г — локально нильпотентная группа. Если, сверх того, Г имеет конечный индекс в Ф, то условие минимальности для нормальных делителей в Ф влечет условие минимальности для подгрупп.

2. Пусть Ф — группа автоморфизмов группы G и пусть в G имеется возрастающий нормальный ряд из Ф-допустимых подгрупп с конечными факторами. Тогда, если в Ф выполняется условие минимальности для нормальных делителей, то Ф-централизатор указанного ряда локально нильпотентен, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и имеет в Ф конечный индекс.

Первая часть предложения 1 вытекает непосредственно из теоремы 4.1. Вторая часть следует из первой и соответствующей теоремы теории локально нильпотентных групп (см., например, В. С. Чарин [2]). Второе предложение получается следующим образом. Пусть Г — соответствующий Ф-централизатор ряда. Г является пересечением подгрупп конечного индекса из Ф. В силу условия минимальности для нормальных делителей, группа Ф/Г конечна. Так как Г — стабильная группа, то остается сослаться на первое предложение.

5. Условие обрыва в области действия. Этот пункт посвящен условию минимальности для допустимых подгрупп группы G.

5.1. *Пусть* (G, Φ) — *групповая пара и пусть* Γ — *квазистабильный нормальный делитель в* Φ *такой, что* Φ/Γ — *локально конечная группа. Тогда, если* G — *локально нильпотентная группа, удовлетворяющая условию минимальности для* Φ*-допустимых подгрупп, то* G *является* ZA*-группой и* Γ — *стабильная группа.*

Согласно теореме 7.5.1.3 в G имеется центральная Γ-стабильная система.

Обозначим дальше через $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Gamma}$ проекции Φ и Γ относительно G, и пусть $\hat{G}$ — группа внутренних автоморфизмов.

Рассмотрим теперь группу $\tilde{\Phi}=\bar{\Phi}\hat{G}$ и фактор-группу $\tilde{\Phi}/\bar{\Gamma}\hat{G}$. $\tilde{\Phi}/\bar{\Gamma}\hat{G}$ является локально конечной группой. Пусть Σ — подгруппа в $\tilde{\Phi}$, имеющая конечное число образующих. Подгруппа $\Sigma\cap\bar{\Gamma}\hat{G}=\Sigma'$ имеет в Σ конечный индекс и обладает также конечным числом образующих. Так как Σ' квазистабильна, то теперь можно утверждать, что для любого конечного подмножества $X\subset G$ подгруппа $\{X\circ\Sigma\}$ имеет конечное число образующих. Такая подгруппа нильпотентна. Отсюда легко получить, что в $\{X\circ\Sigma\}$ имеется конечный Σ'-стабильный ряд из Σ-допустимых подгрупп, так что нужное нам свойство выполняется локально. Используя локальную теорему, теперь можно утверждать, что в G имеется нормальная система $\tilde{\Phi}$-допустимых подгрупп, стабильная относительно $\bar{\Gamma}\hat{G}$. Ясно, что такая система является центральной в G, стабильной относительно Γ, и все ее члены допустимы относительно Φ.

Если теперь в G выполняется условие минимальности для Φ-допустимых подгрупп, то нормальная система с приведенными свойствами окажется возрастающим рядом, существование которого доказывает теорему. Заметим еще, что так как ZA-группа обладает убывающим рядом коммутантов, доходящим до единицы, то можно добавить, что в рассматриваемой ситуации группа G является также разрешимой.

Если не предполагать, что группа G локально нильпотентна, то приведенную теорему можно использовать для радикала $R(G)$.

В фактор-группе $G/R(G)$ действие группы Φ сводится к действию локально конечной группы Φ/Γ. В том слу-

чае, когда сама группа Φ квазистабильна, из условия обрыва цепей Φ-допустимых подгрупп следует, что в $G/R(G)$ обрываются все цепи подгрупп.

Теорему 5.1 можно обобщить. Из предыдущих рассуждений видно, что рассматривавшаяся пара (G, Φ) является локально ограниченной *).

Нетрудно видеть, что теорема 5.1 остается справедливой для произвольной локально ограниченной пары (G, Φ) с локально нильпотентной группой G (без предположения локальной конечности Φ/Γ).

Действительно, пусть $\tilde{\Phi}$, $\bar{\Phi}$ и $\hat{G}$ определены так же, как и раньше (а Γ — произвольный локально стабильный нормальный делитель в Φ). Так как G — локально нетерова группа, то внутренняя пара $(G, \hat{G})$ является локально ограниченной. Согласно теореме 2.4.6.1 пара $(G, \tilde{\Phi})$ также является локально ограниченной. Дальше остается повторить предыдущие рассуждения.

6. Еще об отношениях между α- и β-радикалами. Докажем следующую теорему:

6.1. *Пусть (G, Γ) — групповая пара, и допустим, что в группе G имеется возрастающий Γ-ряд, все факторы которого абелевы с конечным числом образующих. В таком случае радикалы $\alpha_G(\Gamma)$ и $\beta_G(\Gamma)$ совпадают.*

Пусть ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\nu \subset G_{\nu+1} \subset \ldots \subset G_\mu = G \quad (1)$$

удовлетворяет условиям теоремы. Включение $\alpha_G(\Gamma) \supset \beta_G(\Gamma)$ вытекает теперь из общей теоремы 7.5.2.1. Чтобы установить обратное включение, достаточно показать, что $\alpha_G(\Gamma)$ — стабильная группа.

Прежде всего, заметим, что можно считать, что все факторы ряда (1) либо без кручения, либо конечны.

Теперь для произвольного такого фактора — обозначим его через $\mathfrak{G}$ — рассмотрим индуцированную пару $(\mathfrak{G}, \Gamma)$.

---

*) Легко проверяется, что справедливо и следующее общее утверждение: если (G, Φ) — пара, в которой G — некоторая универсальная алгебра, Γ — нормальный делитель в Φ с локально конечной фактор-группой Φ/Γ, то из локальной ограниченности пары (G, Γ) следует локальная ограниченность и (G, Φ).

Допустим вначале, что $\mathfrak{G}$ — конечная группа. В таком случае в $\mathfrak{G}$ имеется конечный Г-композиционный ряд, во всех факторах этого ряда $\alpha_G(\Gamma)$ действует тождественно, и следовательно, $\alpha_G(\Gamma)$ стабильна относительно $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — абелева группа без кручения (с конечным числом образующих), и допустим, что ранг $\mathfrak{G}$ равен n. Обозначим через $\mathfrak{G}^p$ подгруппу в $\mathfrak{G}$, состоящую из всевозможных x^p, $x \in \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}^p$ — характеристическая подгруппа в $\mathfrak{G}$, фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^p$ имеет порядок p^n и каждый Г-композиционный ряд в этой фактор-группе имеет длину, не большую n. Следовательно, n-й взаимный коммутант $[\mathfrak{G}, \alpha_G(\Gamma); n]$ содержится в $\mathfrak{G}^p$. Этот коммутант содержится также и в пересечении подгрупп $\mathfrak{G}^p$ по всем p. Но такое пересечение совпадает с единицей в $\mathfrak{G}$, так что и в этом случае пара $(\mathfrak{G}, \alpha_G(\Gamma))$ оказывается стабильной (даже финитно стабильной). Так как все пары $(G_{\nu+1}/G_\nu, \alpha_G(\Gamma))$ стабильны, то радикал $\alpha_G(\Gamma)$ является стабильной относительно G группой. Теорема доказана.

Заметим здесь, что подобные рассуждения относительно случая абелевой области действия можно распространить и на область действия, являющуюся конечнопорожденным модулем над кольцом главных идеалов.

В качестве следствия этой теоремы для внутренней пары имеем утверждение:

6.2. *Если группа G обладает возрастающим инвариантным разрешимым рядом с конечнопорожденными факторами, то в такой группе локально нильпотентный радикал совпадает с радикалом $\alpha(G)$.*

Теорему 6.1 нельзя распространить на тот случай, когда факторы соответствующего ряда имеют конечный ранг. Такое обобщение оказывается возможным лишь при дополнительном требовании, чтобы группа Г имела конечное число образующих (Р. В. Асатиани [1]).

В этой же работе доказывается следующее утверждение: если пара (G, Γ) локально ограничена, группа Г имеет конечное число образующих, а группа G обладает воз-

растающим нормальным рядом с локально нильпотентными или абсолютно простыми факторами, то $\alpha_G(\Gamma) = \beta_G(\Gamma)$.

Отметим еще, что из работы Ф. Холла [4] следует, что если группа Г нильпотентна и с конечным числом образующих и в G имеется возрастающий разрешимый Г-ряд, то в таком случае $\alpha_G(\Gamma) = \beta_G(\Gamma)$. Пока неизвестно, верно ли аналогичное утверждение для более общего случая, когда Г — произвольная полициклическая группа.

Приведем теперь следующее определение.

Группу Г назовем *псевдостабильной*, если во всяком Г-композиционном факторе области действия G Г действует как единица. Нетрудно понять, что каждая квазистабильная группа является псевдостабильной, а псевдостабильная группа слабо стабильна. В то время как понятие слабо стабильной действующей группы есть аналог абстрактной Z-группы, понятие псевдостабильной действующей группы связано с понятием абстрактной $\bar{Z}$-группы. Ясно также, что группа Г тогда и только тогда псевдостабильна, когда она совпадает со своим внешним α-радикалом.

Отмеченные только что результаты, в частности, выделяют случаи, когда псевдостабильные группы оказываются квазистабильными. Так, например, каждая конечная псевдостабильная группа автоморфизмов радикальной группы является квазистабильной. С другой стороны, уже пример группы автоморфизмов бесконечной циклической группы показывает, что для слабой стабильности это неверно.

Неизвестно, будет ли конечная псевдостабильная группа автоморфизмов произвольной группы квазистабильной.

В заключение отметим, что очень мало известно об отношениях между α-радикалом группы и α-радикалами ее подгрупп или нормальных делителей. Хорошо обстоит дело, если этот α-радикал совпадает с локально нильпотентным радикалом. Однако мы знаем (ср. п. 7.5.2), что в общем случае внутренние радикалы $\alpha(G)$ и локально нильпотентный радикал $R(G)$ не инцидентны (см. по этому вопросу также работу Ф. Холла [4]).

§ 2. ОПЕРАТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

1. Общие замечания. В этом параграфе вопросы настоящей и предыдущей глав рассматриваются в применении к областям действия, являющимся группами с операторами. (В частности, это могут быть модули над кольцом.) Систему операторов группы G будем обозначать через Ω. Элементы из Ω действуют в G как эндоморфизмы; нам будет удобнее предполагать, что эти элементы являются эндоморфизмами группы G, а также что Ω замкнуто относительно умножения и содержит тождественное преобразование. Кроме того, мы будем исходить из левой Ω-группы G. Естественно, что элементы действующей группы Γ перестановочны с элементами из Ω.

Группу G, рассматриваемую как группу с системой операторов Ω, мы будем обозначать через $\langle G, \Omega\rangle$. Понятно, что для группы $\langle G, \Omega\rangle$ все определения, в которых участвуют подгруппы, должны относиться к Ω-допустимым подгруппам, так что, например, стабильность пары (G, Γ) еще не означает стабильности пары $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$.

Легко проверяется следующее утверждение:

1.1. *Если пара* (G, Γ) *финитно стабильна, то и пара* $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$ *также финитно стабильна.*

Для доказательства этого факта достаточно заметить, что из перестановочности элементов из Γ и Ω следует, что убывающий ряд Γ-коммутантов группы G состоит из Ω-допустимых подгрупп.

1.2. *Пусть задана пара* $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$, *в которой все элементы из* Ω *являются нормальными эндоморфизмами группы* G, *и пусть* H — Γ*-допустимая подгруппа в* G *такая, что* $H^{\Omega}=G$. *Тогда, если пара* (H, Γ) *стабильна (квазистабильна), то и пара* $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$ *стабильна (квазистабильна).*

Рассмотрим вначале случай стабильной пары (H, Γ). Пусть ряд

$$E=H_0\subset H_1\subset \ldots \subset H_\alpha\subset H_{\alpha+1}\subset \ldots \subset H_\gamma=H$$

является Γ-стабильным нормальным рядом в H. Вместе

с этим рядом рассмотрим ряд

$$E = H_0^\Omega \subset H_1^\Omega \subset \ldots \subset H_\alpha^\Omega \subset H_{\alpha+1}^\Omega \subset \ldots \subset H_\gamma^\Omega = G.$$

Все члены второго ряда являются Ω-подгруппами группы $\langle G, \Omega\rangle$. Покажем, что этот ряд является Γ-стабильным нормальным рядом группы G. Начнем с доказательства нормальности ряда.

Подгруппа H_α^Ω порождается всевозможными подгруппами ωH_α, $\omega \in \Omega$. Так как все ω нормальны, то все ωH_α инвариантны относительно элементов из $H_{\alpha+1}$. Обозначим через N_α нормализатор H_α^Ω в G. Имеем $H_{\alpha+1} \subset N_\alpha$. Покажем, что N_α — Ω-подгруппа. Пусть $a \in H_\alpha^\Omega$ и $b \in N_\alpha$. Тогда

$$a^{-1}(\omega b)^{-1} a (\omega b) = \omega (a^{-1}b^{-1}a)\, \omega b = \omega [a, b] \in H_\alpha^\Omega,$$

а это и означает, что N_α Ω-допустима.

Теперь ясно, что $H_{\alpha+1}^\Omega \subset N_\alpha$, и нормальность ряда доказана.

Переходим к доказательству Γ-стабильности.

Из перестановочности элементов из Γ и Ω следует, что Γ-центр группы G является Ω-допустимой подгруппой. Следовательно, элементы из Γ действуют тождественно в H_1^Ω. Применим индукцию. Пусть для всех $\beta < \alpha \leqslant \gamma$ уже доказано, что все H_β^Ω — Γ-допустимы, и Γ действует тождественно в фактор-группе $H_{\beta+1}^\Omega/H_\beta^\Omega$. Очевидно тогда, что и H_α^Ω — Γ-допустимая подгруппа. Покажем, что Γ действует тождественно в $H_{\alpha+1}^\Omega/H_\alpha^\Omega$.

Так как нормализатор N_α является Γ- и Ω-допустимой подгруппой, то имеет смысл говорить об индуцированном представлении группы Γ относительно Ω-группы N_α/H_α^Ω. Эту последнюю группу обозначим через $\langle \bar{N}_\alpha, \Omega\rangle$, и обозначим еще

$$\bar{H}_{\alpha+1} = H_{\alpha+1}H_\alpha^\Omega/H_\alpha^\Omega.$$

Ясно, что $\bar{H}_{\alpha+1}^\Omega = H_{\alpha+1}^\Omega/H_\alpha^\Omega$. Группа Γ действует тождественно на элементы из $\bar{H}_{\alpha+1}$, а пользуясь приведенным выше замечанием о Γ-центре в применении к группе $\langle \bar{N}_\alpha, \Omega\rangle$, заключаем, что элементы из Γ действуют тождественно на элементы из $\bar{H}_{\alpha+1}^\Omega$. Этим доказана стабильность рассматриваемого ряда. Нужно лишь заметить, что

этот ряд может оказаться рядом с повторениями. Понятно, что такие повторения можно удалить.

Перейдем к случаю квазистабильной пары (H, Γ).

Пусть Σ — подгруппа с конечным числом образующих в Γ и пусть $[H_\alpha]$ — локальная система из Σ-допустимых подгрупп в H, в каждом члене которой Σ действует как стабильная группа. Согласно предыдущему, все пары $(\langle H_\alpha^\Omega, \Omega\rangle, \Sigma)$ стабильны. Так как система подгрупп H_α^Ω является локальной системой в G, то установлено, что пара $(\langle G, \Omega\rangle, \Sigma)$ квазистабильна. Следовательно, и пара $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$ квазистабильна.

Из этой теоремы, в частности, получаем такое следствие:

1.3. *Если группа G локально нильпотентна и система операторов Ω нормальна, то в G имеется локальная система из нильпотентных Ω-подгрупп.*

Для доказательства воспользуемся внутренним представлением группы G относительно себя, определяемым правилом: $x \circ g = g^{-1}xg$, $g, x \in G$. Так как элементы из Ω нормальны, то мы получаем пару $(\langle G, \Omega\rangle, G)$. Из того, что G — локально нильпотентная группа, следует, что пара (G, G) квазистабильна. Согласно теореме, квазистабильной будет и пара $(\langle G, \Omega\rangle, G)$. Но это и означает, что в G имеется локальная система из нильпотентных Ω-подгрупп.

Группу $\langle G, \Omega\rangle$ назовем Ω-*конечной*, если в этой группе обрываются как возрастающие, так и убывающие цепи Ω-подгрупп.

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение:

1.4. *Если пара* $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$ *квазистабильна и группа* $\langle G, \Omega\rangle$ *является Ω-конечной группой, то* Γ *финитно стабильна.*

Ввиду условия минимальности в G убывающий ряд Γ-коммутантов этой группы обрывается на некотором конечном месте. Обозначим это место обрыва через H. Для доказательства теоремы достаточно показать, что H совпадает с единицей группы. Пусть $[\Sigma_\alpha]$ — локальная система из подгрупп с конечным числом образующих в Γ. Так как из $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta$ следует $[H, \Sigma_\alpha] \subset [H, \Sigma_\beta]$, то система всех подгрупп $[H, \Sigma_\alpha]$ является локальной системой

в $[H, \Gamma]$. Учитывая условие максимальности и тот факт, что все $[H, \Sigma_\alpha]$ Ω-допустимы, получаем, что для некоторой Σ_α будет $[H, \Sigma_\alpha]=[H, \Gamma]$. Если $H\neq E$, то всегда и $[H, \Sigma_\alpha]\neq H$. Но тогда $[H, \Gamma]\neq H$, а это противоречит определению H, так что $H=E$.

2. Второе обобщение теоремы Цасенхауза. В предыдущем параграфе было показано, что если G — группа с условием максимальности (без операторов) и Φ — квазистабильная группа автоморфизмов группы G, то Φ также удовлетворяет условию максимальности. Отсюда, в частности, следует, что если пара (G, Φ) содержится в паре (G, Γ), Φ — нормальный делитель в Γ, и Γ — локально нильпотентная группа, то в Φ имеется конечный ряд, центральный относительно всей группы Γ. В дальнейшем мы рассмотрим параллельный факт для операторных групп и заодно обобщим теорему Цасенхауза из теории матричных групп (ср. теорему 4.3.2.2).

Будем предполагать, что Ω — коммутативная полугруппа и что элементы из Ω являются нормальными эндоморфизмами группы G.

2.1. *Пусть $\langle G, \Omega\rangle$ — Ω-конечная группа и Γ — ее локально нильпотентная группа (операторных) автоморфизмов. Тогда, если в $\langle G, \Omega\rangle$ имеется нормальный ряд из Γ-допустимых подгрупп, во всех факторах которого Γ действует как нильпотентная группа, то и сама группа Γ нильпотентна.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме:

2.2. *Если выполнены условия теоремы и Φ — квазистабильный нормальный делитель в Γ, то в Φ имеется конечный нормальный ряд, центральный относительно всей группы Γ.*

Докажем лемму. По теореме 1.4 группа Φ финитно стабильна относительно $\langle G, \Omega\rangle$. Пусть ряд $G=G^0\supset \supset G^1\supset\ldots\supset G^{n-1}\supset G^n=E$ является убывающим рядом Φ-коммутантов группы G. Все члены этого ряда Γ- и Ω-допустимы. Лемму будем доказывать индукцией по длине такого ряда. Для длины, равной единице, утверждение тривиально, и допустим, что оно доказано уже для длин $<n$. Обозначим через Σ совокупность элемен-

тов из Φ, действующих тождественно в G^1. Σ — нормальный делитель в Γ. Используя предположение индукции, легко заключить, что в Φ/Σ имеется конечный центральный относительно Γ/Σ ряд. Остается, таким образом, показать, что и в Σ имеется конечный центральный относительно Γ ряд. С этой целью группу Σ вложим в прямое произведение некоторого числа экземпляров группы $\langle G, \Omega\rangle$.

Группа $\langle G, \Omega\rangle$, будучи Ω-конечной, обладает конечной системой Ω-образующих. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — одна из таких систем. Каждому g_i сопоставим экземпляр группы $\langle G, \Omega\rangle$ — обозначим его через G_i, — и пусть $\bar{G}$ — прямое произведение всех этих G_i:

$$\bar{G} = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m.$$

Элементы из $\bar{G}$ нам будет удобнее изображать в виде строк. Обычным путем группа $\bar{G}$ обращается в группу $\langle \bar{G}, \Omega\rangle$: если $\bar{g} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \bar{G}$, $a_i \in G_i$ и $\omega \in \Omega$, то $\omega\bar{g} = (\omega a_1, \omega a_2, \ldots, \omega a_n)$.

Понятно, что при таком определении полугруппа Ω становится нормальной полугруппой операторов, и группа $\langle \bar{G}, \Omega\rangle$ оказывается Ω-конечной группой.

Сопоставим дальше каждому $\sigma \in \Sigma$ элемент $\bar{\sigma} \in \bar{G}$ по правилу

$$\bar{\sigma} = ([g_1, \sigma], [g_2, \sigma], \ldots, [g_m, \sigma]).$$

Согласно обобщенной лемме Грюна отображение $\sigma \to \bar{\sigma}$ есть гомоморфизм группы Σ в группу $\bar{G}$. Если теперь φ принадлежит ядру этого гомоморфизма, то $[g_i, \varphi] = e$ для всех g_i. Но тогда φ оставляет неподвижным каждый элемент группы G, а так как пара (G, Φ) является точной, то φ — тождественный автоморфизм. Это означает, что отображение $\sigma \to \bar{\sigma}$ есть изоморфное вложение группы Σ в $\bar{G}$. Обозначим образ Σ в $\bar{G}$ при данном изоморфизме через $\bar{\Sigma}$.

Определим дальше представление группы Γ относительно $\bar{\Sigma}$, полагая:

$$\bar{\sigma} \circ \gamma = ([g_1, \gamma^{-1}\sigma\gamma], [g_2, \gamma^{-1}\sigma\gamma], \ldots, [g_m, \gamma^{-1}\sigma\gamma])$$

для каждого $\bar{\sigma} \in \bar{\Sigma}$ и $\gamma \in \Gamma$.

Легко видеть, что при этом мы действительно получим представление Г относительно $\bar{\Sigma}$, и такое представление эквивалентно внутреннему представлению Г относительно Σ. Так как, по условию, группа Г локально нильпотентна, то пара $(\bar{\Sigma}, \Gamma)$ квазистабильна.

Доопределим дальше представление Г относительно $\bar{\Sigma}$ до представления относительно Ω-группы $\langle \bar{\Sigma}^{\Omega}, \Omega \rangle$.

Каждый элемент $\bar{g}$ из $\bar{\Sigma}^{\Omega}$ имеет вид

$$\bar{g} = (\omega_1\bar{\sigma}_1)(\omega_2\bar{\sigma}_2) \ldots (\omega_k\bar{\sigma}_k),$$

где $\sigma_i \in \Sigma$, $\omega_i \in \Omega$. Такая запись для элемента $\bar{g}$, вообще говоря, не однозначна. Допустим, что этот же элемент $\bar{g}$ представлен в виде

$$\bar{g} = (\omega'_1\bar{\sigma}'_1)(\omega'_2\bar{\sigma}'_2) \ldots (\omega'_l\bar{\sigma}'_l).$$

Переходя к проекциям во всех G_i, мы получим для всех $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\omega_1[g_i, \sigma_1]\,\omega_2[g_i, \sigma_2] \ldots \omega_k[g_i, \sigma_k] = \\ = \omega'_1[g_i, \sigma'_1]\,\omega'_2[g_i, \sigma'_2] \ldots \omega'_l[g_i, \sigma'_l].$$

Покажем, что аналогичные равенства выполняются не только для всех g_i, но и для всех элементов группы G. Обозначим через X совокупность всех $x \in G$, для которых выполняется соотношение

$$\omega_1[x, \sigma_1]\,\omega_2[x, \sigma_2] \ldots \omega_k[x, \sigma_k] = \\ = \omega'_1[x, \sigma'_1]\,\omega'_2[x, \sigma'_2] \ldots \omega'_l[x, \sigma'_l].$$

Мы покажем, что множество X является Ω-допустимой подгруппой в G. Так как X содержит элементы $g_1, g_2, \ldots, g_m$, то отсюда будет следовать, что $X = G$.

Пусть $x \in X$ и $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\omega_1[\omega x, \sigma_1] \ldots \omega_k[\omega x, \sigma_k] = \omega(\omega_1[x, \sigma_1] \ldots \omega_k[x, \sigma_k]) = \\ = \omega(\omega'_1[x, \sigma'_1] \ldots \omega'_l[x, \sigma'_l]) = \omega'_1[\omega x, \sigma'_1] \ldots \omega'_l[\omega x, \sigma'_l],$$

что означает, что $\omega x \in X$. Пусть дальше x и y принадлежат X. Используя формулу $[xy, \sigma] = y^{-1}[x, \sigma]\,y\,[y, \sigma]$, а также тот факт, что группа $[G, \Sigma]$ является абелевой

Ω-допустимой подгруппой в G, имеем:

$$\begin{aligned}\omega_1[xy,\ \sigma_1]\ldots\omega_k[xy,\ \sigma_k]&=\\ &=\omega_1(y^{-1}[x,\ \sigma_1]y[y,\ \sigma_1])\ldots\omega_k(y^{-1}[x,\ \sigma_k]y[y,\ \sigma_k])=\\ &=y^{-1}(\omega_1[x,\ \sigma_1]\ldots\omega_k[x,\ \sigma_k])y\cdot\omega_1[y,\ \sigma_1]\ldots\omega_k[y,\ \sigma_k]=\\ &=y^{-1}(\omega'_1[x,\ \sigma'_1]\ldots\omega'_l[x,\ \sigma'_l])y\cdot\omega'_1[y,\ \sigma'_1]\ldots\omega'_l[y,\ \sigma'_l]=\\ &=\omega'_1[xy,\ \sigma'_1]\ldots\omega'_l[xy,\ \sigma'_l].\end{aligned}$$

Таким образом, X замкнуто и относительно умножения.

Аналогично устанавливается, что множество X замкнуто относительно обращения своих элементов. Следовательно, X — Ω-подгруппа, и X совпадает с G.

Теперь ясно, что из равенства

$$\bar g=(\omega_1\bar\sigma_1)(\omega_2\bar\sigma_2)\ldots(\omega_k\bar\sigma_k)=(\omega'_1\bar\sigma'_1)(\omega'_2\bar\sigma'_2)\ldots(\omega'_l\bar\sigma'_l)$$

вытекают равенства:

$$\omega_1([g_i\gamma^{-1},\ \sigma_1]\ldots\omega_k[g_i\gamma^{-1},\ \sigma_k]=\omega'_1[g_i\gamma^{-1},\ \sigma'_1]\ldots\omega'_l[g_i\gamma^{-1},\ \sigma'_l],$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

а из последних — такие равенства:

$$\begin{aligned}\omega_1([g_i\gamma^{-1},\ \sigma_1]\gamma)\ldots\omega_k([g_i\gamma^{-1},\ \sigma_k]\gamma)&=\\ &=\omega'_1([g_i\gamma^{-1},\ \sigma'_1]\gamma)\ldots\omega'_l([g_i\gamma^{-1},\ \sigma'_l]\gamma),\end{aligned}$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Ввиду $[g\gamma^{-1},\quad\sigma]\gamma=((g\gamma^{-1})^{-1}\cdot g\gamma^{-1}\sigma)\gamma=g^{-1}\cdot g\gamma^{-1}\sigma\gamma=$ $=[g,\ \gamma^{-1}\sigma\gamma]$, наконец, получаем:

$$\omega_1[g_i,\ \gamma^{-1}\sigma\gamma]\ldots\omega_k[g_i,\ \gamma^{-1}\sigma_k\gamma]=\omega'_1[g_i,\ \gamma^{-1}\sigma'_1\gamma]\ldots\omega'_l[g_i,\ \gamma^{-1}\sigma'_l\gamma].$$

Но это означает, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}\omega_1(\bar\sigma_1\circ\gamma)\,\omega_2(\bar\sigma_2\circ\gamma)\ldots\omega_k(\bar\sigma_k\circ\gamma)&=\\ &=\omega'_1(\bar\sigma'_1\circ\gamma)\,\omega'_2(\bar\sigma'_2\circ\gamma)\ldots\omega'_l(\bar\sigma'_l\circ\gamma).\end{aligned}$$

Таким образом, если положить:

$$\bar g\circ\gamma=\omega_1(\bar\sigma_1\circ\gamma)\,\omega_2(\bar\sigma_2\circ\gamma)\ldots\omega_k(\bar\sigma_k\circ\gamma),$$

то так определенное действие Γ в $\bar\Sigma^\Omega$ не будет зависеть от записи элемента $\bar g$ через образующие.

Легко проверяется, что отображение $\bar g\to\bar g\circ\gamma$ является автоморфизмом группы $\langle\bar\Sigma^\Omega,\ \Omega\rangle$, так что мы задали пару

$(\langle\bar{\Sigma}^{\Omega}, \Omega\rangle, \Gamma)$, причем из определений видно, что пара $(\bar{\Sigma}, \Gamma)$ является здесь подпарой.

Так как пара $(\bar{\Sigma}, \Gamma)$ квазистабильна, то по теореме 1.2 и пара $(\bar{\Sigma}^{\Omega}, \Omega\rangle, \Gamma)$ квазистабильна. С другой стороны, так как $\langle\bar{\Sigma}^{\Omega}, \Omega\rangle$ — Ω-конечная группа, то по теореме 1.4 группа Γ нильпотентна относительно $\bar{\Sigma}^{\Omega}$, а значит, и относительно $\bar{\Sigma}$. Таким образом, Γ нильпотентна относительно Σ, чем и завершается доказательство леммы.

Для доказательства теоремы остается заметить следующее.

Пусть выполнены условия теоремы и пусть ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset H_r = G$$

является таким рядом из Γ-допустимых подгрупп в G, что во всех его факторах группа Γ действует как нильпотентная группа. Обозначим через Σ_i ядро индуцированного представления Γ относительно H_{i+1}/H_i, и пусть $\Phi = \bigcap\limits_{i=0}^{r-1} \Sigma_i$. По условию, все Γ/Σ_i — нильпотентные группы. В силу теоремы Ремака о подпрямых произведениях, группа Γ/Φ также нильпотентна. Кроме того, группа Φ, очевидно, нильпотентна относительно G, и по лемме в Φ имеется конечный ряд, центральный относительно Γ. Из отмеченных свойств подгруппы Φ следует, что Γ — нильпотентная группа.

Сейчас будет показано, что если в предыдущей теореме предполагать, что группа G нильпотентна, то требование нормальности операторов может быть опущено.

Итак, допустим, что группа G нильпотентна и выполнены условия теоремы 2.1, кроме требования нормальности операторов. Пусть Φ — та же, что и в лемме.

Легко видеть, что в G имеется Φ-стабильный ряд из Γ- и Ω-допустимых подгрупп, являющийся центральным рядом в G. Доказательство проводится индукцией по длине такого ряда. Допускаем, что утверждение леммы 2.2 доказано для длин ряда $<n$, и пусть ряд

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G$$

является соответствующим рядом длины n. Через Σ обозначим сейчас ядро представления Φ относительно фактор-группы G/G_1. В силу предположения индукции, в Φ/Σ имеется конечный центральный в Γ ряд. Тот факт, что в Σ имеется конечный центральный в Γ ряд, можно теперь доказать дословным повторением рассуждений предыдущего пункта — условие нормальности теперь оказывается лишним благодаря тому, что G_1 является подгруппой центра.

Хотя нужное утверждение можно считать уже доказанным, мы приведем сейчас еще одно доказательство того, что в Σ имеется конечный центральный в Γ ряд.

Пусть H — совокупность всех гомоморфизмов группы $\langle G, \Omega\rangle$ в ее (центральную) подгруппу $\langle G_1, \Omega\rangle$. H — абелева группа относительно операции, определяемой правилом: $g(u+v)=gu\cdot gv$, $g\in G$, u, $v\in H$. Полагая для $\omega\in\Omega$ $g\cdot\omega u=(\omega g)u$, мы обратим H в Ω-группу $\langle H, \Omega\rangle$. Так как группа G имеет конечное число Ω-образующих, то группа $\langle H, \Omega\rangle$ изоморфна подгруппе прямого произведения конечного числа экземпляров группы $\langle G, \Omega\rangle$, так что вместе с $\langle G, \Omega\rangle$ группа $\langle H, \Omega\rangle$ является Ω-конечной группой.

Зададим дальше представление группы Γ относительно $\langle H, \Omega\rangle$.

Пусть $u\in H$ и $\gamma\in\Gamma$. Через $u\circ\gamma$ обозначим элемент из H, определяемый формулой $g(u\circ\gamma)=((g\circ\gamma^{-1})u)\circ\gamma$. Этим мы действительно определяем элементы в H, причем легко проверяется, что отображение $u\to u\circ\gamma$ является операторным автоморфизмом группы H и $u\circ\gamma_1\gamma_2=$ $=(u\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$. Мы получили пару $(\langle H, \Omega\rangle, \Gamma)$.

Определим дальше изоморфное вложение группы Σ в H.

Пусть $\sigma\in\Sigma$. Сопоставим этому σ отображение σ^* группы G в G_1 по формуле $g\sigma^*=[g, \sigma]$. Непосредственная проверка показывает, что σ^* — элемент в H, и отображение $\sigma\to\sigma^*$ является изоморфным вложением Σ в H. Образ Σ при таком изоморфизме обозначим через Σ^*. Пусть $\sigma^*\in\Sigma^*$, $\gamma\in\Gamma$ и $g\in G$.

Тогда

$$g(\sigma^*\circ\gamma)=((g\circ\gamma^{-1})\sigma^*)\circ\gamma=[g\circ\gamma^{-1}, \sigma]\circ\gamma=[g, \gamma^{-1}\sigma\gamma]= \\ =g(\gamma^{-1}\sigma\gamma)^*.$$

Из этих выкладок следует, что Σ^* является Г-допустимой подгруппой в H и что пара (Σ^*, Γ) изоморфна внутренней паре (Σ, Γ).

Дальше остается повторить соответствующие рассуждения, применявшиеся раньше. Этими рассуждениями мы покажем, что пара $(\langle(\Sigma^*)^{\Omega}, \Omega\rangle, \Gamma)$ такова, что группа Г нильпотентна относительно $(\Sigma^*)^{\Omega}$. Следовательно, Г нильпотентна относительно Σ, что и требовалось.

Доказанная в этом пункте теорема в различных специальных ситуациях допускает обобщения. Во-первых, во многих хороших случаях Ω-групп требование, чтобы группа G была Ω-конечной, может быть заменено одним только условием максимальности для Ω-подгрупп. Во-вторых, не всегда обязательно требовать, чтобы элементы из Ω действовали как эндоморфизмы. Можно, например, исходить из понятия системы квазиоператоров, определяемого следующим образом.

Будем говорить, что полугруппа Ω является *системой квазиоператоров группы* G, если действие Ω в G удовлетворяет следующему условию: единичный элемент в G является неподвижным элементом относительно действия всех $\omega \in \Omega$ и для любых $a, b \in G$, $\omega \in \Omega$ выполняется равенство $\omega(ab) = \omega a \cdot \omega b \cdot c$, где элемент c принадлежит Ω-замыканию коммутанта подгруппы, порожденной элементами a и b.

Из этого условия вытекает, что если a и b — перестановочные элементы, то при любом $\omega \in \Omega$ будет $\omega(ab) = \omega a \cdot \omega b$.

Легко также проверить, что если H — Ω-допустимый нормальный делитель группы G, то, полагая $\omega(aH) = (\omega a)H$, $a \in G$, $\omega \in \Omega$, мы обратим фактор-группу G/H в Ω-квазиоператорную группу.

3. Еще о треугольности. Результаты этого пункта принадлежат В. Г. Житомирскому [3]. Будем рассматривать здесь точные групповые пары вида $(\langle G, \Omega\rangle, \Gamma)$, где Ω — система квазиоператоров, являющаяся кольцом главных идеалов (с действием, согласованным с кольцевыми операциями) и все элементы из Ω действуют в G нормально (т. е. перестановочны с внутренними автоморфизмами). Группа G называется *группой без*

Ω-*кручения*, если из $\omega g = e$ следует $g = e$ для любого не равного нулю $\omega \in \Omega$. G называется ΩR-группой, если она без Ω-кручения, и равенство $\omega a = \omega b$ влечет $a = b$ при любом $\omega \neq 0$. Ω-подгруппу H ΩR-группы G назовем Ω-*изолированной*, если из $\omega g \in H$, $g \in G$, следует $g \in H$. Пересечение любого множества Ω-изолированных подгрупп из G также Ω-изолировано, и, как обычно, Ω-*изолятором* некоторого подмножества X ΩR-группы G называется пересечение всех Ω-изолированных подгрупп из G, содержащих X. Множество Ωg всех элементов вида ωg, $\omega \in \Omega$, $g \in G$, является циклической (Ω-циклической) подгруппой. Группа G называется Ω-*локально циклической*, если любое ее конечное подмножество принадлежит некоторой Ω-циклической подгруппе.

Все эти понятия являются естественным обобщением известных теоретико-групповых понятий и относящихся к тому случаю, когда Ω — кольцо целых чисел. В этом частном случае ΩR-группа — это R-группа Конторовича. Векторные пространства над полями также являются ΩR-группами. Легко привести примеры некоммутативных ΩR-групп с Ω, отличным от кольца целых чисел; такие примеры, в частности, доставляет теория групп Ли. На ΩR-группы переносятся многие факты теории R-групп и, в частности, теории локально нильпотентных групп без кручения.

Подобно тому как это делается для R-групп, можно, например, доказать, что в ΩR-группе локально нильпотентный радикал является Ω-изолированной локально нильпотентной Ω-подгруппой.

Пару $(\langle G, \Omega \rangle, \Gamma)$ будем называть *скалярной*, если G покрывается Γ-допустимыми Ω-локально циклическими подгруппами. Нетрудно понять, что если такая пара является точной, то Γ — абелева группа. Назовем еще пару $(\langle G, \Omega \rangle, \Gamma)$ *треугольной*, если в группе G имеется Γ-ряд, во всех факторах которого Γ действует как скалярная группа. Условимся еще в следующем обозначении: если Γ — группа автоморфизмов группы G, то $\tilde{\Gamma}$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Aut}\,(G)$, порожденную группой Γ и группой внутренних автоморфизмов.

Следующая теорема обобщает хорошо известное свойство линейных групп.

3.1. *Пусть в паре* ($\langle G, \Omega\rangle$, Γ) *область действия* G *является* ΩR*-группой с условием максимальности для* Ω*-изолированных подгрупп. Тогда внешний радикал* $\gamma_G(\Gamma)$ *является финитно стабильной группой. Если, кроме того, эта пара точная и* ($\langle R(G), \Omega\rangle$, $\tilde{\Gamma}$) и ($\langle G/R(G), \Omega\rangle$, Γ) — *треугольные пары, то фактор-группа* $\Gamma/\gamma_G(\Gamma)$ *абелева, и в* $\gamma_G(\Gamma)$ *имеется инвариантный в* Γ *ряд, факторы которого изоморфны подгруппам факторов треугольного ряда в* $R(G)$.

Для групп без операторов имеет место параллельная теорема.

3.2. *Если в групповой паре* (G, Γ) *группа* G *удовлетворяет условию максимальности и пары* (G, Γ) *и* ($R(G)$, $\tilde{\Gamma}$) *треугольны, то группа автоморфизмов* Γ *треугольна в себе*.

Треугольность в себе означает, что внутренняя пара (Γ, Γ) треугольна, а последнее свойство равносильно тому, что в Γ имеется инвариантный ряд с циклическими или локально циклическими факторами. Обе эти теоремы указывают на тесную связь внешней и внутренней треугольностей. Теорема 3.2 обобщает также следующий результат Р. Бера [13]: если G — конечная группа и обладает инвариантным Γ-допустимым рядом с циклическими факторами, то группа атоморфизмов Γ сверхразрешима.

По поводу доказательств мы сошлемся на указанную работу В. Г. Житомирского. В этой же работе рассматриваются группы автоморфизмов упорядоченных групп и приводятся некоторые условия упорядочиваемости такой группы автоморфизмов. Эти рассмотрения также тесно связаны с идеей треугольности.

Группам автоморфизмов упорядоченных групп посвящено несколько работ (см. список литературы). В работе Дж. Харви [1], в частности, строится для этого случая теория голоморфа.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ РАЗРЕШИМЫХ И НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

§ 1. АВТОМОРФИЗМЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

1. Введение. В настоящей главе собраны далеко не все известные результаты по группам автоморфизмов разрешимых и нильпотентных групп, хотя и известно здесь значительно меньше, чем еще предстоит сделать. Работ, специально посвященных автоморфизмам разрешимых и нильпотентных групп, имеется сравнительно мало. Однако довольно много по этой теме содержится в исследованиях, относящихся к смежным вопросам теории групп. Все сказанное применимо также и к группам автоморфизмов абелевых групп и к близкому сюда вопросу — к группам автоморфизмов модулей. Особое положение, конечно, в теории линейных групп над полями, которая также сюда относится. В этом случае однородность области действия снимает с повестки многие задачи, представляющие наибольший интерес в неоднородной ситуации. Следует еще заметить, что теория групп автоморфизмов абелевых групп тесно связана с общей теорией разрешимых и нильпотентных групп. Некоторые из таких связей стимулировали новые существенные сдвиги в изучении автоморфизмов абелевых групп.

В дальнейшем нас будут в основном интересовать абстрактные свойства групп автоморфизмов. Везде, где речь идет об абелевых группах, мы используем аддитивную запись.

2. Периодические группы. Всякая периодическая абелева группа разложима в прямую сумму примарных групп. Так как все эти примарные компоненты являются характеристическими подгруппами, то группа автоморфиз-

мов периодической абелевой группы строится из групп автоморфизмов примарных абелевых групп с помощью полных прямых произведений. Понятно, что аналогичное утверждение имеет место и для периодической локально нильпотентной группы. Теперь перейдем к группам автоморфизмов абелевых p-групп.

Пусть G — абелева p-группа (по некоторому простому p).

Пусть вначале эта группа является полной. В таком случае G представима в виде прямой суммы квазициклических групп. Согласно общим рассмотрениям из п. 3.5.3 каждому эндоморфизму группы G отвечает обобщенная матрица (φ_{ij}), где $\varphi_{ij} \in \operatorname{Hom}(G_i, G_j)$, G_i, G_j — всевозможные пары квазициклических слагаемых. Группа $\operatorname{Hom}(G_i, G_j)$ хорошо известна (см., например, книги А. Г. Куроша [3] и [4]). Каждый ее элемент задается целым p-адическим числом, а произведению гомоморфизмов отвечает произведение соответствующих p-адических чисел. Итак, кольцо эндоморфизмов группы G допускает представление матрицами над кольцом целых p-адических чисел. При этом обратимым эндоморфизмам — автоморфизмам — отвечают матрицы, у которых определитель не делится на p. Приведенные соображения могут быть использованы иногда и для неполных групп, если перейти к пополнению. Однако такой переход «сглаживает» имевшиеся неоднородности, и поэтому в ряде задач ничего не дает.

Если группа G не является полной, но порядки всех ее элементов ограничены в совокупности, то такая группа представима в виде прямой суммы циклических p-групп; общие условия такой представимости см., например, в книге А. Г. Куроша [3]. Здесь также можно воспользоваться матричными представлениями эндоморфизмов и автоморфизмов. Соответствующие группы Hom легко находятся. В том случае, когда все циклические прямые слагаемые имеют один и тот же порядок p^r, кольцо эндоморфизмов группы G представимо матрицами над кольцом вычетов по $\operatorname{mod} p^r$. Если $r = 1$, то получается поле — простое поле характеристики p.

Пусть теперь G — произвольная абелева p-группа. Через pG обозначается подгруппа в G, состоящая из всех элементов вида px, $x \in G$. Дальше по индукции определяются подгруппы $p^\alpha G$, α — порядковые числа. Если α не предельное, то $p^\alpha G = p(p^{\alpha-1}G)$, а для предельного α $p^\alpha G = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} p^\beta G$. Так мы получаем в G убывающий ряд характеристических подгрупп

$$G \supset pG \supset \ldots \supset p^\alpha G \supset p^{\alpha+1}G \supset \ldots \tag{1}$$

Пересечение всех членов такого ряда совпадает с полной частью группы G.

Этому ряду отвечает возрастающий ряд в группе автоморфизмов $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(G)$:

$$E = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots,$$

где $A_\alpha = \mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(p^\alpha G)$. Все члены этого ряда являются нормальными делителями группы $\mathfrak{A}$. Здесь, однако, нельзя утверждать, что для предельных α A_α есть объединение предыдущих членов. Очевидно, что $\mathfrak{A}/A_\alpha$ — это некоторая подгруппа группы всех автоморфизмов группы $p^\alpha G$. В работе Л. Фукса [2] показано, что для натуральных номеров имеет место изоморфизм $\mathfrak{A}/A_n \approx \mathfrak{A}(p^nG)$. То же самое верно для всех α, если G — счетная группа (см. также Х. Фридман [1]).

Пусть теперь $G[p^n]$ обозначает подгруппу в G из всех элементов, порядки которых — делители числа p^n. Мы получаем в G возрастающий ряд характеристических подгрупп

$$E = G[p^0] \subset G[p^1] \subset \ldots \subset G[p^n] \subset \ldots \subset \bigcup G[p^n] = G. \tag{2}$$

Этому ряду отвечает убывающий ряд соответствующих $\mathfrak{A}$-централизаторов. Легко понять, что факторы $\mathfrak{A}/\mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(G[p^n])$ допускают матричное представление.

Комбинируя, далее, члены рядов (1) и (2), мы получаем новые интересные характеристические ряды. Большой интерес представляет изучение связанных с такими рядами групп автоморфизмов, в частности стабильных групп автоморфизмов. Наиболее полно, как и следовало ожидать, исследован здесь счетный случай.

Этими поверхностными замечаниями о группах автоморфизмов абелевых p-групп мы здесь ограничимся. По поводу более глубоких фактов мы сошлемся на работы К. Шода [2], Р. Бера [2], Л. Фукса [1, 2], Г. Лептина [1, 2] и Х. Фридман [1]. Заметим еще, что в работе Г. Лептина [1] приводятся некоторые условия, при которых абелева группа с точностью до изоморфизма определяется своей группой автоморфизмов. В некоторых работах обсуждался вопрос о порядке группы автоморфизмов абелевой p-группы.

Вообще же в теории групп автоморфизмов абелевых p-групп еще имеется достаточно много интересных неисследованных вопросов.

3. Группы без кручения. Ссылки. Легко понять, что группа автоморфизмов свободной абелевой группы представима матрицами над кольцом целых чисел. С другой стороны, группа автоморфизмов полной абелевой группы без кручения допускает матричное представление над полем рациональных чисел. Учитывая дальше пополняемость всякой абелевой группы без кручения, мы можем заключить, что группа автоморфизмов произвольной абелевой группы без кручения допускает матричное представление над полем рациональных чисел. Соответствующие матрицы будут конечными, если исходная абелева группа имеет конечный ранг.

Некоторые результаты о группах автоморфизмов смешанных групп содержатся в работах А. П. Мишиной. В работе А. П. Мишиной [1] приводится описание всех абелевых групп, в которых автоморфизмы каждой подгруппы могут быть продолжены до автоморфизмов всей группы.

Отметим еще работу Врис — Миранда [1], где рассматриваются бесконечные абелевы группы с малым (конечным) числом автоморфизмов.

Теперь сформулируем следующие теоремы относительно разрешимых групп автоморфизмов абелевых групп.

3.1. *Разрешимая группа автоморфизмов абелевой группы с конечным числом образующих удовлетворяет условию максимальности.*

3.2. *Разрешимая группа автоморфизмов абелевой группы без кручения конечного ранга содержит подгруппу конечного индекса, коммутант которой является финитно стабильной группой.*

3.3. *Разрешимая группа автоморфизмов прямого произведения конечного числа квазициклических групп содержит подгруппу конечного индекса, коммутант которой является финитно стабильной группой.*

Доказательства этих теорем используют соответствующие результаты о матричных группах, и мы их отложим до следующего параграфа.

Отметим, далее, интересную работу Р. Бера [16], посвященную неприводимым локально конечным группам автоморфизмов абелевых групп. Некоторые результаты о группах автоморфизмов абелевых группп имеются в другой работе Р. Бера [9]. См. также работу В. С. Чарина [5].

§ 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ, РАЗРЕШИМЫЕ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

1. Периодические матричные группы. Как уже отмечалось, теория линейных групп тесно связана с теорией групп автоморфизмов абелевых и разрешимых групп, и следовательно, разрешимые линейные группы играют важную роль в абстрактной теории разрешимых групп (см. по этому поводу статью А. И. Мальцева [5]). Из этих позиций мы здесь в основном и исходим. При этом, однако, не уделено должного особого внимания группам над конечными полями и кольцами — мы ограничиваемся общей ситуацией полей без дальнейших детализаций. Кроме того, заметим, что почти везде, за исключением одного пункта, речь идет о конечномерных группах.

Легко понять, что в тех случаях, когда имеется в виду изучать абстрактные свойства заданной линейной группы без учета ее поведения в объемлющей полной линейной группе, можно считать, что основное поле является алгебраически замкнутым. В этом пункте будет предполагаться, что такое свойство всегда имеет место.

Далее напомним, что если Г — абелева группа, то согласно лемме Шура все ее неприводимые представления одномерны. Допустим теперь, что Г — конечная абелева группа, причем ее порядок и характеристика поля взаимно просты. Так как, согласно теореме Машке, Г вполне приводима, то теперь ясно, что все элементы из Г в некотором базисе приводятся к совместному диагональному виду, причем на главной диагонали стоят корни из единицы. Сказанное применимо, в частности, к одной периодической матрице, хотя понятно, что для этого случая доказательство можно получить непосредственно из нормальной формы Жордана.

После этих предварительных замечаний мы приступим к изложению классических результатов И. Шура, содержащихся в его работе [1].

Начнем со следующей теоремы:

1.1. *Всякая периодическая матричная группа локально конечна.*

В работе Шура предполагалось, что основное поле имеет характеристику нуль (даже является полем комплексных чисел), однако, как заметили Д. А. Супруненко и В. П. Платонов, доказательство И. Шура проходит и в общем случае.

Сейчас мы будем следовать изложению работы Супруненко — Платонова [1]. Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

1.2 (Бернсайд). *Если* Г — *неприводимая матричная группа и все корни характеристических полиномов матриц из* Г *являются корнями из единицы степеней, меньших некоторого числа, то* Г — *конечная группа.*

Прежде всего отметим, что функция $\mathrm{Sp}(A)$ по всем $A \in \Gamma$ принимает лишь конечное множество — обозначим его через M — значений из основного поля. Это непосредственно следует из условий, наложенных на характеристические корни. Допустим теперь, что группа Г имеет степень n. В таком случае ввиду неприводимости и по теореме Бернсайда в группе Г имеется n^2 линейно независимых матриц A_i, $i = 1, 2, \ldots, n^2$. Для каждого $X \in \Gamma$ можно записать:

$$\mathrm{Sp}(A_i X) = \sum_{\alpha,\ \beta} a^i_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha} = m_i \in M, \ i = 1, 2, \ldots, n^2, \ A_i = (a^i_{\alpha\beta}), \ X = (x_{\alpha\beta}).$$

Получаем систему n^2 уравнений с n^2 неизвестными $x_{\alpha\beta}$. Для каждого набора m_i эта система имеет единственное решение. Так как множество M конечно, то отсюда следует, что и Γ — конечная группа. Понятно также, что если множество M состоит из m элементов, то порядок группы Γ ограничен числом m^{n^2}.

Из этой леммы сразу же следует, что если порядки элементов неприводимой матричной группы ограничены некоторым числом, то такая группа конечна. Кроме того, как заметил Д. А. Супруненко, отсюда же непосредственно выводится и теорема Колчина из § 4.2.

Для перехода к общему случаю неприводимой периодической группы используется следующая лемма из теории полей:

1.3. *Пусть K — некоторое поле, Δ — его простое подполе и $w_1, w_2, \ldots, w_p$ — конечное множество элементов из K. Обозначим $L = \Delta(w_1, w_2, \ldots, w_p)$. Тогда в поле K имеется лишь конечное число корней из единицы, удовлетворяющих уравнениям данной степени n с коэффициентами из L.*

Обозначим через Σ поле всех алгебраических относительно Δ элементов из L, и покажем вначале, что Σ имеет конечную степень над Δ. Допустим, что первые q из p элементов $w_1, w_2, \ldots, w_q$ независимы над полем Δ, а для большого числа это уже неверно. Точнее, это означает следующее: если $f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ — полином с коэффициентами из Δ, то равенство

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_q) = 0 \tag{1}$$

возможно лишь в том случае, когда все коэффициенты равны нулю, а аналогичное соотношение с большим числом переменных возможно и при ненулевых коэффициентах. Здесь q может оказаться равным нулю и может быть равным p. Заметим далее, что, как хорошо известно, если соотношение типа (1) невозможно с коэффициентами из Δ, то подобное соотношение невозможно и с коэффициентами, алгебраическими над Δ. Поле L является конечным алгебраическим расширением поля $\Delta(w_1, w_2, \ldots, w_q)$. Пусть k — степень этого расширения,

Тогда, если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ — элементы в L, то при некоторых $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k+1}$, являющихся полиномами от $w_1, w_2, \ldots, w_q$ с коэффициентами из Δ, должно быть:

$$\varphi_1\alpha_1 + \varphi_2\alpha_2 + \ldots + \varphi_{k+1}\alpha_{k+1} = 0. \tag{2}$$

Если здесь в левой части произвести перегруппировку по одночленам от $w_1, w_2, \ldots, w_q$, то новыми коэффициентами будут служить выражения

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{k+1}\alpha_{k+1},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ — элементы из Δ. Если здесь, в частности, в качестве $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ взять некоторые алгебраические числа над Δ, то соотношение (2) может иметь место лишь при равенстве нулю всех сумм $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{k+1}\alpha_{k+1}$; в противном случае получилось бы противоречие с независимостью $w_1, w_2, \ldots, w_q$. Таким образом, любые $k+1$ элементов из Σ линейно зависимы и поле Σ имеет над Δ степень, не большую k.

Теперь будем доказывать основное утверждение леммы. Вначале рассмотрим случай поля нулевой характеристики. Пусть ε — некоторый первообразный корень степени m из единицы, и допустим, что этот корень удовлетворяет уравнению n-й степени с коэффициентами из L. Допустим еще, что многочлен

$$f(x) = x^s + \beta_1 x^{s-1} + \ldots + \beta_s$$

является неприводимым многочленом относительно L, имеющим ε своим корнем. Здесь $s \leqslant n$ и $f(x)$ является делителем двучлена $x^m - 1$. Все корни многочлена $f(x)$ являются также корнями m-й степени из единицы. Так как коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_s$ выражаются рационально через эти корни, то они являются алгебраическими над Δ числами и, следовательно, принадлежат Σ. Отсюда в свою очередь следует, что если $\varphi(x)$ — минимальный полином над Δ с корнем ε, и $\psi(m)$ — степень этого полинома, то имеет место неравенство

$$\psi(m) \leqslant ks \leqslant kn.$$

Из известных свойств полинома $\varphi(x)$ (см., например, Ван дер Варден [2], т. I) теперь вытекает, что и число m

ограничено, и следовательно, имеется лишь конечное число корней из единицы с отмеченным в лемме условием.

Случай поля простой характеристики разбирается еще проще. Пусть поле Δ содержит p элементов, а в этом случае в Σ имеется $\leqslant p^k$ элементов. Так как ε есть корень полинома степени $\leqslant n$ над Σ, то этот ε принадлежит конечному подполю, содержащему не более p^{kn} элементов, так что ε является также корнем степени $\leqslant p^{kn}-1$ из единицы, и этим лемма доказана.

1.4. *Пусть* Γ — *неприводимая линейная группа над произвольным полем* P. *Если все корни характеристических полиномов матриц из* Γ *являются корнями из единицы, то* Γ — *локально конечная группа.*

Пусть H_1 — подгруппа в Γ, порожденная конечным множеством M_1. Так как группа Γ конечномерна, то множество M_1 можно дополнить до неприводимого конечного подмножества M из Γ. Пусть H — подгруппа, порожденная подмножеством M. Покажем, что H — конечная группа. Этим лемма будет доказана. Пусть Δ — простое подполе основного поля P. Присоединим к Δ все элементы каждой матрицы из M, и новое поле обозначим через K. Элементы каждой матрицы из H также принадлежат K. Пусть теперь X — множество всех корней из единицы, являющихся корнями характеристических полиномов $|A-\lambda E|$, $A \in H$. Согласно предыдущей лемме, X — конечное множество. Из леммы 1.2 теперь выводим, что H — конечная группа.

Теперь уже можно доказать и теорему 1.1. Пусть Γ — периодическая матричная группа и пусть эта группа действует в конечномерном пространстве G. Пусть $[H_i]$ — некоторый Γ-композиционный ряд в G, и Σ — Γ-централизатор этого ряда. Σ — нильпотентная, а следовательно, и локально конечная группа. Согласно предыдущей лемме в каждом факторе композиционного ряда группа Γ действует как локально конечная, а из теоремы Ремака можно заключить, что и Γ/Σ — локально конечная группа. Так как расширение локально конечной группы с помощью локально конечной группы — снова такая же группа, то Γ — локально конечная группа. Теорема доказана.

Эта теорема в случае полей нулевой характеристики дополняется следующей теоремой, для конечных групп доказанной еще Жорданом.

1.5. *Всякая периодическая матричная группа над полем нулевой характеристики содержит абелев нормальный делитель конечного индекса, причем этот индекс ограничен числом, зависящим лишь от степени группы.*

Вначале приведем доказательство теоремы для поля комплексных чисел, следуя работе И. Шура [1]. Это доказательство опирается на принадлежащие Фробениусу геометрические соображения, представляющие и большой самостоятельный интерес.

Пусть все рассматриваемые матрицы имеют степень n и пусть E — единичная матрица. Для каждой матрицы A через $s(A)$ будем обозначать сумму квадратов модулей всех элементов матрицы A. Очевидно, что если U — унитарная матрица, то справедливы соотношения

$$s(A) = s(UA) = s(AU) = s(U^{-1}AU).$$

Фробениусом доказаны следующие утверждения. Если A и B — две унитарные матрицы, принадлежащие конечной группе, и $s(E-A) < \frac{1}{2}$, $s(E-B) < 4$, то A и B перестановочны. Доказано также, что имеется лишь конечное число унитарных матриц $A_1, A_2, \ldots$, удовлетворяющих условию $s(A_i - A_j) \geqslant \frac{1}{2}$, и это число ограничено числом $\lambda_n = (\sqrt{8n}+1)^{2n^2}$. Эти утверждения мы примем без доказательства.

Пусть теперь Γ — периодическая матричная группа степени n над полем комплексных чисел. Такая группа локально конечна, и, в силу известных соображений, можно считать, что Γ унитарна. Обозначим через Σ подгруппу в Γ, порожденную всеми A, удовлетворяющими условию: $s(E-A) < \frac{1}{2}$. Согласно сказанному выше такая подгруппа абелева, и очевидно также, что она инвариантна в Γ. Имея дальше в виду соотношение

$$s(E - AB^{-1}) = s((B-A)B^{-1}) = s(B-A),$$

мы можем еще заключить, что если A и B принадлежат различным смежным классам по Σ, то $s(B-A) \geqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, этих смежных классов не более числа λ_n.

Чтобы доказать теорему в общем случае поля нулевой характеристики, вначале напомним (см. п. 4.2.3), что если конечная группа допускает представление степени n в некотором поле нулевой характеристики, то она допускает представление той же степени и в поле комплексных чисел. Таким образом, теорема Жордана верна для любого поля представления нулевой характеристики. Теорема 1.5 для произвольных полей нулевой характеристики непосредственно следует из теоремы Жордана и следующего общего предложения: если в группе Г каждая ее подгруппа с конечным числом образующих имеет абелев нормальный делитель индекса $\leqslant \lambda$, то и в Г имеется абелев нормальный делитель индекса $\leqslant \lambda$. Отмеченное сейчас предложение легко вывести методами А. И. Мальцева из локальной теоремы УИП (см. А. И. Мальцев [2]).

Заметим, что для полей простой характеристики соответствующий результат уже неверен. В локально конечной линейной группе над полем характеристики $p>0$ может даже не быть разрешимой подгруппы конечного индекса (см. еще работу М. И. Каргаполова [3]).

1.6. *Всякая периодическая группа матриц над полем рациональных чисел конечна.*

Пусть группа Г удовлетворяет условиям теоремы. Можно считать, что Г — абелева группа. Допустим, что ее элементы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ линейно порождают линейную оболочку группы Г. Если присоединить к полю рациональных чисел R характеристические корни всех σ_i и соответствующее конечное (алгебраическое) расширение обозначить через R', то в R' группа Г приводится к диагональному виду. При этом на главной диагонали будут стоять элементы периодической части мультипликативной группы поля R'. Но эта периодическая часть по известной теореме (ср. лемму 1.3) конечна. Отсюда легко следует конечность группы Г.

В связи с рассмотрениями этого пункта заметим еще, что периодические фактор-группы матричных групп не

всегда локально конечны, — достаточно вспомнить, что свободная группа может быть представлена как матричная, и воспользоваться теоремой П. С. Новикова. Поэтому было бы интересно выделить случаи, когда можно все же заключать, что фактор-группа матричной группы локально конечна, если она периодическая (см. в связи с этим работу Д. А. Супруненко [6]).

2. Разрешимые группы. Среди работ по разрешимым матричным группам над произвольными полями наибольшую роль сыграли работы Г. Цасенхауза [1], Е. Колчина [1], А. И. Мальцева [5] и серия работ Д. А. Супруненко (см. литературу).

Мы начнем со следующей теоремы, которую назовем здесь основной:

2.1. *Пусть G — n-мерное векторное пространство над полем P, и $CL(n, P)$ — группа всех автоморфизмов этого пространства. Тогда существует такое $\rho = \rho(n)$, что в любой разрешимой подгруппе Γ из $CL(n, P)$ имеется подгруппа конечного индекса $i \leqslant \rho(n)$, коммутант которой является стабильной группой.*

Перед тем как доказывать теорему, заметим, что из нее и теоремы Калужнина немедленно следует важная теорема Цасенхауза:

2.2. *Существует такое конечное $k = k(n)$, что в любой разрешимой подгруппе Γ из $CL(n, P)$ длина ряда коммутантов ограничена этим числом.*

В свою очередь из 2.2 вытекает, что для матричных групп такие свойства, как локальная разрешимость, RN^* и вообще локальная радикальность вырождаются в разрешимость группы.

Приводимое ниже доказательство теоремы 2.1 совпадает в основном с доказательством из работы Д. А. Супруненко [3]. Очень простое ее доказательство, использующее топологию Зарисского, — об этой топологии см. п. 4.4.2, — содержится также в книге И. Капланского [1].

Рассмотрим вначале случай, когда разрешимая группа Γ является примитивной и неприводимой. Мы также допустим, что Γ является максимальной разрешимой подгруппой заданного класса. Понятно, что такое допущение не является ограничением. Пусть дальше

Σ — некоторый максимальный абелев нормальный делитель в Γ, содержащий предпоследний член нижнего ряда коммутантов группы Γ. Последнее свойство нужно для того, чтобы разрешимый класс фактор-групп Γ/Σ был меньше, чем класс самой группы Γ. Согласно теореме Клиффорда пространство G обладает прямым разложением

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_i + \ldots + G_m,$$

в котором все G_i Σ-допустимы, группа Σ неприводима относительно каждого G_i и, кроме того, все пары (G_i, Σ) эквивалентны между собой и являются точными парами. Обозначим через K линейную оболочку группы Σ и покажем, что K — поле.

Выберем в каждом G_i по одному элементу a_i. Так как пара (G_i, Σ) неприводима, то каждый раз имеем $G_i = a_i \circ K$. Из того, что K — коммутативная алгебра, следует, что K-аннулятор элемента a_i совпадает с ядром представления K относительно G_i. Эквивалентность всех пар (G_i, Σ) влечет эквивалентность пар (G_i, K). Следовательно, если идеал L из K аннулирует подпространство G_i, то он должен аннулировать и все пространство G. Такой идеал L равен нулю, и потому все пары (G_i, K) точны. Итак, K-аннуляторы элементов a_i равны нулю. Теперь можно утверждать, что все пары (G_i, K) эквивалентны регулярной паре (K, K). Но это означает также, что в K нет нетривиальных идеалов, и, следовательно, алгебра K является полем, так что векторное пространство G можно также рассматривать как m-мерное пространство над полем K.

Обозначим дальше через Σ^* мультипликативную группу поля K. Эта группа совпадает с Σ. Действительно, она содержит Σ, а с другой стороны, так как $\Sigma^*\Gamma$ — разрешимая группа такого же класса, как и Γ, то $\Sigma^* \subset \Gamma$. Ввиду максимальности Σ теперь имеем $\Sigma^* = \Sigma$.

С помощью формулы $\sigma^{-1}\gamma\sigma = \gamma \circ \sigma$, $\gamma \in K$, $\sigma \in \Gamma$, определим внутреннее представление группы Γ относительно поля K, и пусть Φ — ядро этого представления. Ясно, что Φ совпадает с централизатором в Γ подгруппы Σ. Покажем, что фактор-группа Γ/Φ конечна.

Понятно, что поле K является конечным алгебраическим расширением поля PE_n (E_n — единица в Γ) степени $r=\frac{n}{m}$. Так как все элементы из PE_n неподвижны относительно Γ, то по известному свойству групп автоморфизмов полей порядок группы Γ/Φ не превосходит числа r. Дальше будем доказывать, что и Φ/Σ — конечная группа.

Так как все элементы из Φ перестановочны с элементами из K, то нетрудно понять, что группу Φ можно рассматривать как группу автоморфизмов m-мерного векторного пространства G над полем K, т. е. как подгруппу в $CL(m, K)$. Этим замечанием мы сейчас воспользуемся.

Пусть теперь $\mathfrak{z}/\Sigma$ — некоторая инвариантная в Γ/Σ абелева подгруппа в Φ/Σ. Покажем, что эта группа конечна, и оценим ее порядок. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — представители k различных смежных классов группы $\mathfrak{z}/\Sigma$. Будем показывать, что, рассматривая их как элементы в m^2-мерном пространстве линейных операторов над полем K, мы получим линейно независимую систему. Допустим, что между этими элементами имеется некоторая линейная зависимость:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i=0.$$

Трансформируя здесь левую и правую части некоторым элементом $a\in\mathfrak{z}$, получим:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a^{-1}a_i a=0.$$

С другой стороны, $a^{-1}a_i a=\mu_i a_i$, $\mu_i\in K$, так что имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mu_i a_i=0.$$

Покажем дальше, что элемент a здесь можно подобрать таким образом, чтобы при $i\neq 1$ было $\mu_i\neq\mu_1$. Действительно, если бы при любом $a\in\mathfrak{z}$ было $\mu_i=\mu_1$, то элемент $a_i^{-1}a_1$ был бы перестановочен с каждым таким a. В силу определения Σ это означало бы, что

$a_i^{-1}a_1 \in \Sigma$. Но это противоречит выбору элементов a_i. Пусть теперь a выбрано в соответствии с отмеченным свойством. Для такого a имеем:

$$\sum_{i=2}^{k} (\lambda_i \mu_i - \lambda_i \mu_1)\, a_i = 0.$$

Теперь уже получилось, что и элементы $a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы. Проводя так дальнейшие сокращения, мы, очевидно, придем к противоречию. Отсюда следует, что порядок группы $\mathfrak{z}/\Sigma$ не превосходит размерности линейной оболочки над K группы $\mathfrak{z}$. Можно даже проверить, что здесь будет равенство. Таким образом, порядок группы $\mathfrak{z}/\Sigma$ ограничен числом m^2.

Допустим теперь, что $\mathfrak{z}/\Sigma$ — максимальная инвариантная в Γ/Σ абелева подгруппа в Φ/Σ, и Σ' — централизатор $\mathfrak{z}$ в Φ. Из общих рассмотрений п. 5.3.4 следует, что этот централизатор содержится в $\mathfrak{z}$ и потому совпадает с Σ, так что Φ/Σ можно рассматривать как группу автоморфизмов группы $\mathfrak{z}$. Пусть Φ' — совокупность всех элементов из Φ, действующих тождественно в фактор-группе $\mathfrak{z}/\Sigma$. Так как $\mathfrak{z}/\Sigma$ — конечная группа порядка $\leqslant m^2$, то Φ/Φ' — также конечная группа, и ее порядок ограничен числом $m^2!$. Кроме того, Φ'/Σ — абелев нормальный делитель в Φ/Σ, и, по предыдущему, его порядок ограничен числом m^2. В итоге мы получаем, что абелева подгруппа Σ имеет конечный индекс в Γ и этот индекс ограничен числом $m^2 (m^2)! \frac{n}{m}$.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть Γ — разрешимая подгруппа в $CL(n, P)$ и пусть вначале она неприводима. Покажем, что каждый максимальный абелев нормальный делитель из Γ имеет в Γ конечный индекс, и оценим этот индекс. Если Γ импримитивна, то согласно теореме 3.2.3.2 эта группа содержит примитивную подгруппу Γ' индекса $\leqslant n!$. В свою очередь, в Γ' имеется абелев нормальный делитель Σ', индекс которого ограничен некоторым $k(n)$. Теперь ясно, что и в Γ имеется абелев нормальный делитель Σ, индекс которого ограничен числом, зависящим от n.

И, наконец, пусть Γ приводима и пусть ряд

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \ldots \subset G_s = G$$

является Г-композиционным рядом в G. Обозначим через Γ_i группу автоморфизмов, индуцируемую группой Г в фактор-пространстве G_{i+1}/G_i, и пусть еще $\mathfrak{z}$ — Г-централизатор приведенного ряда. Из предыдущего и из теоремы Ремака следует, что в группе $\Gamma/\mathfrak{z}$, изоморфной подпрямому прозведению неприводимых групп Γ_i, имеется подгруппа $\Phi/\mathfrak{z}$ конечного индекса i, ограниченного некоторым числом $\rho(n)$, зависящим только от n, и абелева. Ясно, что Φ' — стабильная группа. Теорема доказана.

Что касается числа $\rho(n)$, то в работе Д. А. Супруненко [3] рассмотрены для него более точные оценки.

Покажем дальше, что если основное поле P является алгебраически замкнутым, то нормальный делитель Ф приводится к совместному треугольному виду. Достаточно рассмотреть случай неприводимой группы Г. В этом случае нормальный делитель Ф вполне приводим, а так как он абелев, то все его неприводимые части одномерны. Следовательно, Ф — диагональная группа, что и требовалось.

Отметим еще одно уточнение основной теоремы, указанное В. С. Чариным.

2.3. *Если* Г — *разрешимая матричная группа над полем рациональных чисел, то в ней имеется стабильный нормальный делитель* Ф, *фактор-группа по которому есть конечное расширение свободной абелевой группы.*

Это уточнение получается за счет соответствующего свойства мультипликативной группы конечного алгебраического расширения поля рациональных чисел.

Докажем дальше уже сформулированную в предыдущем параграфе теорему 3.1 А. И. Мальцева: *разрешимая группа автоморфизмов абелевой группы с конечным числом образующих является нетеровой группой.*

Понятно, что достаточно ограничиться случаем, когда абелева область действия G есть группа без кручения. В этом случае группа автоморфизмов Г представима матрицами над полем рациональных чисел, а тот факт, что G имеет конечное число образующих, означает, что все матрицы можно считать целочисленными и с определителем, равным ± 1. Предыдущие рассмотрения показывают, что достаточно ограничиться случаем абелевой группы Г.

Итак, пусть Г — абелева матричная группа с целочисленными элементами и с определителем, равным ± 1. Нужно показать, что Г имеет конечное число образующих. Возьмем (ср. доказательство теоремы 1.6) в Г некоторое конечное множество элементов σ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, порождающих линейно линейную оболочку группы Г. Если присоединить к полю рациональных чисел характеристические корни всех σ_i и новое поле обозначить через P, то в этом P все σ_i приводятся к совместному треугольному виду. При этом к совместному треугольному виду будет приведена и вся группа Г. Если σ — элемент этой треугольной группы, то на главной диагонали этого элемента стоят его характеристические корни, а эти корни являются целыми элементами поля P. С другой стороны, так как все определители равны ± 1, то на главной диагонали здесь будут стоять только единицы поля P. Учитывая, что P есть конечное расширение поля рациональных чисел, мы можем воспользоваться теоремой Дирихле, согласно которой группа единиц поля P имеет конечное число образующих. Отсюда следует, что если Ф — стабильная часть группы Г, то Г/Ф — группа с конечным числом образующих. Согласно теореме 8.1.2.3 Ф также имеет конечное число образующих. Следовательно, и Г имеет конечное число образующих.

Две другие теоремы (3.2 и 3.3) непосредственно следуют из теоремы 2.1.

3. Нильпотентные матричные группы. Приводимые в этом пункте теоремы принадлежат Д. А. Супруненко, М. С. Гаращуку и В. П. Платонову (см. литературу). Из отмеченной в предыдущем пункте теоремы Цасенхауза следует, что во всякой матричной группе имеется локально разрешимый радикал и этот радикал разрешим. По поводу локально нильпотентного радикала докажем следующую теорему.

3.1. *Во всякой матричной группе* Г *локально нильпотентный радикал* $R(\Gamma)$ *совпадает с множеством всех нильэлементов группы.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если Г — матричная группа и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ — некоторое конечное множество ее нильэлементов, то под-

группа, порожденная этим множеством, нильпотентна. Пусть Σ — такая подгруппа. Согласно теореме Мальцева из п. 4.2.3 группа Σ обладает двойственной локальной системой нормальных делителей Σ_α, таких, что все Σ/Σ_α — конечные группы, допускающие точное матричное представление одной и той же степени, скажем n. Так как Σ/Σ_α — конечная группа, порожденная ниль-элементами, то согласно теореме 5.4.1.4 она нильпотентна и, в частности, разрешима. Итак, все Σ/Σ_α — разрешимые группы, причем их разрешимые классы ограничены некоторым $k(n)$. Отсюда следует, что и вся группа Σ разрешима. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 5.4.1.7, согласно которой, в частности, в разрешимой группе множество нильэлементов есть локально нильпотентная подгруппа.

3.2. *Всякая матричная локально нильпотентная группа обладает возрастающим центральным рядом.*

Ввиду теоремы Цасенхауза (п. 8.2.2) достаточно рассмотреть случай неприводимой группы. Итак, пусть Γ — неприводимая локально нильпотентная группа. Так как такая группа необходимо разрешима, то в Γ имеется абелев нормальный делитель Φ конечного индекса. Возьмем теперь внутреннюю групповую пару (Φ, Γ) и ее фактор-пару $(\Phi, \Gamma/\Phi)$. Обе эти пары локально стабильны, а так как Γ/Φ — конечная группа и Φ абелева, то эти пары стабильны. Это означает, что в группе Γ имеется возрастающий центральный ряд, и теорема доказана.

Заметим еще, что в том частном случае, когда основным полем служит поле рациональных чисел, можно даже утверждать, что локально нильпотентная группа Γ нильпотентна.

Действительно, согласно замечанию В. С. Чарина 2.3, можно считать, что Φ есть группа без кручения. Но тогда ввиду 7.3.1.1 эта подгруппа содержится в центре неприводимой группы Γ. Дальнейшее очевидно.

3.3. *Всякая энгелева матричная группа нильпотентна.*

Снова ограничиваемся неприводимым случаем. Если Γ — энгелева группа, то она локально нильпотентна, и в неприводимом случае в Γ имеется абелев нормальный делитель Φ конечного индекса. Как и раньше, рассмот-

рим пару (Ф, Г/Ф). Из энгелевости следует, что все элементы из Г действуют в Ф финитно стабильно. Ввиду теоремы 7.2.3.4 сама конечная группа Г/Ф финитно стабильна относительно Ф. Это означает, что в Г имеется конечный центральный ряд. Теорема доказана.

Приведем теперь одну теорему об унипотентных элементах. Как мы знаем, во всякой локально нильпотентной линейной группе унипотентные элементы образуют подгруппу. Мы докажем теперь следующую теорему:

3.4. *Во всякой разрешимой матричной группе над полем нулевой характеристики унипотентные элементы образуют подгруппу (совпадающую с радикалом* $\gamma(\Gamma)$*).*

Пусть Г — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. В таком случае, как нетрудно понять, каждый унипотентный элемент из Г является элементом бесконечного порядка. Можно также предполагать, что основное поле является алгебраически замкнутым. Возьмем в области действия G Г-композиционный ряд

$$0 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \ldots \subset G_m = G.$$

Г-централизатор этого ряда совпадает с радикалом $\gamma(\Gamma)$. Нам нужно показать, что каждый унипотентный элемент из Г принадлежит $\gamma(\Gamma)$.

Допустим, что σ — унипотентный элемент в Г, и пусть этот элемент не принадлежит $\gamma(\Gamma)$. Это значит, что найдется такой фактор G_{i+1}/G_i, что элемент σ действует в этом фактор-пространстве не тривиально. Перейдем теперь к группе Γ_i, индуцируемой группой Г в G_{i+1}/G_i, и пусть $\bar{\sigma}$ — образ элемента σ в этой группе. Ясно, что $\bar{\sigma}$ — также унипотентный элемент. В группе Γ_i имеется диагональный нормальный делитель Φ_i конечного индекса. Этот Φ_i, конечно, не содержит неединичных унипотентных элементов. Легко видеть, что степени унипотентных элементов также являются унипотентными элементами. Следовательно, никакая степень элемента $\bar{\sigma}$ не может принадлежать Φ_i. Но здесь мы сразу приходим к противоречию с тем, что $\bar{\sigma}$ — элемент бесконечного порядка и Φ_i имеет конечный индекс в Γ_i.

Нетрудно убедиться, что аналогичная теорема для полей ненулевой характеристики уже неверна.

Приведем дальше несколько замечаний относительно полной приводимости. Вначале отметим следующее хорошо известное предложение:

3.5. *Матричная группа* Γ *тогда и только тогда вполне приводима, когда ее линейная оболочка является полупростой алгеброй.*

Допустим вначале, что линейная оболочка $\langle\Gamma\rangle = \mathfrak{A}$ является полупростой алгеброй. Как известно (см., например, Ван дер Варден [2]), такая алгебра обладает вполне приводимым регулярным представлением. Но тогда $\mathfrak{A}$, а вместе с ней и Γ вполне приводимы и относительно области действия G. Пусть теперь Γ вполне приводима относительно G. Тогда и алгебра $\mathfrak{A}$ вполне приводима. Очевидно, что радикал вполне приводимой алгебры равен нулю, и следовательно, $\mathfrak{A}$ — полупростая алгебра.

Как известно, если основное поле алгебры имеет нулевую характеристику и если алгебра полупроста, то это ее свойство не теряется при переходе к конечному алгебраическому расширению основного поля. Отсюда и из доказанного сейчас свойства следует, что если матричная группа Γ вполне приводима и основное поле имеет нулевую характеристику, то Γ остается вполне приводимой и при соответствующем расширении основного поля. Нетрудно также понять, что если группа Γ вполне приводима в некотором расширении основного поля, то такая группа вполне приводима и в исходном поле.

Назовем, далее, элемент σ матричной группы *вполне приводимым*, если вполне приводима порожденная этим элементом циклическая подгруппа. Из предыдущих замечаний, в частности, видно, что при нулевой характеристике элемент σ тогда и только тогда вполне приводим, когда в некотором расширении основного поля можно подобрать базис, в котором этот элемент принимает диагональный вид.

Докажем теперь, что если группа Γ локально нильпотентна и вполне приводима, то все ее элементы также вполне приводимы. Пусть σ — произвольный эле-

мент в Γ. Этот элемент можно включить в некоторую подгруппу Σ, имеющую конечное число образующих и такую, что линейная оболочка Σ совпадает с линейной оболочкой всей группы Γ. Ясно, что вместе с Γ подгруппа Σ вполне приводима. Так как Σ — нильпотентная группа, то циклическая подгруппа $\{\sigma\}$ достижима в Σ. Теперь из теоремы Клиффорда следует, что эта циклическая подгруппа также вполне приводима. Итак, все элементы из Γ вполне приводимы. Для полей нулевой характеристики справедливо и обратное. В действительности имеет место следующая интересная теорема (Супруненко — Тышкевич [1]):

3.6. *Во всякой локально нильпотентной матричной группе* Γ *над совершенным полем множество всех вполне приводимых элементов составляет инвариантную подгруппу* Φ. *Эта подгруппа сама вполне приводима и содержит каждую вполне приводимую подгруппу из* Γ.

Подгруппу Φ естественно назвать вполне приводимой частью группы Γ. Так как пересечение $\Phi \cap \gamma(\Gamma)$ совпадает с единицей, то подгруппа, порожденная Φ и $\gamma(\Gamma)$, является прямым произведением этих подгрупп. Это произведение может, конечно, не совпадать с Γ, однако каждая локально нильпотентная группа Γ содержится в некоторой такой расщепляемой локально нильпотентной группе. Мы не приводим здесь доказательство теоремы 3.6, так как это доказательство использует некоторые специальные сведения о расщеплениях линейных операторов. Заметим только, что в указанной работе Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич используется тонкая матричная техника и было бы полезно попытаться еще рассмотреть операторную природу приводимых там конструкций.

Приведем теперь несколько заключительных замечаний к этому и предыдущему пунктам. Как мы видели, во всякой матричной группе имеется разрешимый радикал, а из теоремы 3.3 следует также, что имеется и нильпотентный радикал — максимальный нильпотентный нормальный делитель. Кроме того, всякая локально разрешимая матричная группа разрешима, а в поле рациональных чисел каждая локально нильпотентная группа нильпотентна и каждая локально конечная

группа конечна. В связи с этим естественно возникает вопрос: в какой мере эти факты можно охватить некоторыми общими предложениями о примитивных или локально примитивных классах линейных групп?

Большой цикл задач относится к обобщениям известных теорем о матричных группах над полями на группы над кольцами и телами. Отметим, в частности, следующие факты, относящиеся к матричным группам над коммутативным кольцом с единицей. Во всякой такой группе имеется локально разрешимый радикал (А. И. Токаренко), который не обязательно разрешим (Д. А. Супруненко [7]). Локально нильпотентный радикал каждой такой группы совпадает с множеством ее нильэлементов, а периодичность в этой ситуации влечет локальную конечность (В. П. Платонов, А. И. Токаренко). Доказательства этих теорем редуцируются к случаю полей общими приемами, отмечавшимися в п. 4.1.2.

4. Обобщения на бесконечномерный случай. Этот пункт посвящен локально конечномерным линейным группам, уже рассматривавшимся в § 4.3. Прежде всего заметим, что из соответствующих результатов, относящихся к конечномерному случаю, непосредственно выводится следующая теорема:

4.1. *Во всякой локально конечномерной линейной группе имеется локально разрешимый радикал, являющийся строгим радикалом. Локально нильпотентный радикал такой группы совпадает с множеством всех ее нильэлементов.*

Что касается основной теоремы о разрешимых группах, то она переносится на локально конечномерный случай следующим образом (А. Е. Залесский [1]):

4.2. *Всякая локально конечномерная локально разрешимая линейная группа* Γ *содержит такую инвариантную подгруппу* Φ, *что* Γ/Φ — *периодическая группа и коммутант* Φ' *принадлежит радикалу* $\gamma(\Gamma)$.

Доказательство этой теоремы основано на тех же идеях, что и доказательство теоремы 2.1. Только при этом понятия, связанные с внешним действием группы, переводятся предварительно на внутренний язык ее

линейной оболочки. Кроме того, для доказательства периодичности фактор-группы Г/Ф (в конечномерном случае соответствующая фактор-группа конечна) применяется следующая полезная лемма.

Пусть M и H — мультипликативные полугруппы в алгебраической алгебре L, и допустим, что для любых $m \in M$ и $h \in H$ имеются такие числа i и j, что $h^i m^j = m^j h^i$. Через H_0 обозначим множество всех $h_0 \in H$ таких, что для всякого $m \in M$ имеется такое k, при котором $h_0 m^k = m^k h_0$. H_0 — подполугруппа в H, а если H — группа, то и H_0 — группа — подгруппа в H. Лемма утверждает, что для каждого $h \in H$ существует подходящий показатель i, такой, что $h^i \in H_0$. Если, в частности, H — группа, и для всякого $h \in H$ выполняется включение $h^{-1}Mh \subset M$, то H_0 — нормальный делитель в H с периодической фактор-группой H/H_0. Если, далее, M_0 — M-централизатор подполугруппы H_0, то для всякого $m \in M$ существует показатель k, при котором $m^k \in M_0$.

С помощью этой же леммы может быть доказана и следующая теорема:

4.3. *Если* Г — *локально нильпотентная линейная группа, состоящая из алгебраических элементов и полупростая, то фактор-группа этой группы по ее центру является периодической группой.*

Отметим еще следующую теорему (из той же работы А. Е. Залесского):

4.4. *Если* Г — *локально конечномерная локально разрешимая линейная группа над полем нулевой характеристики, то ее* γ*-радикал совпадает с множеством всех унипотентных элементов.*

5. Существование точных представлений. Вопрос о существовании точных конечномерных представлений для периодических и абелевых групп исследован А. И. Мальцевым в работе [3]. Приведем по этому поводу две теоремы из указанной работы.

5.1. *Для того чтобы абелева группа* Г *могла быть представлена изоморфно матрицами степени* n *над некоторым полем нулевой характеристики, необходимо и достаточно, чтобы ее периодическая часть имела ранг не более* n. *Для того чтобы аналогичная представимость*

была возможна над некоторым полем характеристики $p>0$, *необходимо и достаточно, чтобы p-компонента периодической части группы* Γ *разлагалась в прямое произведение циклических групп порядка* $\leqslant p^s$, *а все остальные примарные компоненты имели ранг не более* $n-s$.

5.2. *Для того чтобы периодическая группа* Γ *могла быть точно представлена матрицами над некоторым полем нулевой характеристики, необходимо и достаточно, чтобы она имела представимый абелев нормальный делитель конечного индекса.*

Необходимость в этой теореме следует из теоремы Шура 1.5, а достаточность содержится в следующем утверждении, являющемся частным случаем одного предложения в конце п. 2.1.4: если группа Γ содержит представимый нормальный делитель конечного индекса, то и сама группа Γ представима.

Для полей простой характеристики указанные здесь условия являются, конечно, достаточными, но они не необходимы, так что в этом случае исчерпывающего решения вопроса пока нет. В качестве необходимого условия можно лишь напомнить, что периодическая матричная группа всегда локально конечна.

Отметим, далее, следующую теорему В. С. Чарина [1]:

5.3. *Всякая нильпотентная группа без кручения конечного ранга допускает точнсе конечномерное представление над полем рациональных чисел. Это представление может быть выбрано таким образом, чтобы все матрицы имели специальный треугольный вид.*

Ряд работ посвящен условиям точной представимости разрешимых групп, однако полного решения здесь пока нет. Как заметил недавно Д. М. Смирнов [6], свободные разрешимые группы разрешимого класса $\geqslant 3$ не допускают точного матричного представления ни над каким полем. Это, в частности, означает, что класс матрично представимых групп не замкнут относительно расширений, и поэтому было бы интересно выделить некоторые специальные типы расширений, для которых подобная замкнутость имеет место. В этой же работе Д. М. Смирнова показано, что свободная двуступенно разрешимая группа представима конечными матрицами

над некоторым чисто трансцендентным расширением поля рациональных чисел.

В заключение отметим, что большой интерес представляет нахождение условий точной локально конечномерной представимости групп. Верно ли, например, что каждая локально нильпотентная группа без кручения допускает такое представление?

В связи с рассмотрениями этого пункта см. еще работу Ф. Холла [3].

§ 3. ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

1. Исходные замечания. Допустим, что G — некоторая группа, Γ — группа ее автоморфизмов, $[H_\alpha]$ — некоторый возрастающий нормальный ряд в G из Γ-допустимых подгрупп и, наконец, Σ — Γ-централизатор этого ряда. Σ является стабильной и, следовательно, Z-группой, а Γ/Σ — подпрямое произведение групп автоморфизмов Γ_α, индуцируемых группой Γ в факторах указанного ряда. Допустим далее, что ряд $[H_\alpha]$ есть верхний радикальный ряд группы G и, если группа G не является радикальной группой, то $H_{\gamma-1}$ совпадает с верхним радикалом $\tilde{R}(G)$, а $H_\gamma = G$. В таком случае, поскольку Σ действует тождественно как в радикале $R(G)$, так и в $G/R(G)$, этот Γ-централизатор оказывается абелевой группой. Все Γ_α, за исключением $\Gamma_{\gamma-1}$, являются группами автоморфизмов локально нильпотентных групп, а $\Gamma_{\gamma-1}$ — группа автоморфизмов полупростой группы. Таким образом, мы видим, что основной интерес должен быть сосредоточен на группах автоморфизмов локально нильпотентных групп и на группах автоморфизмов полупростых групп. Пока здесь сделано очень мало *).

Если группа G является W-группой, то полупростая группа $G/\tilde{R}(G)$ оказывается F-полупростой группой, а о группах автоморфизмов последних некоторые сведения мы имеем.

---

*) Напомним еще, что согласно теоремам 4.1.4.1 и 4.3.4.3, если G — радикальная группа и ее автоморфизм σ действует тождественно в радикале $R(G)$, то σ действует тождественно и в $G/R(G)$.

Действительно, если G — F-полупростая группа и $H = B(G)$ — ее вполне приводимый радикал, то, в силу п. 5.1.4, H точно приводит группу автоморфизмов $\mathfrak{A}(G)$, так что $\mathfrak{A}(G)$ есть подгруппа в $\mathfrak{A}(H)$. Строение последней описывается теоремой из п. 3.2.4.

Имея в виду теперь радикальные группы, предположим, что G — такая группа, причем еще конечного ранга. В этом случае в G имеется возрастающий ряд характеристических подгрупп с абелевыми факторами конечных рангов, группы автоморфизмов которых являются конечномерными линейными группами. Поэтому вся группа Γ оказывается расширением Z-группы с помощью подпрямого произведения матричных групп.

2. Группы автоморфизмов разрешимых A_i-групп. Первые результаты о группах автоморфизмов разрешимых A_i-групп принадлежат Д. М. Смирнову. Некоторые из этих результатов уже приводились в п. 8.1.2. Здесь будут изложены другие результаты, принадлежащие Д. М. Смирнову и В. С. Чарину.

В доказательствах используются приведенные в предыдущем параграфе теоремы о разрешимых матричных группах. В действительности приводимые ниже результаты являются обобщениями соответствующих свойств матричных групп.

Как уже отмечалось, всякая локально разрешимая группа матриц над произвольным полем разрешима. Опираясь на этот факт, докажем сейчас следующую теорему:

2.1. *Всякая локально разрешимая группа автоморфизмов* Γ *разрешимой* A_3*-группы* G *разрешима.*

Пусть G и Γ удовлетворяют условиям теоремы и пусть в группе G задан конечный ряд характеристических подгрупп

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_i \subset G_{i+1} \subset \ldots \subset G_n = G,$$

каждый фактор которого является прямым произведением конечного числа квазициклических групп (по одному p), или конечная абелева группа, или абелева группа без кручения конечного ранга. Пусть Σ — Γ-централизатор указанного ряда и Γ_i — группа автомор-

физмов, индуцируемая группой Γ в факторе G_{i+1}/G_i. Все Γ_i — разрешимые группы (п. 2.2), а в силу теоремы Ремака (см. п. 1.1.3), отсюда следует, что и Γ/Σ — разрешимая группа. Так как Σ — нильпотентная группа, то теперь уже ясно, что Γ — разрешимая группа.

Из этой теоремы непосредственно следует, что во всякой группе автоморфизмов разрешимой A_3-группы имеется разрешимый радикал.

Заметим, что пока неизвестно, верна ли теорема, аналогичная теореме 2.1, для произвольной разрешимой группы G конечного ранга. Тем более неизвестно, как обстоит дело в неразрешимом случае.

2.2. *Всякая разрешимая группа автоморфизмов* Γ *разрешимой нетеровой группы* G *также является нетеровой группой.*

В группе G имеется конечный ряд характеристических подгрупп с нетеровыми абелевыми факторами. Пусть

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset H_n = G$$

— такой ряд и Σ — его Γ-централизатор. Согласно теореме 8.1.2.3 Σ — нильпотентная нетерова группа, а из теоремы 1.3.1 и теоремы Ремака о подпрямых произведениях следует, что и Γ/Σ — нетерова группа, так что Γ — нетерова группа.

Следующая теорема связана с теоремой о разрешимых матричных группах.

2.3. *Разрешимая группа автоморфизмов* Γ *разрешимой* A_3*-группы* G *содержит подгруппу конечного индекса, коммутант которой является финитно стабильной группой.*

Пусть группы Γ и G удовлетворяют условиям теоремы и пусть $[G_i]$ — такой же, как и в теореме 2.1, ряд в группе G. Из соответствующей матричной теоремы следует, что в группе Γ имеется подгруппа конечного индекса Φ_i, коммутант которой действует финитно стабильно в G_{i+1}/G_i. Пусть Φ — пересечение всех Φ_i. Φ имеет конечный индекс в Γ, и коммутант Φ' этой группы действует финитно стабильно во всех G_{i+1}/G_i. Следовательно, Φ' — финитно стабильная относительно G группа. Такая группа нильпотентна.

Используя результат В. С. Чарина 2.2.3, теорему 2.3 в том случае, когда G есть разрешимая A_4-группа,

можно следующим образом уточнить: в группе Г имеется такой финитно стабильный нормальный делитель Ф, что фактор-группа Г/Ф есть конечное расширение свободной абелевой группы (не более чем счетного ранга).

Отметим еще, что если в теореме 2.3 отказаться от конечности ряда $[G_i]$ и предполагать, что это вообще бесконечный ряд характеристических подгрупп, все факторы которого абелевы и конечных, ограниченных в совокупности рангов, то в (локально разрешимой) группе Г имеется такая инвариантная подгруппа Ф, что Г/Ф есть подпрямое произведение конечных групп, ограниченных в совокупность порядков, и коммутант Ф′ является стабильной относительно G группой. Доказательство этого свойства ничем не отличается от доказательства предыдущей теоремы.

Приведем теперь две теоремы о периодических группах автоморфизмов.

2.4. *Всякая периодическая группа автоморфизмов* Г *разрешимой A_4-группы G конечна.*

Пусть ряд $[G_i]$ есть конечный ряд в G из характеристических подгрупп, все факторы которого либо конечны, либо абелевы группы без кручения конечных рангов. Пусть еще Σ — Г-централизатор такого ряда и Γ_i — группы автоморфизмов, индуцируемые группой Г в факторах заданного ряда. Согласно теореме 2.1.6 все Γ_i — конечные группы. Следовательно, и Γ/Σ — конечная группа. Но по теореме 8.1.2.6 группа Σ также конечна, так что Г — конечная группа.

Дальше нам понадобится следующая лемма:

2.5. *Периодическая группа автоморфизмов* Г *прямого произведения конечного числа групп типа p^∞ является конечной группой.*

Можно считать, что все квазициклические слагаемые области действия G принадлежат одному простому числу p. В таком случае группа Г изоморфно представима матрицами над полем p-адических чисел. Согласно теореме Шура (2.1.5), если группа Г периодическая, то в ней имеется абелев нормальный делитель конечного индекса. Поэтому дальше мы можем ограничиться случаем, когда Г — периодическая и абелева. Пусть

$$G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_r$$

— разложение группы G в прямое произведение r групп типа p^{∞} (по одному и тому же p). Обозначим $G_n = G[p^n]$ и $H_i^{(n)} = H_i[p^n]$. Имеем:

$$G_n = H_1^{(n)} \times H_2^{(n)} \times \ldots \times H_r^{(n)}.$$

Каждая подгруппа $H_i^{(n)}$ есть циклическая подгруппа порядка p^n, и следовательно, порядок G_n равен p^{nr}. Мы имеем возрастающий ряд

$$G_0 = E \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots \quad \bigcup_n G_n = G,$$

причем порядки всех факторов G_n/G_{n-1} одинаковы и равны p^r. Обозначим далее: $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_\Gamma(G_n)$, $\Sigma_n = \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}_n}(G_{n+1}/G_n)$. Ясно, что $\mathfrak{z}_n/\Sigma_n$ изоморфна некоторой подгруппе из $\mathfrak{A}(G_{n+1}/G_n)$, и поэтому порядок этой фактор-группы является делителем числа $(p^r)!$. Кроме того, точно такими же рассуждениями, которые применялись в доказательстве теоремы 8.1.2.3, устанавливается, что фактор-группа $\Sigma_n/\mathfrak{z}_{n+1}$ изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения r копий группы G_n. Следовательно, порядок фактор-группы $\Sigma_n/\mathfrak{z}_{n+1}$ является делителем числа p^{nr^2}. Таким образом, порядок фактор-группы $\mathfrak{z}_n/\mathfrak{z}_{n+1}$ является делителем числа $(p^r)!\ p^{nr^2}$. Это еще означает, что все простые делители порядков элементов из $\mathfrak{z}_n/\mathfrak{z}_{n+1}$ являются делителями числа $p^r!$. Отсюда в свою очередь следует, очевидно, что группа Γ распадается в прямое произведение лишь конечного числа примарных компонент. Согласно теореме 2.5.1 каждая такая примарная компонента удовлетворяет условию минимальности, а следовательно, и вся группа Γ удовлетворяет условию минимальности. Поскольку все $\mathfrak{z}_n$ составляют убывающую последовательность, то при некотором n $\mathfrak{z}_n = E$. Этим доказана конечность группы Γ.

2.6. *Всякая периодическая группа автоморфизмов* Γ *разрешимой A_3-группы G является конечным расширением абелевой A_3-группы.*

Пусть G — разрешимая A_3-группа и $R(G)$ — ее локально нильпотентный радикал. В $R(G)$ имеется разрешимый ряд

$$E = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset H_k = R(G),$$

все члены которого инвариантны в G и все факторы либо конечны, либо без кручения, либо прямые произведения конечного числа квазициклических групп. Пусть S_i — G-централизатор фактора H_{i+1}/H_i, и $S = \bigcap_i S_i$. Подгруппа S принадлежит $R(G)$ и нильпотентна. Согласно предыдущему, в каждой группе G/S_i все периодические подгруппы конечны, и следовательно, все G/S_i являются разрешимыми A_4-группами. Таким образом, и G/S — разрешимая A_4-группа.

Пусть, далее, P — максимальная полная подгруппа периодической части в S. Ясно, что S/P — нильпотентная A_4-группа, а так как и G/S — (разрешимая) A_4-группа, то G/P — разрешимая A_4-группа.

Пусть теперь Γ — периодическая группа автоморфизмов группы G, и Σ — Γ-централизатор ряда $E \subset P \subset G$. Согласно 2.4 и 2.5 группа Γ действует в P и в G/P как конечная группа, так что и Γ/Σ — конечная группа. Ясно также, что Σ абелева. Тот факт, что Σ является A_3-группой, устанавливается уже применявшимися ранее методами. Мы не будем это проделывать. Отметим лишь, что вся группа Σ может быть и бесконечной. Приведем теперь следующую теорему:

2.7. *Пусть G — разрешимая A_4-группа и Γ — ее локально нильпотентная группа автоморфизмов. Такая группа Γ нильпотентна и периодическая часть в Γ конечна.*

Пусть

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_i \subset \ldots \subset G_n = G$$

— ряд в G, состоящий из характеристических подгрупп, и все его факторы или конечны, или абелевы группы без кручения конечного ранга. Через Σ обозначим Γ-централизатор этого ряда, и пусть Γ_i — группа автоморфизмов, индуцируемая группой Γ в i-м факторе ряда. Согласно теореме 8.1.2.6 группа Σ является нильпотентной A_4-группой. Но тогда внутренняя пара (Σ, Γ) финитно стабильна. Следовательно, наша теорема будет доказана, если будет установлено, что все Γ_i нильпотентны и периодические части в этих группах конечны. Нужно рассмотреть только тот случай, когда Γ_i — бесконечная группа.

Такая группа Γ_i представима матрицами над полем рациональных чисел, и отсюда уже следует, что периодическая часть в Γ_i конечна. Кроме того, мы знаем, что локально нильпотентная матричная группа над полем рациональных чисел всегда нильпотентна.

Этим завершается доказательство теоремы.

Легко заметить, что ранг группы Γ может быть и бесконечным: достаточно сослаться на пример группы автоморфизмов аддитивной группы рациональных чисел — такая группа изоморфна мультипликативной группе поля рациональных чисел.

Отметим еще, что некоторые теоремы этого пункта легко обобщаются на случай, когда группа G «почти разрешима» в том смысле, что среди факторов нормальных рядов, кроме абелевых, могут быть еще произвольные конечные (см. работу Д. М. Смирнова [3] и в настоящей книге п. 8.1.2).

3. Полные группы автоморфизмов. В ряде случаев полезно отдельно рассматривать полные группы автоморфизмов. При этом под полной группой мы понимаем здесь группу, в которой из каждого элемента можно извлекать корень произвольной степени. Исследованию полных групп автоморфизмов посвящена работа В. С. Чарина [3]. Приведем некоторые результаты этой работы. Из этих результатов, в частности, видно, что такое внутреннее свойство, как полнота группы, часто влечет ее внешнюю нильпотентность в представлениях.

3.1. *Полная группа автоморфизмов* Γ *разрешимой группы конечного ранга финитно стабильна* (*и, следовательно, нильпотентна*).

Вначале заметим, что полная группа автоморфизмов периодической абелевой группы конечного ранга состоит лишь из единичного элемента. Действительно, пусть G — периодическая абелева группа конечного ранга и пусть Γ — некоторая ее группа автоморфизмов. В группе G для каждого n имеется лишь конечное число элементов порядка n, так что если $g \in G$, то множество $g \circ \Gamma$ конечно и порожденная им подгруппа H также конечна. Но тогда конечной будет и фактор-группа $\Gamma/\mathfrak{z}_\Gamma(H)$. Если теперь Γ — полная группа, то последнее возможно лишь

в том случае, когда $\mathfrak{z}_{\Gamma}(H)=\Gamma$. Следовательно, группа Γ действует в G тривиально, и $\Gamma=E$.

Теперь докажем теорему. В группе G имеется конечный разрешимый ряд характеристических подгрупп, все факторы которого периодические или без кручения. Пусть $[G_i]$ — такой ряд, и $\mathfrak{z}_i$ — Γ-централизатор фактора G_{i+1}/G_i. Согласно предыдущему замечанию, если G_{i+1}/G_i — периодическая группа, то $\mathfrak{z}_i=\Gamma$. Если этот фактор является группой без кручения, то $\Gamma/\mathfrak{z}_i$ можно рассматривать как полную матричную группу над полем рациональных чисел, и нетрудно понять, что все характеристические корни элементов такой группы равны единице. Теперь из теоремы Колчина следует, что группа Γ действует финитно стабильно в G_{i+1}/G_i, так что во всех случаях Γ финитно стабильна относительно факторов ряда $[G_i]$, и это означает, что Γ — финитно стабильная группа.

3.2. *Полная группа автоморфизмов локально разрешимой группы конечного ранга стабильна.*

Пусть G — локально разрешимая группа конечного ранга. Покажем, что $G/R(G)$ — разрешимая группа. Так как G имеет конечный ранг, то существует ряд

$$E=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_\alpha\subset\ldots\subset H_\gamma=R(G),$$

состоящий из нормальных делителей группы G, центральный в G и такой, что все его факторы либо элементарные абелевы, либо абелевы группы без кручения, причем ранги всех этих факторов ограничены рангом r группы G. Пусть Σ — G-централизатор этого ряда и Γ_i — группа автоморфизмов, индуцируемая группой G в фактор-группе $H_{\alpha+1}/H_\alpha$. Каждая группа Γ_i разрешима, и длины убывающих рядов коммутантов во всех этих группах ограничены некоторым числом, зависящим лишь от r; обозначим это число через $f(r)$. Следовательно, и G/Σ — разрешимая группа, причем длина убывающего ряда коммутантов в Γ/Σ ограничена числом $f(r)$. Теперь остается показать, что $\Sigma\subset R(G)$. Если бы группа G была радикальной, то это непосредственно следовало бы из п. 5.3.4, так как в таком случае радикал сильно ограничивает группу. Покажем, что группа G действительно является радикальной группой. Пусть $[G_\alpha]$ — ло-

кальная система из разрешимых подгрупп в G, и $G^{(k)}$, $k=f(r)$, — k-й член убывающего ряда коммутантов в G, а $G_\alpha^{(k)}$ — соответствующая подгруппа в G_α. Согласно предыдущему, все $G_\alpha^{(k)}$ локально нильпотентны и, кроме того, они составляют локальную систему в $G^{(k)}$, так что $G^{(k)}$ принадлежит радикалу $R(G)$, и G — радикальная группа.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Пусть Γ — полная группа автоморфизмов локально разрешимой группы конечного ранга G. Будем считать, что ряд $[H_\alpha]$ выбран так, — это сделать можно, — что все его члены характеристичны. Во всех факторах такого ряда Γ действует как стабильная группа. По предыдущей теореме и в $G/R(G)$ группа Γ действует стабильно. Следовательно, Γ — стабильная группа.

3.3. *Полная группа автоморфизмов разрешимой A_4-группы является нильпотентной группой конечного ранга и без кручения.*

Из предыдущего следует, что такая группа является нильпотентной A_4-группой. Значит, периодическая часть должна быть конечной, а ввиду полноты эта периодическая часть вырождается в единицу.

Приведем еще без доказательства следующее утверждение В. С. Чарина [3]:

3.4. *Пусть G — разрешимая группа типа A_3. Тогда полная группа Γ ее автоморфизмов является расширением полной абелевой группы Φ с помощью полной нильпотентной группы без кручения и конечного ранга. При этом ранг группы Φ может быть и бесконечным.*

4. Добавление об условиях конечности в группах. Раньше нам уже приходилось применять результаты о группах автоморфизмов к изучению абстрактных, внутренних свойств группы. Здесь будут приведены другие примеры таких применений.

4.1. *Если в радикальной группе локально нильпотентный радикал является нетеровой группой, то и вся группа нетерова.*

Пусть G — радикальная группа и ее радикал $R(G)$ нетеров. Рассмотрим внутреннюю пару $(R(G), G)$. Согласно теореме 2.1 фактор-группа $G/\mathfrak{z}(R(G))$ разрешима, а из теоремы 2.2 следует, что эта группа нетерова. Так

как радикал $R(G)$ содержит свой централизатор, то теперь ясно, что и G — нетерова группа.

4.2. *Если в периодической радикальной группе радикал удовлетворяет условию минимальности, то и вся группа удовлетворяет условию минимальности.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы, нужно лишь воспользоваться леммой 2.5.

4.3. *Если в радикальной группе G радикал $R(G)$ является разрешимой группой типа A_3, то в G имеется подгруппа конечного индекса, коммутант которой лежит в радикале. Такая группа G разрешима.*

Если исходить из внутренней пары $(R(G), G)$, то согласно теореме 2.3 в G имеется подгруппа конечного индекса H, коммутант которой H' действует в $R(G)$ финитно стабильно. Ввиду того, что радикал сильно ограничивает группу, необходимо $H' \subset R(G)$. Этим теорема доказана.

В ряде работ по абстрактным группам исследовалось влияние свойств абелевых подгрупп группы на свойства всей группы в целом. Все относящиеся сюда результаты основаны на свойствах групп автоморфизмов абелевых и разрешимых групп. Так, например, С. Н. Черников [1] доказал, что если в локально разрешимой группе все абелевы подгруппы удовлетворяют условию минимальности, то и вся группа удовлетворяет условию минимальности. А. И. Мальцевым [5] было показано, что нетеровость всех абелевых подгрупп разрешимой группы влечет нетеровость всей группы. Эти теоремы в дальнейшем обобщались в различных направлениях. Мы отметим сейчас некоторые из относящихся сюда результатов.

Определим вначале один подкласс класса W-групп. Группу G будем называть W_0-*группой*, если в ней имеется возрастающий нормальный ряд, все факторы которого локально нильпотентны или конечны. Согласно общей теореме п. 5.3.2 каждая W_0-группа является расширением радикальной группы с помощью F-полупростой W_0-группы. Нетрудно также понять, что вполне приводимый радикал F-полупростой W_0-группы является прямым произведением простых конечных групп.

С помощью разобранных раньше конструкций легко доказывается следующая теорема (Б. И. Плоткин [4]):

4.4. 1) *Если в W_0-группе все абелевы подгруппы конечны, то и сама группа конечна*; 2) *если в W_0-группе все абелевы подгруппы нетеровы, то нетерова и сама группа*; 3) *W_0-группа, в которой все абелевы подгруппы удовлетворяют условию минимальности, сама обладает этим свойством.*

Доказательства всех трех утверждений аналогичны, и мы ограничимся доказательством второго из них.

Пусть G — W_0-группа, в которой все абелевы подгруппы нетеровы. Согласно предыдущему, $R(G)$ — нетерова группа. Но теперь из теоремы 4.1 следует, что и верхний радикал $\tilde{R}(G)$ является нетеровой группой. Остается показать, что фактор-группа $G/\tilde{R}(G)$ является конечной группой. Вначале покажем, что в $G/\tilde{R}(G)$ все абелевы подгруппы нетеровы. Пусть $A/\tilde{R}(G)$ — абелева подгруппа в $G/\tilde{R}(G)$. Подгруппа A из G радикальна, и по предыдущему она нетерова. Следовательно, и $A/\tilde{R}(G)$ нетерова. Как уже отмечалось, вполне приводимый радикал $B(G/\tilde{R}(G))$ является прямым произведением простых конечных групп, а из условия максимальности для абелевых подгрупп в $G/\tilde{R}(G)$ следует, что число таких множителей не может быть бесконечным, так что $B(G/\tilde{R}(G))$ — конечная группа, а вместе с ней конечна и фактор-группа $G/\tilde{R}(G)$.

В работе М. И. Каргаполова [2] третий пункт приведенной сейчас теоремы был обобщен на тот случай, когда G — локально конечная группа, обладающая нормальной системой с конечными факторами.

Сформулируем теперь без доказательства следующую теорему:

4.5. *Если в разрешимой группе все абелевы подгруппы имеют тип A_4 (A_3), то и вся группа имеет тип A_4 (или соответственно A_3)* (В. С. Чарин [5, 6]). *Разрешимая группа, в которой все абелевы подгруппы имеют конечный ранг, сама является группой конечного ранга* (М. И. Каргаполов [4]).

См. по этому поводу еще работы Ю. М. Горчакова [1] и Ю. И. Мерзлякова [2].

Отметим, наконец, следующий очень интересный результат М. И. Каргаполова [6] (независимо полученный Ф. Холлом и Кулатилака [1]):

Если в локально конечной группе все абелевы подгруппы конечны, то такая группа сама конечна.

Доказательство этой теоремы использует соответствующий результат С. Н. Черникова для локально разрешимого случая, теорему Томпсона—Фейта о разрешимости каждой группы нечетного порядка и одну теорему Р. Брауэра относительно элементов четного порядка.

§ 4. АВТОМОРФИЗМЫ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

1. Существование внешних автоморфизмов. В этом параграфе приводятся некоторые дополнительные сведения об автоморфизмах нильпотентных групп.

В работах Е. Шенкмана [2] и Ф. Хаимо [3] было высказано предположение о том, что всякая нильпотентная группа обладает внешними автоморфизмами. В общем случае этот вопрос еще не решен. Некоторые специальные случаи рассмотрены в работах Р. Ри [1] и [2]. Приведем одну теорему из работы Р. Ри [2] (см. также К. Гирш [1]).

1.1. *Нильпотентная группа без кручения с конечным числом образующих обладает внешними автоморфизмами.*

Пусть G — нетерова нильпотентная группа без кручения. В группе G имеется такой нормальный делитель H, что G/H — циклическая группа без кручения. Пусть $G=\{H, a\}$. Каждый элемент g из G однозначно представим в виде $g=ha^r$, где $h\in H$ и r — целое число. Обозначим через Z центр подгруппы H, и пусть a_0 — отличный от единицы элемент в Z. Определим отображение σ:

$$g\sigma=(ha^r)\sigma=h(aa_0)^r.$$

Легко видеть, что σ — подстановка на множестве G. Покажем, что σ — автоморфизм. Пусть $g_1=h_1a^{r_1}$ и $g_2=h_2a^{r_2}$. Тогда

$$g_1\sigma=h_1(aa_0)^{r_1},\quad g_2\sigma=h_2(aa_0)^{r_2},$$

$$g_1\sigma\cdot g_2\sigma=h_1(aa_0)^{r_1}\cdot h_2(aa_0)^{r_2}=h_1[(aa_0)^{-r_1},\ h_2^{-1}]\,h_2(aa_0)^{r_1+r_2},$$

$$g_1g_2=h_1a^{r_1}h_2a^{r_2}=h_1[a^{-r_1},\ h_2^{-1}]\,h_2a^{r_1+r_2},$$

$$(g_1g_2)\sigma=h_1[a^{-r_1},\ h_2^{-1}]\,h_2(aa_0)^{r_1+r_2}.$$

Остается заметить, что так как $a_0 \in Z$, то $[a^{-r_1}, h_2^{-1}] = [(aa_0)^{-r_1}, h_2^{-1}]$.

Понятно, что автоморфизм σ действует тождественно в H и в фактор-группе G/H. Покажем еще, что все неподвижные относительно σ элементы из G принадлежат H. Пусть $g = h_0 a^{r_0}$ — такой элемент. Так как $h_0 a^{r_0} = h_0 (aa_0)^{r_0}$, то $a^{r_0} = (aa_0)^{r_0}$. Но G — R-группа, и поэтому, если $r_0 \neq 0$, то $a = aa_0$ и $a_0 = e$. Полученное противоречие означает, что $r_0 = 0$ и $g = h_0 \in H$.

Допустим теперь, что σ есть внутренний автоморфизм и $\sigma = \hat{a}_1$. Так как $a\hat{a}_1 = a_1$, то $a_1 \in H$. Учитывая, что σ оставляет неподвижным каждый элемент из H, теперь заключаем, что $a_1 \in Z$. Отметим еще, что из $a\hat{a}_1 = aa_0$ следует $[a, a_1] = a_0$.

Далее допустим, что уже построена последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots, a_k$, лежащих в Z, отличных от единицы и таких, что выполняется соотношение

$$[a, a_i] = a_{i-1}. \qquad (*)$$

Поступая с a_k точно так же, как и с a_0, мы определим автоморфизм

$$(ha^r)\sigma = h(aa_k)^r.$$

Если этот автоморфизм является внутренним, то найдется a_{k+1} такой, что для последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ также выполняется соотношение $(*)$. Таким образом, если все автоморфизмы группы G оказываются внутренними, то можно строить сколь угодно длинные последовательности указанного типа. Пусть $a_1, a_2 \ldots, a_n$ — одна из таких последовательностей, имеющая длину n большую, чем класс m нильпотентности группы G. Так как

$$\underbrace{[a, [a, [\ldots [a,}_{m \text{ раз}} a_n]]] \ldots] = a_{n-m} \neq e,$$

то получается противоречие. Таким образом, среди автоморфизмов типа σ имеются и внешние.

Аналогичными рассуждениями можно устанавливать существование внешних автоморфизмов и в некоторых других случаях.

2. Разное. Пусть G — нильпотентная группа, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(G)$ — группа всех ее автоморфизмов и $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(G)$ — подгруппа в $\mathfrak{A}$, состоящая из всех автоморфизмов, действующих тождественно в фактор-группе по коммутанту G/G'. Из п. 7.1.3 непосредственно получаем, что $\mathfrak{A}_0$ действует тождественно во всех факторах нижнего центрального ряда группы G, так что $\mathfrak{A}_0$ — финитно стабильная группа, причем, если G — нильпотентная группа класса m, то $\mathfrak{A}_r$ — нильпотентная группа класса $m-1$. Теперь понятно что подгруппа в голоморфе $H(G)$, порожденная G и $\mathfrak{A}_0$, является нильпотентной группой. Ясно также, что фактор-группа $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ может рассматриваться как группа автоморфизмов абелевой группы G/G'.

Рассмотрим далее, следуя работе И. Говарта [1], один тип автоморфизмов в $\mathfrak{A}_0$ (для случая, когда G нетерова).

Пусть G_k — первый абелев член нижнего центрального ряда в G и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — некоторое конечное подмножество в G_{k-1}. Каждой такой последовательности мы отнесем некоторый эндоморфизм $\sigma = \sigma(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ по правилу:

$$g\sigma = g[g, a_1][g, a_2]\ldots[g, a_s].$$

Проверим, что σ действительно эндоморфизм. Пусть g_1 и g_2 — элементы в G. Имеем:

$$g_1\sigma = g_1 \prod_{i=1}^{s} [g_1, a_i], \qquad g_2\sigma = g_2 \prod_{i=1}^{s} [g_2, a_i],$$

$$g_1\sigma \cdot g_2\sigma = g_1 \prod_{i=1}^{s} [g_1, a_i] \cdot g_2 \prod_{i=1}^{s} [g_2, a_i] =$$

$$= g_1 g_2 \prod_{i=1}^{s} g_2^{-1} [g_1, a_i]\, g_2 [g_2, a_i].$$

Тут используется тот факт, что $[g, a_i] \in G_k$ и G_k — абелева группа. Далее,

$$(g_1 g_2)\sigma = g_1 g_2 \prod_{i=1}^{s} [g_1 g_2, a_i] = g_1 g_2 \prod_{i=1}^{s} g_2^{-1} [g_1, a_i]\, g_2 [g_2, a_i].$$

Легко проверяется, что множество всех эндоморфизмов указанного типа замкнуто относительно умножения. Обозначим это множество через Ф.

Покажем, что каждый эндоморфизм σ, принадлежащий Φ, в действительности является автоэпиморфизмом. В самом деле, пусть $\sigma \in \Phi$. Из определений видно, что $G\sigma$ вместе с коммутантом G' порождают всю группу G. Согласно известной теореме Бернсайда, если подмножество M нильпотентной группы G порождает вместе с G' всю группу G, то и одно M порождает всю группу G. Следовательно, $G = G\sigma$. Из этой же теоремы Бернсайда следует, что каждый эндоморфизм нильпотентной группы, индуцирующий автоморфизм в фактор-группе по коммутанту является автоэпиморфизмом.

Допустим теперь, что нильпотентная группа G имеет конечное число образующих. Такая группа, как известно, не может быть изоморфной своей истинной фактор-группе. Это значит, что для такой группы G все $\sigma \in \Phi$ являются автоморфизмами, и все эти автоморфизмы принадлежат $\mathfrak{A}_0$.

Приведем теперь один результат Ф. Холла относительно автоморфизмов конечных p-групп (см. также книгу М. Холла [2]).

Пусть G — конечная p-группа и H — ее Φ-подгруппа, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп из G. Фактор-группа G/H является элементарной абелевой группой и пусть ее порядок равен p^r. Легко проверить, что базисы в G/H можно выбирать $\varphi(p^r)$ различными способами, где $\varphi(p^r) = (p^r - 1)(p^r - p)\ldots(p^r - p^{r-1})$.

2.1. *Если группа G имеет порядок p^n и G/H порядка p^r, то порядок группы автоморфизмов $\mathfrak{A}(G)$ делит число $p^{r(n-r)}\varphi(p^r)$. Порядок подгруппы $\mathfrak{A}_1(G)$ всех автоморфизмов, действующих тождественно в G/H, делит $p^{r(n-r)}$.*

Нетрудно понять, что существует в точности $p^{r(n-r)}\varphi(p^r)$ последовательностей $X = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, порождающих группу G. Так как каждый автоморфизм индуцирует подстановку на таких последовательностях и разные автоморфизмы индуцируют разные подстановки, то группу $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как подгруппу группы всех подстановок множества всех последовательностей. Эта группа действует регулярно, и все последовательности распадаются на $\mathfrak{A}$-траектории, причем порядки всех этих траекторий совпадают с порядком $\mathfrak{A}$. Этим доказана первая часть теоремы.

Вторая часть следует из того, что мы должны считать одинаковыми последовательности типа X, если их элементы одинаковы по модулю Ф-подгруппы. В таком случае множество регулярно переставляемых группой $\mathfrak{A}_1$ последовательностей состоит из $p^{r(n-r)}$ членов. Заметим еще, что порядок группы автоморфизмов элементарной абелевой группы порядка p^r равен числу ее базисов, т. е. числу $\varphi(p^r)$.

3. Автоморфизмы свободных нильпотентных групп. Свободные алгебры различных примитивных классов алгебр относятся к числу конкретных алгебраических систем, и поэтому можно ставить вопрос об описании их групп автоморфизмов. Этой теме посвящено несколько работ, причем наибольшее внимание привлекли свободные нильпотентные группы. Если G — свободная группа некоторого примитивного класса групп и в этой группе выбраны две системы свободных образующих, то каждое взаимно однозначное соответствие между этими системами однозначно продолжаемо до автоморфизма группы. Понятно также, что автоморфизмы группы G переводят свободные системы образующих в системы образующих, также являющиеся свободными. Таким образом, для определения автоморфизмов группы G важно иметь признаки свободных систем образующих. Для свободных групп, являющихся нильпотентными, этот вопрос решается в работе А. И. Мальцева [12].

Пусть G — приведенная свободная группа и G' — ее коммутант. Как показал Б. Нейман, фактор-группа G/G' раскладывается в прямое произведение циклических групп одного и того же конечного или бесконечного порядка m. Если теперь группа G нильпотентна, то $G \neq G'$, и, следуя А. И. Мальцеву, систему образующих X группы G будем называть *независимой*, если образы всех элементов из X в G/G' порождают циклические подгруппы порядка m, и G/G' является прямым произведением таких циклических групп.

В упомянутой работе доказывается следующая теорема: *всякая независимая система образующих нильпотентной приведенной свободной группы является свободной системой образующих.*

Опираясь на этот признак, легко доказать следующую теорему:

3.1. *Каждый эндоморфизм свободной нильпотентной группы G, действующий как автоморфизм в фактор-группе по коммутанту, является автоморфизмом всей группы.*

Мы уже отмечали, что каждый такой эндоморфизм является автоэпиморфизмом.

Пусть, далее, σ — эндоморфизм свободной нильпотентной группы G, действующий как автоморфизм в G/G', и пусть X — некоторая независимая система образующих в G. Тогда из условий следует, что система $Y = X \circ \sigma$ также является независимой системой образующих в G, и отображение σ: $X \to Y$ взаимно однозначно. Это означает, согласно теореме А. И. Мальцева, что σ — автоморфизм группы G.

Приведем дальше следующую теорему (из работы А. И. Мальцева [12]):

3.2. *Если H — нормальный делитель нильпотентной приведенной свободной группы G, лежащий в ее коммутанте G', то каждый автоморфизм группы G/H индуцируется некоторым автоморфизмом G. Пусть еще A и B — нормальные делители, лежащие в G' и такие, что G/A и G/B изоморфны. Тогда A может быть переведен в B некоторым автоморфизмом группы G.*

Пусть G, H, A и B удовлетворяют условиям теоремы. Возьмем в G некоторую независимую систему образующих $X = (x_1, x_2, \ldots)$, и пусть $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ — множество образов всех этих элементов в G/H. Автоморфизм $\bar{\sigma}$ группы G/H переводит каждый $\bar{x}_i$ в некоторый $\bar{y}_i$. Во всех смежных классах $\bar{y}_i$ выберем по представителю y_i. Так как $\bar{\sigma}$ индуцирует также автоморфизм в G/G', то система всех y_i является независимой системой образующих в G. Если теперь положить $x_i\sigma = y_i$, то этим будет задан автоморфизм группы G, причем этот автоморфизм индуцирует автоморфизм $\bar{\sigma}$.

Пусть дальше φ — изоморфизм G/A и G/B. Так как A и B принадлежат G', то этот изоморфизм индуцирует автоморфизм фактор-группы G/G'. Это означает, что если X — независимая система образующих в G, $\bar{X}$ — множество образов элементов из X в G/A, $\bar{Y}$ — множе-

ство образов этих элементов при отображении φ в G/B и y_i — соответствующие представители смежных классов, то все эти представители составляют независимую систему образующих в G. Полагая $x_i\sigma = y_i$, мы определим автоморфизм σ, обладающий нужным свойством.

Некоторые результаты работы [12] обобщены А. И. Мальцевым на один класс приведенных свободных квазиколец [10]. Группам автоморфизмов свободных нильпотентных групп посвящено также обстоятельное исследование С. Андреадакиса [1].

Что касается автоморфизмов свободных разрешимых групп, то интерес к ним возник уже давно, однако окончательных результатов здесь пока нет. Можно отметить такой частный результат: *если G — свободная разрешимая группа, Γ — группа всех ее автоморфизмов и Σ — Γ-централизатор убывающего ряда коммутантов группы G, то Σ — абелева группа* *).

Несколько работ посвящено группам автоморфизмов свободных групп и свободных произведений групп (см. список литературы). Было бы интересно рассмотреть аналогичные вопросы для свободных Ω-групп и свободных произведений Ω-групп.

В заключение сформулируем один результат Б. Чанга [1] о группах автоморфизмов свободных групп. Пусть G — свободная группа с двумя образующими a и b, и G' — коммутант. Утверждается, что автоморфизм φ группы G тогда и только тогда является внутренним, когда $a\varphi \equiv a \pmod{G'}$ и $b\varphi \equiv b \pmod{G'}$. Отсюда следует, что фактор-группа $\mathrm{Aut}(G)/I(G)$ ($I(G)$ — группа внутренних автоморфизмов) изоморфна группе целочисленных матриц второго порядка с определителем, равным ± 1. По теме этого пункта см. еще работу А. В. Мостовского [2].

---

*) В самое последнее время, кажется, наметился сдвиг в изучении автоморфизмов свободных разрешимых групп.

ДОБАВЛЕНИЕ

Настоящее добавление посвящено примитивным классам — многообразиям — пар. Для этого случая будет доказана теорема, аналогичная теореме Биркгофа о примитивных классах алгебр.

В п. 2.1.2 определялось понятие абсолютно свободной пары относительно некоторой системы операций Ω, порожденной парой множеств X, Y. Строится эта абсолютно свободная пара следующим образом. Вначале берем свободную группу $F = F(Y)$ и рассматриваем множество $X \circ F$ формальных выражений вида $x \circ f$, $x \in X$, $f \in F$. Группа F естественным образом действует на множестве $X \circ F$. Это множество $X \circ F$ берем теперь в качестве системы свободных образующих абсолютно свободной Ω-алгебры $\Phi = \Phi(X \circ F, \Omega)$, и действие группы F распространяем до действия в Φ. Так мы приходим к абсолютно свободной паре (Φ, F).

Допустим еще, что задана некоторая другая, произвольная пара (G, Γ) с областью действия G, являющейся Ω-алгеброй, и пусть μ: $X \to G$, $Y \to \Gamma$ — некоторое отображение X в G и Y в Γ. Отображение μ: $Y \to \Gamma$ продолжается до гомоморфизма μ: $F \to \Gamma$. Если теперь $x \circ f \in X \circ F$, то, полагая $(x \circ f)^\mu = x^\mu \circ f^\mu$, мы определим отображение μ: $X \circ F \to G$, а последнее продолжается до гомоморфизма μ: $\Phi \to G$. Легко видеть, что отображение μ: $(\Phi, F) \to (G, \Gamma)$ есть гомоморфизм пары (Φ, F) в пару (G, Γ). Таким образом, каждое отображение μ: $X \to G$, $Y \to \Gamma$ однозначно продолжается до гомоморфизма μ: $(\Phi, F) \to (G, \Gamma)$.

Возьмем теперь абсолютно свободную пару (Φ_0, F_0) со счетными системами свободных образующих X_0 и Y_0. Будем рассматривать пары множеств (Λ_1, Λ_2). Множество Λ_1 состоит из пар (φ, ψ), где φ и ψ — элементы в Φ_0, а Λ_2 — некоторый набор слов, элементов в F_0.

Множество Λ_2 определяет примитивный класс групп $K = K(\Lambda_2)$, состоящий из всех групп, в каждой из которых слова из Λ_2 тождественно обращаются в единицу. Пусть теперь φ — элемент в Φ_0. Этот элемент однозначно выражается через некоторые элементы $x_1, x_2, \ldots \in X$ и $y_1, y_2, \ldots \in Y$:

$$\varphi = \varphi(x_1 \circ f_1(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, x_n \circ f_n(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n})).$$

Если теперь (G, Γ) — некоторая пара, однотипная паре (Φ_0, F_0), то, подставляя вместо x и y соответственно элементы из G и Γ, мы получим некоторый элемент в G — значение φ в G. Если, наконец, φ и ψ — два слова из Φ_0, то ясно, как понимать, что в некоторой паре (G, Γ) выполняется тождество $\varphi \equiv \psi$. Всему множеству пар слов Λ_1 мы можем сейчас сопоставить класс пар $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Lambda_1)$, однотипных паре (Φ_0, F_0) и таких, что в каждой из них выполняется тождество $\varphi \equiv \psi$ для всех $(\varphi, \psi) \in \Lambda_1$.

Двум множествам (Λ_1, Λ_2) мы сопоставляем примитивный класс пар (G, Γ), обозначаемый через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Lambda_1, \Lambda_2)$. По определению, $(G, \Gamma) \in \mathfrak{M}$, если одновременно $(G, \Gamma) \in \mathfrak{N}(\Lambda_1)$ и $\Gamma \in K(\Lambda_2)$.

Если, с другой стороны, $\mathfrak{M}$ — некоторый класс однотипных пар, то этому классу естественно отвечает пара множеств Λ_1 и Λ_2, где Λ_2 состоит из всех элементов из F_0 таких, что если $(G, \Gamma) \in \mathfrak{M}$, то каждый такой элемент обращается на Γ тождественно в единицу, а Λ_1 состоит из всех пар слов (φ, ψ) таких, что на каждой из этих (G, Γ) выполняется тождество $\varphi \equiv \psi$. Мы приходим здесь к соответствию, аналогичному соответствию Галуа. При этом можно определить замыкания — замыкания Галуа — как для классов пар, так и для пар множеств (Λ_1, Λ_2). Нашей целью является рассмотрение связанных с этими замыканиями замкнутостей.

Что касается классов однотипных пар, то ясно, что замкнутые классы — это примитивные классы. Легко понять, что каждый примитивный класс пар замкнут также относительно следующих трех типов операций: взятия подпар, гомоморфных образов и полных прямых произведений пар.

Для дальнейших построений мы напомним, что если (G, Γ) — некоторая пара, то конгруэнция этой пары есть пара (ρ, Σ), где ρ — конгруэнция в G, инвариантная относительно Γ, и Σ — нормальный делитель в Γ, принадлежащий ядру представления Γ относительно G/ρ. Каждая такая конгруэнция определяет фактор-пару, и имеет место теорема о гомоморфизмах. Если, далее, в (G, Γ) задан некоторый набор конгруэнций $(\rho_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha \in I$, то $\bigcap\limits_{\alpha \in I} (\rho_\alpha, \Sigma_\alpha) = \left(\bigcap\limits_{\alpha} \rho_\alpha, \bigcap\limits_{\alpha} \Sigma_\alpha\right)$ также является конгруэнцией, причем нетрудно проверить, что теорема Ремака имеет место и в этом случае.

Нам понадобится еще определение вполне характеристической конгруэнции. Если (ρ, Σ) — конгруэнция пары (G, Γ) и η — эндоморфизм этой пары, то указанная конгруэнция инвариантна относительно η, если $\rho^\eta \subset \subset \rho$ и $\Sigma^\eta \subset \Sigma$. Данная конгруэнция называется вполне характеристической, если она инвариантна относительно всех эндоморфизмов пары. Нетрудно показать, что если (ρ, Σ) — вполне характеристическая конгруэнция абсолютно свободной пары (Φ, F), то Σ — вполне характеристическая подгруппа в F. Действительно, если η — эндоморфизм группы F и $x \circ f \in X \circ F$, то, полагая $(x \circ f)^\eta = x \circ f^\eta$, мы определим отображение порождающего множества $X \circ F$ в себя, которое можно продолжить до эндоморфизма алгебры Φ. Очевидно, что при этом η будет продолжен до эндоморфизма пары (Φ, F), откуда и следует, что если (ρ, Σ) вполне характеристична, то $\Sigma^\eta \subset \Sigma$.

Всюду дальше будем считать, что система операций Ω фиксирована, и пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс пар, замкнутый относительно операций указанных выше трех типов. Если (G, Γ) — некоторая произвольная пара, то через $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ мы обозначим пересечение всех конгруэнций $(\rho_\alpha, \Sigma_\alpha)$ из (G, Γ), для которых фактор-пара $(G, \Gamma)/(\rho_\alpha, \Sigma_\alpha)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Из предыдущих замечаний видно, что $(G, \Gamma)/(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ также принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Можно показать, что конгруэнция $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ является вполне характеристической конгруэнцией.

Если, в частности, (Φ, F) — абсолютно свободная пара и $\mathfrak{M}$ — некоторый примитивный класс, то фактор-пара $(\Phi, F)/(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ называется (*приведенной*) *свободной парой примитивного класса* $\mathfrak{M}$. Каждая пара из класса $\mathfrak{M}$ является гомоморфным образом некоторой свободной пары этого класса.

Пусть снова (Φ, F) — некоторая абсолютно свободная пара, порожденная множествами X и Y, и (G, Γ) — произвольная пара. Обозначим через $M = M(G, \Gamma)$ множество всех отображений

$$\mu\colon\ X \to G,\ Y \to \Gamma.$$

Каждое такое отображение μ мы можем рассматривать как гомоморфизм пар

$$\mu\colon\ (\Phi, F) \to (G, \Gamma).$$

Через (ρ_M, Σ_M) мы обозначим конгруэнцию этого гомоморфизма, и пусть (ρ_M, Σ_M) — пересечение всех (ρ_μ, Σ_μ) по всем $\mu \in M$. Из определений видно, что если φ и ψ принадлежат Φ, то сравнение $\varphi\rho_M\psi$ имеет место тогда и только тогда, когда в (G, Γ) выполняется тождество $\varphi \equiv \psi$, а элемент $\gamma \in F$ в том и только в том случае принадлежит Σ_M, когда этот элемент в Γ тождественно обращается в единицу. Легко также видеть, что конгруэнция (ρ_M, Σ_M) вполне характеристична в (Φ, F).

Если, далее, $\mathfrak{M}$ — некоторый произвольный класс пар, то через $(\rho'_{\mathfrak{M}}, \Sigma'_{\mathfrak{M}})$ обозначим пересечение всех (ρ_M, Σ_M) по всем $(G, \Gamma) \in \mathfrak{M}$. Нетрудно понять, что в том случае, когда класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно гомоморфизмов, взятия подпар и полных прямых произведений, $(\rho'_{\mathfrak{M}}, \Sigma'_{\mathfrak{M}})$ — это то же самое, что и определенная раньше $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$.

Условимся в дальнейшем употреблять следующее обозначение: если Λ_1 — некоторый набор пар слов (φ, ψ), то через $\rho(\Lambda_1)$ обозначим бинарное отношение, определяемое этими парами. Имеет место следующая теорема:

Пара множеств (Λ_1, Λ_2) *тогда и только тогда определяется некоторым классом* $\mathfrak{M}$ *пар* (G, Γ), *когда* $(\rho(\Lambda_1), \Lambda_2)$ *есть вполне характеристическая конгруэнция в* (Φ_0, F_0).

Тот факт, что если (Λ_1, Λ_2) определяется некоторым $\mathfrak{M}$, то $(\rho(\Lambda_1), \Lambda_2)$ является вполне характеристической конгруэнцией (Φ_0, F_0), непосредственно вытекает из только что приводившихся замечаний по поводу конгруэнций типа (ρ_M, Σ_M).

Допустим дальше, что (ρ, Σ) — некоторая вполне характеристическая конгруэнция в (Φ_0, F_0), $\rho = \rho(\Lambda_1)$ и $\Lambda_2 = \Sigma$. Мы покажем, что если паре (Λ_1, Λ_2) отвечает примитивный класс $\mathfrak{M}$, а затем по этому классу будем восстанавливать соответствующие тождества (Λ_1', Λ_2'), то мы вернемся к исходным (Λ_1, Λ_2).

Пусть $\rho' = \rho(\Lambda_1')$ и $\Sigma' = \Lambda_2'$. Согласно предыдущему, (ρ', Σ') — вполне характеристическая конгруэнция в (Φ_0, F_0), и, кроме того, эта конгруэнция совпадает с конгруэнцией $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ в (Φ_0, F_0). Опираясь на полную характеристичность конгруэнции (ρ, Σ), нетрудно заметить, что фактор-пара $(\Phi_0, F_0)/(\rho, \Sigma)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, и следовательно, имеем включение $(\rho', \Sigma') \subset \subset (\rho, \Sigma)$. Обратное включение содержится в определениях. Таким образом, $\Lambda_1 = \Lambda_1'$ и $\Lambda_2 = \Lambda_2'$, что и требовалось.

Перед тем как доказывать следующую теорему, скажем еще несколько слов по поводу конгруэнции, определяемой примитивным классом в абсолютно свободной паре.

Пусть (Φ, F) — такая пара, $\mathfrak{M}$ — некоторый примитивный класс, определяемый тождествами (Λ_1, Λ_2), и пусть $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ — отвечающая этому классу конгруэнция в (Φ, F). Если $(\varphi, \psi) \in \Lambda_1$ и μ — некоторое отображение X_0 в Φ и Y_0 в F, то при таком отображении φ и ψ принимают определенное значение в Φ, скажем, $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$. Через ρ_1 обозначим бинарное отношение в Φ, определяемое всевозможными парами $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ по всем $(\varphi, \psi) \in \Lambda_1$ и всевозможным μ. Ясно, что $\rho_1 \subset \rho_{\mathfrak{M}}$. Пусть дальше Σ — подгруппа в F, порожденная всеми значениями слов из Λ_2 в F. Σ — вполне характеристическая подгруппа, и она принадлежит $\Sigma_{\mathfrak{M}}$. Обозначим еще через ρ_2 отношение в Φ, определяемое всевозможными парами $(u, u \circ f)$ по всем $u \in \Phi$ и $f \in \Sigma$. Очевидно, что $\rho_2 \subset \rho_{\mathfrak{M}}$.

Пусть дальше ρ — пересечение всех конгруэнций из Φ, содержащих ρ_1 и ρ_2. Используя тот факт, что ρ_1 и ρ_2 инвариантны относительно элементов из F, можно отметить, что и ρ — инвариантная относительно F конгруэнция. Понятно, что ρ и Σ образуют конгруэнцию пары (Φ, F), и очевидно также, что фактор-пара $(\Phi, F)/(\rho, \Sigma)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Отсюда уже следует, что

$$\rho = \rho_{\mathfrak{M}} \text{ и } \Sigma = \Sigma_{\mathfrak{M}}.$$

Теперь докажем основную здесь теорему.

Класс $\mathfrak{M}$ однотипных пар (G, Γ) тогда и только тогда является примитивным классом, когда этот класс замкнут относительно гомоморфизмов, взятия подпар и полных прямых произведений пар.

Мы уже отмечали, что каждый примитивный класс замкнут относительно указанных здесь типов операций.

Допустим теперь, что некоторый класс пар $\mathfrak{M}$ обладает этим свойством замкнутости, и допустим, что этому классу в паре (Φ_0, F_0) отвечают множества Λ_1, Λ_2. Пусть эти Λ_1, Λ_2 определяют примитивный класс $\overline{\mathfrak{M}}$. Ясно, что $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$, и мы хотим доказать, что здесь выполняется равенство. Для того чтобы это установить, нам достаточно показать, что в классе $\mathfrak{M}$ содержится каждая свободная пара примитивного класса $\overline{\mathfrak{M}}$.

Пусть (Φ, F) — произвольная абсолютно свободная пара, $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ — конгруэнция в ней, отвечающая классу $\mathfrak{M}$, и $(\rho_{\overline{\mathfrak{M}}}, \Sigma_{\overline{\mathfrak{M}}})$ — конгруэнция, отвечающая замыканию $\overline{\mathfrak{M}}$. Ясно, что $(\rho_{\overline{\mathfrak{M}}}, \Sigma_{\overline{\mathfrak{M}}}) \subset (\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$. Докажем обратное включение. Пусть выполняется $\tilde{\varphi}\rho_{\mathfrak{M}}\tilde{\psi}$, где $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — элементы в Φ. Так как в записи этих элементов участвует лишь конечное число x и y, то в Φ_0 можно найти такие φ и ψ, что $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ являются значениями этих φ и ψ в Φ. При этом можно будет утверждать, что во всех парах из $\mathfrak{M}$ имеет место тождество $\varphi \equiv \psi$, и следовательно, $(\varphi, \psi) \in \Lambda_1$. Из приводившихся раньше замечаний теперь выводим $\tilde{\varphi}\rho_{\overline{\mathfrak{M}}}\tilde{\psi}$ и $\rho_{\mathfrak{M}} \subset \rho_{\overline{\mathfrak{M}}}$. Аналогично устанавливаем включение $\Sigma_{\mathfrak{M}} \subset \Sigma_{\overline{\mathfrak{M}}}$. Таким образом, $(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}}) = (\rho_{\overline{\mathfrak{M}}}, \Sigma_{\overline{\mathfrak{M}}})$. Но мы знаем, что фактор-пара $(\Phi, F)/(\rho_{\mathfrak{M}}, \Sigma_{\mathfrak{M}})$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Следовательно,

в $\mathfrak{M}$ содержатся все свободные пары примитивного класса $\overline{\mathfrak{M}}$, и поэтому $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$. Теорема доказана.

Понятно, что теорема Биркгофа содержится в этой теореме. С другой стороны, приведенные построения можно было бы охватить еще более общими схемами, относящимися к многоосновным алгебраическим системам (ср. Ф. Хиггинс [3]). При этом было бы интересно специально рассмотреть случай пар типа (G, Г), где Г уже полугруппа, элементы которой действуют в G как эндоморфизмы, а также пары лиева типа.

Для примитивных классов пар возникают обычные в таких случаях задачи: выделение различных интересных конкретных примитивных классов, нахождение минимальных систем определяющих тождеств и т. д.

Отметим еще, что при изучении классов пар естественно применять также теоретико-категорные методы.

ЛИТЕРАТУРА

Адам А. (Adam A.)

[1] A theorem of algebraic operators in the most general sense, Acta scient. math., 18, № 3—4 (1957), 205—206.

Адни Дж. Е. (Adney J. E.)

[1] On the power of a prime dividing the order of a group of automorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 8, № 4 (1957), 627—633.

Адни Дж. Е., Дескинс В. Е. (Adney J. E., Deskins W. E.)

[1] On automorphisms and subgroups of finite groups, I, Arch. Math. 13, № 1—3 (1962), 174—178.

Адни Дж. Е., Ти-Ен (Adney J. E., Ti Yen)

[1] Automorphisms of a p-group, Illinois, Journ. of Math. 9, № 1 (1965), 137—144.

Адо И. Д.

[1] О нильпотентных алгебрах и p-группах, Докл. АН СССР 40 (1943), 339—342.

Алберт А. А. (Albert A. A.)

[1] The radical of a non-associative algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 891—897.

Альперин И. Л. (Alperin I. L.)

[1] Groups with finitely many automorphisms, Pacif. J. Math. 12, № 1 (1962), 1—5.

[2] Automorphisms of solvable groups, Proc. Amer. Math. Soc. 13, № 2 (1962), 175—180.

Амицур С. (Amitsur S.)

[1] A general theory of radicals, I, Amer. J. Math. 74 (1952), 774—786.

[2] A general theory of radicals, II, Radicals in rings and bicategories, III, Applications, Amer. J. Math. 76, № 1 (1954), 100—125, 126—136.

[3] Groups with representations of bounded degree, Illinois J. Math. 5, № 2 (1961), 198—205.

Андреадакис С. (Andreadakis S.)

[1] On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups, Proc. London Math. Soc. XV, p. 2 (1965), 239—269.

Асатиани Р. В.

[1] Об одной характеристической подгруппе, Сообщ. АН Груз. ССР, 41 : 1 (1966), 3—9,

[2] Псевдостабильные группы автоморфизмов, Сообщ. АН Груз. ССР, 42 : 1 (1966), 23—28.

Ауслан дер М. (Auslander M.)
[1] Remark on automorphisms of groups, Proc. Amer. Math. Soc. **9**, № 2 (1958), 229—230.
Баранович Т. М.
[1] О политождествах в универсальных алгебрах, Сиб. матем. журнал **V**, № 5 (1964), 976—986.
Бауман С. Ф. (Bauman S. F.)
[1] The Klein group as a fixed point free automorphism group. Doct. diss. Univ. Illinois, 1962, 64 pp, Dissert. Abstr. **23**, № 8 (1963), 2921.
Баумслаг Г. (Baumslag G.)
[1] Wreath products and extensions, Math. Z. **81**, № 4 (1963), 286—299.
[2] Automorphism groups of residually finite groups, J. London Math. Soc. **38**, № 1 (1963), 117—118.
Баумслаг Г., Ковач Л., Нейман Б. (Baumslag G., Kovacs L., Neumann B.)
[1] On products of normal subgroups, Acta Scientiarum Math. XXVI, № 1—2 (1965), 145—147.
Бекнер И. Х.
[1] О скалярных эндоморфизмах и автоморфизмах групп, Докл. 3-й Сиб. конф. по матем. и механ., Томск, 1964, 224—225.
[2] О голоморфах абелевых групп с автоморфизмом, там же **2**, стр. 223—224.
[3] О голоморфах абелевых групп, Сиб. матем. журнал **V**, № 6 (1964), 1228—1239.
[4] О центроиде абелевой группы с конечным числом образующих, Тр. Томского ун-та **155** (1961), 190—193.
Бер Р. (Baer R.)
[1] Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich, Studia Math. **5** (1934), 15—17.
[2] Primary abelian groups and their automorphisms, Amer. J. Math. **59** (1937), 99—117.
[3] The hypercenter of a group, Acta math. **89**, № 3—4 (1953), 165—208.
[4] Das Hyperzentrum einer Gruppe, III, Math. Z. **59** (1953), 299—338.
[5] Das Hyperzentrum einer Gruppe, IV, Arch. Math. **5**, № 1—3 (1954), 56—59.
[6] Nilgruppen, Math. Z. **62**, № 4 (1955), 402—437.
[7] Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955.
[8] Überauflösbare Gruppen. Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **23** (1959), 11—28.
[9] Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung, Math. Ann. **129** (1955), 139—173.
[10] Noethersche Gruppen, Math. Z. **66**, № 3 (1956), 269—288.
[11] Lokal Noethersche Gruppen, Math. Z. **66**, № 4 (1957), 341—363.
[12] Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen, Math. Ann. **133**, № 3 (1957), 256—270.

[13] Supersoluble immersion, Canad. J. Math. **11**, № 3 (1959), 353—369.
[14] Le théorème de Maschke, Semin. P. Dubreil, M.—L. Dubreil Jacotin et C. Pisot, Fac. Sci. Paris, 1958—1959, 12-e année, fasc. 1, Paris **9** (1—9) 2, 1960.
[15] Gruppentheoretische Eigenschaften, Math. Ann. **149**, № 3, (1963), 181—210.
[16] Irreducible groups of automorphisms of abelian groups, Pacif. J. of Math. **14**, № 2 (1964), 385—406.
[17] Erreichbare und engelsche Gruppenelemente, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **27**, H. 1/2 (1964), 44—74.
[18] Group theoretical properties and functions, Colloq. math. **14**, (1966), 285—328.

Берж К.
[1] Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962.

Берман Г., Сильверман Р. (Berman G., Silverman R.)
[1] Near-rings, Amer. Math. Monthly **66**, № 1 (1959), 23—34.

Бернсайд В. (Burnside W.)
[1] Theory of groups, N. Y., 1955.
[2] On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions, Proc. London Math. Soc. (2) **3** (1905), 435—440.

Бетч Г. (Betsch G.)
[1] Ein Radikal für Fastringe, Math. Z. **78**, № 1 (1962), 86—90.

Биркгоф Г. (Birkhoff G.)
[1] The radical of a group with operators, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 751—753.
[2] О группах автоморфизмов, Revista de la Union Math. Argentina **11**, № 4 (1946), 155—157.
[3] Теория структур, ИЛ, 1952.

Биркгоф Г. и Холл Ф. (Birkhoff G. und Hall Ph.)
[1] On the order of groups of automorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 496—499.

Блэккетт Д. В. (Blackett D. W.)
[1] Simple and semisimple near-rings, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, № 5 (1953), 772—785.
[2] The near-ring of affine transformations, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, № 3 (1956), 517—519.

Боревич З. И., Шафаревич И. Р.
[1] Теория чисел, Изд-во «Наука», гл. ред. физ.-мат. лит., 1964.

Борель А. (Borel A.)
[1] Groupes linéaires algebriques, Ann. Math. **64**, № 1 (1956), 20—82.

Борель А., Мостов Г. (Borel A., Mostow G.)
[1] On semi-simple automorphisms of Lie algebras, Ann. Math. **61**, № 3 (1955), 389—405.

Боэн Дж. Р. (Boen J. R.)
[1] On p-automorphic p-groups, Pacif. J. Math. **12**, № 3 (1962), 813—815.

Боэн Дж., Томпсон Дж. (Boen J., Thompson J.)
[1] Further results on p-automorphic p-groups, Pacif. J. Math. **12**, № 3 (1962), 817—821.
Брак Р. (Bruck R. H.)
[1] Sums of normal endomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc. **10**, № 5 (1959), 674—678.
[2] A survey of binary systems, Springer-Verlag, 1958.
Браконье И. (Braconnier J.)
[1] Sur les suites de composition d'un groupe et la tour des groupes d'automorphismes d'un groupe fini, Semin. Bourbaki. Secret. math. 1948—1949, 1-e annee, 2-e ed., Paris, 7/1—7/5 (1959).
Бреннер Дж. (Brenner J.)
[1] The linear homogeneous group, Ann. of Math. **45** (1944), 100—109.
Бурбаки Н.
[1] Общая топология (основные структуры), Физматгиз, 1958.
[2] Алгебра (алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, 1962.
Бюхи И. Райт Е. (Büchi I., Wright J.)
[1] Invariants of the anti-automorphisms of a group, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, № 6 (1957), 1134—1140.
Валкер Е. А. (Walker E. A.)
[1] On the orders of the automorphism groups of infinite torsion Abelian groups, J. London Math. Soc. **35**, № 4 (1960), 385—388.
Валуцэ И. И.
[1] Левые идеалы полугрупп эндоморфизмов свободной универсальной алгебры, Докл. АН СССР **150**, № 2 (1963), 235—237.
Ван дер Варден Б. Л. (Van der Waerden B. L.)
[1] Gruppen von linearen Transformationen, Berlin, 1935.
[2] Современная алгебра, т. 1, Гостехиздат, 1947; т. 2, Гостехиздат, 1948.
Ван Чжэн-сянь (Wan Chen-hsian)
[1] On the automorphisms of linear groups over a non-commutative Euclidean ring of characteristic 2, Кэсюэцзилу, Sci. Rec. 1, № 1 (1957), 5—8.
[2] Автоморфизмы модулярной группы, Шусюэ цзинь-чжань 3, № 2 (1957), 216—233.
[3] Об автоморфизмах линейных групп над некоммутативным кольцом главных идеалов с характеристикой, отличной от 2, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica **7**, № 4 (1957), 533—573.
Веир А. (Weir A.)
[1] Sylow p-subgroup of the general linear group over finite fields of characteristic p, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 454—464.
Вейль Г. (Weyl H.)
[1] Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
[2] Symmetry, London, Princeton University Press, 1952.

Виландт Г. (Wielandt H.)
[1] Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z. **45** (1939), 209—244.
[2] Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe, Math. Z. **73**, № 2 (1960), 146—158.
[3] Unendliche Permutationsgruppen, Tübingen, 1960.
Вилле Р. И. (Wille R. J.)
[1] Topological groups with prescribed automorphism groups, Proc. koninkl. nederl. akad. wet. **A66**, № 2 (1963), 218—224; Indagationes math. **25**, № 2 (1963), 218—224.
Виляцер В. Г.
[1] К теории локально нильпотентных групп, Успехи матем. наук **XIII**, в. 2 (1958), 163—168.
[2] Некоторые примеры групп автоморфизмов, Докл. АН СССР **138**, № 6 (1961), 1283—1286.
[3] О некоторых свойствах групп автоморфизмов, Уч. зап. Уральского ун-та **23**, № 1 (1959), 3—10.
[4] Стабильные группы автоморфизмов, Докл. АН СССР **131**, № 4 (1960), 728—730.
[5] К теории радикалов в группах автоморфизмов, Матем. зап. Уральского ун-та **4**, № 3 (1963), 79—88.
Винберг Э. Б.
[1] К теореме о бесконечномерности ассоциативной алгебры, Изв. АН СССР, сер. матем. **29**, № 1 (1965), 209—215.
Врис Г., Миранда А. (Vries H., Miranda A. de)
[1] Groups with a small number of automorphisms, Math. Z. **68**, № 5 (1958), 450—464.
Вышник Г. И.
[1] Группа автоморфизмов структуры, Докл. 2-й Сибирск. конференции по матем. и механ., Томск, Томский ун-т, 1962, 78.
Габович Е.
[1] Об эндоморфизмах полугрупп, Tartu Ulikooli toimetised, Уч. зап. Тартус. ун-та, вып. **129** (1962), 3—18.
Гашюц В. (Gaschütz W.)
[1] Über den Fundamentalsatz von Maschke zur Darstellungtheorie der endlichen Gruppen, Math. Z. **56**, № 4 (1952), 376—388.
[2] Groups with an automorphism group which is transitive on the elements of prime order, Math. Z. **86**, № 2 (1964), 123—127.
Гекке Э.
[1] Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, 1940.
Гильберт Д., Аккерман В.
[1] Основы теоретической логики, ИЛ, 1947.
Гирш К. (Hirsch K.)
[1] On infinite soluble group, V, J. London Math. Soc. **29** (1954), 250—251.
[2] Über lokal-nilpotente Gruppen, Math. Z. **63** (1955), 290—294.

Глауберман Г. (Glauberman G.)
[1] Fixed points in groups with operator groups, Math. Z. 84, № 2 (1964), 120—125.
Глускин Л. М.
[1] О матричных полугруппах, Изв. АН СССР, сер. матем. 22, № 3 (1958), 439—448.
[2] Автоморфизмы мультипликативных полугрупп матричных алгебр, Успехи матем. наук 11, № 1 (1956), 199—206.
Глушков В. М.
[1] О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения, Матем. сб. 30 (72), № 1 (1952), 79—104.
Говарт И. (Howarth I. C.)
[1] Some automorphisms of finite nilpotent groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. 4, № 4 (1960), 204—207.
[2] On the power of a prime dividing the order of the automorphisms group of a finite group, Proc. Glasgow Math. Assoc. 4, № 4 (1960), 163—170.
[3] Automorphisms of finite Abelian group which reduce to the identity on a subgroup or factor group, Proc. Amer. Math. Soc. 12, № 3 (1961), 422—427.
Голдхабер И. К. (Goldhaber J. K.)
[1] A note on Lie k-system automorphisms, Amer. J. Math. 75, № 4 (1953), 863—899.
Головин О. Н.
[1] Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп, Труды Моск. матем. об-ва 12 (1963), 413—435.
Головин О. Н. и Садовский Л. Е.
[1] О группах автоморфизмов свободных произведений, Матем. сб. 4 (1938), 505—514.
Голод Е. С.
[1] О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах, Изв. АН СССР, сер. матем. 28, № 2 (1964), 273—276.
Голод Е. С., Шафаревич И. Р.
[1] О башне полей классов, Изв. АН СССР, сер. матем. 28 (1964), 13—24.
Гольберг П. А.
[1] Бесконечные полупростые группы, Матем. сб. 17 (1945), 131—142.
Гольфанд Ю. А.
[1] О группе автоморфизмов голоморфа группы, Матем. сб. 27 (1950), 333—350.
Горенштейн Д., Херстейн И. (Gorenstein D., Herstein I. N.)
[1] Finite groups admitting a fixed point-free automorphism of order 4, Amer. J. Math. 83, № 1 (1961), 71—78.
Горчаков Ю. М.
[1] О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в локально разрешимых группах, Докл. АН СССР 156, № 1 (1964), 17—20.

Гото М. (Goto M.)
[1] On the group of automorphisms of a locally compact connected group, Mem. Amer. Math. Soc. **14** (1955), 23—29.
Гофман К. (Hoffman C.)
[1] The group of similarity transforms of a simply ordered set, Bull. Amer. Math. Soc. **60** (1954), 289.
Гофман К., Райт Ф. (Hofman K., Wright F.)
[1] The automorphism group of certain function rings, Arch. Math. **12**, № 6 (1961), 420—424.
Гофман Ф. (Hoffmann F.)
[1] Finite groups admitting fixed-point-free automorphisms, Doct. diss. Univ. Virginia, 1964.
[2] Nilpotent height of finite groups admitting fixed-point-free automorphisms, Math. Z. **85**, № 3 (1964), 260—267.
Грин Дж. А. (Green J. A.)
[1] On the number of automorphisms of a finite group, Proc. Roy. Soc. **A237**, № 1211 (1956), 574—581.
Грот Д. (Groot J. de)
[1] Automorphism groups of rings, Abstr. Short Intern. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh Univ., Edinburgh, 1958, 18.
Грюн О. (Grün O.)
[1] Einige Sätze über Automorphismen abelscher p-Gruppen, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **24** (1960), 54—58.
[2] Automorphismen von Gruppen und endomorphismen freier Gruppen, Illinois J. Math. **2**, № 4B (1958), 759—763.
Грюнберг К. В. (Gruenberg K. W.)
[1] Two theorems on Engel groups, Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953), 377—380.
[2] The Engel elements of a soluble group, Illinois J. Math. **3**, № 2 (1959), 151—168.
[3] The upper central series in soluble groups, Illinois J. Math. **5**, № 3 (1961), 436—466.
Дейвис Р. Л. (Davis R. L.)
[1] The number of structures of finite relations, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, № 3 (1953), 486—495.
Дескинс В. Е. (Deskins W. E.)
[1] A radical for near-rings, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, № 5 (1954), 825—827.
[2] A note on the system generated by a set of endomorphisms of a group, Michigan Math. J. **6**, № 1 (1959), 45—49.
Джекобсон Н. (Jacobson N.)
[1] A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 2 (1955), 281—283.
[2] Note on automorphisms of Lie algebras, Pacif. J. Math. **12**, № 1 (1962), 303—315.
[3] Теория колец, ИЛ, 1947.
[4] Строение колец, ИЛ, 1961.
[5] Алгебры Ли, «Мир», 1964.
Дженнингс С. А. (Jennings S. A.)
[1] The group ring of a class of infinite nilpotent groups, Canad. J. Math. **7**, № 2 (1955), 169—187.

Дивинский Н. (Divinsky N.)
[1] On commuting automorphisms of rings, Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. 3, 49 (1955), June, 19—22.
Диксон Л. Е. (Dickson L. E.)
[1] Linear groups, with an exposition of Galois field theory, Leipzig, 1901.
[2] Modular theory of group matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), 389—398.
Диксон Дж. (Dixon J. D.)
[1] Complete reducibility of infinite groups, Canad. J. Math. 16, № 2 (1964), 267—274.
Дин Ши-сунь
[1] Заметка об автоморфизмах и антиавтоморфизмах колец всех матриц, Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кюсоэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis 3, № 1 (1957), 53—59.
Дрейзин М. (Drazin M. P.)
[1] Triangular representations of linear algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. 49, № 4 (1953), 595—600.
Дуингер Ф. (Dwinger Ph.)
[1] Some theorems on universal algebras, II, Proc. koninkl. nederl. akad. wet. A60, № 2 (1957), 190—195; Indagationes math. 19, № 2 (1957), 190—195.
Дьёдонне Ж. (Dieudonné J.)
[1] La géometrie des groupes classiques, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N. F.), Heft 5, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
[2] Sur les groupes classiques, Actual. scient. et industr. № 1040, publs Inst. math. Univ. Strasbourg 6, Paris, Hermann, 1958.
Житомирский В. Г.
[1] Треугольные автоморфизмы в группах, Сиб. матем. журнал 3, № 2 (1962), 187—194.
[2] Треугольная группа автоморфизмов прямого произведения групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 3, № 3 (1962), 30—36.
[3] Треугольные группы автоморфизмов квазиоператорных групп, Докл. АН СССР 144, № 3 (1962), 487—489.
[4] Треугольная группа автоморфизмов прямого произведения групп, III, Матем. зап. Уральск. ун-та 4, № 3 (1963), 89—94.
[5] Треугольная группа автоморфизмов прямого произведения групп, Матем. зап. Уральск. ун-та 4, № 1 (1963), 40—44.
Завалло С. Т.
[1] Операторные Г-свободные группы, Матем. сб. 33 (75), № 2 (1953), 399—432.
Залесский А. Е.
[1] Сверхразрешимые и нильпотентные подгруппы простых алгебр, Докл. АН БССР VII, № 12 (1963), 800—802.
[2] Разрешимые подгруппы мультипликативной группы локально конечной алгебры, Матем. сб. 61, № 4 (1963), 408—417.
Зарисский О., Самюэль П.
[1] Коммутативная алгебра, тт. 1, 2, ИЛ, 1963.

Иванюта И. Д.
[1] Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы, Укр. матем. журнал **15**, № 3 (1963), 240—249.
Калужнин Л. А.
[1] Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп, Acta Math. Hungarica **11**, F. 3—4 (1951), 198—221.
[2] Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen, Ber. Mathematiker-Tagung, Berlin, 1953, 164—172.
[3] Центральные расширения абелевых групп, Укр. матем. журнал **VIII**, № 3 (1956), 262—272.
[4] Центральные Г-подрасширения полного произведения абелевых групп, Укр. матем. журнал **VIII**, № 4 (1956), 413—422.
[5] Об одном отношении Галуа в теории групп, Укр. матем. журнал **XI**, № 1 (1959), 38—51.
Калужнин Л. А., Краснер М. И. (Kaloujnine L. et Krasner M.)
[1] Le produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension des groupes, C. R., Paris **227** (1948), 806—808.
[2] То же название в Acta Scientiarum Math., XIII, F. 3—4 (1950), 208—230; XIV, F. 1 (1951), 39—66.
Капланский И.
[1] Введение в дифференциальную алгебру, ИЛ, 1959.
[2] Groups with representations of bounded degree, Canad. J. Math. **1** (1949), 105—112.
[3] Infinite abelian groups, 1954.
Каппе В. (Kappe W.)
[1] Gruppentheoretische Eigenschaften und charakteristische Untergruppen, Arch. Math. **13**, № 1—3 (1962), 38—48.
Каргаполов М. И.
[1] Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп, Докл. АН СССР **127**, № 6 (1959), 1164—1166.
[2] Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами, Сиб. матем. журнал **2**, № 6 (1961), 853—873.
[3] О периодических группах матриц, Сиб. матем. журнал **3**, № 6 (1962), 834—838.
[4] О разрешимых группах конечного ранга, Алгебра и логика (семинар) **1**, вып. 5 (1962), 37—45.
[5] Об обобщенных разрешимых группах, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 19—28.
[6] О проблеме Шмидта, Сиб. матем. журнал **4**, № 1 (1963), 232—235.
Каррас А., Золитар Д. (Karras A., Solitar D.)
[1] Some remarks of the infinite symmetric groups, Math. Z. **66**, № 1 (1956), 64—69.
Картан А., Эйленберг С.
[1] Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.

К а ш Ф. (K a s c h F.)
[1] Invariante Untermoduln des Endomorphismenrings eines Vektorraums, Arch. Math. 4, № 3 (1953), 182—190.
[2] Über den Automorphismenring einfacher Algebren, Arch. Math. 6, № 1 (1954), 59—65.
К е й с л е р Г. (K e i s l e r H.)
[1] Ultraproducts and elementary classes, Proc. koninkl. nederl. akad. wet. A64, № 5 (1961), 477—495; Indagationes math. 23, № 5 (1961), 477—495.
К е м х а д з е Ш. С.
[1] Квазинильпотентные группы, Докл. АН СССР 155, № 5 (1964), 1003—1005.
[2] К определению нильгруппы Бера, Сообщ. АН Груз. ССР 33, № 2 (1964), 279—284.
[3] О внешне нильпотентных автоморфизмах, Сообщ. АН Груз. ССР 34, № 2 (1964), 265—270.
К и ш к и н а З. М.
[1] Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем. 9 (1945), 201—232.
К л а у с Дж., Г и р ш К. (C l o w e s J. S., H i r s c h K.)
[1] Simple groups of infinite matrices, Math. Z. 58, № 1 (1953).
К л и н г е н б е р г В. (K l i n g e n b e r g W.)
[1] Linear groups over local rings, Bull. Amer. Math. Soc. 66, № 4 (1960), 294—296.
[2] Die Struktur der linearen Gruppe über einem nichtkommutativen lokalen Ring, Arch. Math. 13, № 13 (1962), 73—81.
К о в а ч Л. (K o v a c s L. G.)
[1] Groups with regular automorphisms of order four, Math. Z. 75, № 3 (1961), 277—294.
К о в а ч Л., Н ь ю м е н М. (K o v a c s L. G., N e w m a n M. F.)
[1] Direct complementation in groups with operators, Arch. Math. 13, № 6 (1962), 427—433.
К о л ч и н Е. Р. (K o l c h i n E. R.)
[1] On certain concepts in the theory of algebraic matrix groups, Ann. of Math. 49, № 4 (1948), 774—789.
К о н П. (C o h n P.)
[1] Groups of order automorphisms of ordered sets, Mathematika 4, № 7 (1957), 41—50.
К о н р а д П. (C o n r a d P.)
[1] The group of order preserving automorphisms of an ordered abelian group, Proc. Amer. Math. Soc. 9, № 3 (1958), 382—389.
[2] The groups of word preserving permutations of a group, J. Indian Math. Soc. 22, № 4 (1958), 149—179.
[3] A correction and improvement of a theorem on ordered groups, Proc. Amer. Math. Soc. 10, № 2 (1959), 182—184.
К о н т о р о в и ч П. Г.
[1] Группы с базисом расщепления, III, Матем. сб. 22 (64) (1948), 79—100.
[2] Инвариантно покрываемые группы, II, Матем. сб. 28 (70), № 1 (1951), 79—90.

К о с т р и к и н А. И.
[1] Об однородных алгебрах, Изв. АН СССР, сер. матем. **29**, № 2 (1965), 471—485.
К о ч и н С. (K o c h e n S.)
[1] Ultraproducts in the theory of models, Ann. Math. **74**, № 2 (1961), 221—261.
К р а с н е р М. (K r a s n e r M.)
[1] Une généralisation de la notion de corps, J. Math. pures et appl. **XVII**, F. IV (1938), 367—385.
К р е к н и н В. А.
[1] О разрешимости алгебр Ли с регулярным автоморфизмом конечного периода, Докл. АН СССР **150**, № 3 (1963), 467—469.
К р е к н и н В. А., К о с т р и к и н А. И.
[1] Об алгебрах Ли с регулярным автоморфизмом, Докл. АН СССР **149**, № 2 (1963), 249—251.
К р о у ч Р. (C r o a c h R.)
[1] Monomial groups, Trans. Amer. Math. Soc. **80**, № 1 (1955), 187—215.
[2] A class of irreducible systems of generators for infinite symmetric groups, Proc. Amer. Math. Soc. **10**, № 6 (1959), 910—911.
[3] Characteristic subgroups of monomial groups, Pacif. J. Math. **10**, № 1 (1960), 85—89.
К р о у ч Р., С к о т т В. (C r o a c h R., S c o t t W.)
[1] Normal subgroups of monomial groups, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, № 5 (1957), 931—936.
К р у а з о Р. (C r o i s o t R.)
[1] Automorphismes interieurs d'un semi-groupe, Bull. Soc. math. France **82**, № 2 (1954), 161—194.
К у р е п а Д. (K u r e p a D.)
[1] Une généralisation des matrices, C. R. Acad. Sci. **239**, № 1 (1954), 19—20.
К у р о ш А. Г.
[1] Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах, Изв. АН СССР, сер. матем. **5** (1941), 233—241.
[2] Композиционные системы в бесконечных группах, Матем. сб. (нов. сер.) **16** (1945), 59—72.
[3] Теория групп, Гостехиздат, 1953.
[4] Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962.
[5] Радикалы колец и алгебр, Матем. сб. **33** (1953), 13—26.
[6] Радикалы в теории групп, Сиб. матем. журнал **3**, № 6 (1962), 9—12, 932.
[7] Свободные суммы мультиоператорных групп, Acta scient. math. **21**, № 3—4 (1960), 187—196.
[8] Свободные суммы мультиоператорных алгебр, Сиб. матем. журнал **1**, № 1 (1960), 62—70.
К у р о ш А. Г., Ч е р н и к о в С. Н.
[1] Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи матем. наук **2**, № 3 (1947), 18—59.

Курцио М. (Curzio M.)
[1] Sugli automorfismi uniformi nei gruppi a condizione minimale, Riv. mat. Univ. Parma **1**, № 1 (1960), 107—122.
[2] Ampliamenti di automorfismi nei gruppi fattorizzabili, Ann. Ist. univ. navale, Napoli **31** (1962), 13—25.
Кэртис Ч. (Curtis C.)
[1] A note on the representations of nilpotent Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, № 5 (1954), 813—824.
[2] On projective representations of certain finite groups, Proc. Amer. Math. Soc. **11**, № 6 (1960), 852—860.
[3] On Lie algebras of algebraic linear transformations, Pacif. J. Math. **6**, № 3 (1956), 453—466.
Кэртис Ч., Райнер И. (Curtis C., Reiner I.)
[1] Representation theory of finite groups and associative algebras, New York—London, 1962.
Ландин Е., Райнер И. (Landin J., Reiner I.)
[1] Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain, Ann. Math. **65**, № 3 (1957), 519—526.
Левич Е. М.
[1] Пример простой, но не строго простой группы, Уч. зап. ЛГУ **58** (1964), 21—26.
[2] Локально достижимые элементы группы, Изв. АН Латв. ССР, сер. физ. и техн. наук, № 3 (1965), 71—73.
[3] О простых и строго простых кольцах, Изв. АН Латв. ССР, сер. физ. и техн. наук, № 6 (1965), 53—58.
Ледерман В., Нейман Б. (Ledermann W., Neumann B.)
[1] On the order of the automorphism group of a finite group, I, Proc. Roy. Soc. **A233**, № 1195 (1956), 494—506.
[2] On the order of the automorphism group of a finite group, II, Proc. Roy. Soc. **A235**, № 1201 (1956), 235—246.
Лептин Г. (Leptin H.)
[1] Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismen-gruppen, Math. Z. **73**, № 3 (1960), 235—253.
[2] Einige Bemerkungen über die Automorphismen Abelscher p-Gruppen, Proc. of the colloquium on Abelian Groups, Budapest, 1964, 99—105.
Лернер А. (Learner A.)
[1] The embedding of a class of polycyclic groups, Proc. London Math. Soc. **12**, № 47 (1962), 496—510.
Леувен Л. (Leeuwen L.)
[1] On the holomorphs of a ring, Proc. koninkl. nederl. akad. wet. **A61**, № 2 (1958), 162—169; Indagationes math. **20**, № 2 (1958), 162—169.
Либек Г. (Liebeck H.)
[1] Concerning automorphisms in finitely generated abelian groups, Proc. Camb. Phil. Soc. **59**, № 1 (1963), 25—31.
[2] Locally inner and almost inner automorphisms, Arch. Math. **15**, № 1 (1964), 18—27.
[3] Outer automorphisms in nilpotent p-groups of class 2, Journ. of the London Math. Soc. **40**, p. 2, № 158 (1965), 268—276.

Л и в ч а к Я. Б.
[1] Локально разрешимая группа, не являющаяся RN^*-группой, Докл. АН СССР 125, № 2 (1959), 266—268.
[2] К теории обобщенно-разрешимых групп, Сиб. матем. журнал 1, № 4 (1960), 617—622.
Л и н д о н Р. (L i n d o n R.)
[1] Properties preserved under homomorphisms, Pacif. J. Math. 9, № 1 (1959), 143—154.
Л я п и н Е. С.
[1] Полугруппы, Физматгиз, 1960.
М а к л е й н Д. (M c L a i n D.)
[1] A characteristically-simple group, Proc. Camb. Phil. Soc. 50, № 4 (1954), 641—642.
[2] Local theorems in universal algebras, J. London Math. Soc. 34, № 2 (1959), 177—184.
[3] Remarks on the upper central series of a group, Proc. Glasgow Math. Assoc. 3, № 1 (1956), 38—44.
М а л ь ц е в А. И.
[1] Исследования по математической логике, Матем. сб. 1, № 3 (1936), 321—335.
[2] Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Уч. зап. Ивановск. пед. инст. 1, № 1 (1941), 3—9.
[3] Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем. сб. (нов. сер.) 8 (1940), 405—432.
[4] О представлении бесконечных алгебр, Матем. сб. 13 (1943), 263—286.
[5] О некоторых классах бесконечных разрешимых групп, Матем. сб. 28 (1951), 567—588.
[6] О группах конечного ранга, Матем. сб. 22 (1948), 351—352.
[7] Об одном классе однородных пространств, Изв. АН СССР, сер. матем. 13 (1949), 9—32.
[8] О разрешимых алгебрах Ли, Изв. АН СССР, сер. матем. 9 (1945), 329—356.
[9] Нильпотентные группы без кручения, Изв. АН СССР, сер. матем. 13 (1949), 201—212.
[10] Об одном классе алгебраических систем, Успехи матем. наук 8, № 1 (53), (1953), 165—171.
[11] О представлениях моделей, Докл. АН СССР 108 (1956), 27—29.
[12] Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями, Матем. сб. 26 (1950), 19—33.
[13] Об одном классе алгебраических систем, Успехи матем. наук 8, № 1 (53) (1953), 165—171.
[14] Группы и другие алгебраические системы, сб. «Математика, ее содержание, методы и значение», Изд-во АН СССР, 1956, 248—331.
[15] Модельные соответствия, Изв. АН СССР, сер. матем. 23, № 3 (1959), 313—336.
[16] О свободных разрешимых группах, Докл. АН СССР 130, № 3 (1960), 495—498.

[17] Об элементарных свойствах линейных групп, сб. «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, Сиб. отд. АН СССР, 1961, 110—132.
[18] Некоторые вопросы теории классов моделей, сб. «Труды 4-го Всесоюзного математического съезда», т. I, Изд-во АН СССР, 1963, 169—198.

Манн В. (Munn W.)
[1] On semigroup algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. **51**, № 1 (1955), 1—15.

Маранда И. (Maranda I.)
[1] On the equivalence of representations of finite groups by groups of automorphisms of modules over Dedekind rings, Canad. J. Math. **7**, № 4 (1955), 516—526.

Маурер И. (Maurer I.)
[1] Nehany megjegyzes a monomialis csoportokkal kapcsolatban, Kolozsvari egyet. közl. Termeszettud. sor. **2**, № 1—2 (1957), 39—50.
[2] Grupuri de permutări infinite, Gaz. mat. si fiz. **A7**, № 8 (1955), 400—408.

Маутнер Ф. (Mautner F.)
[1] An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory, Amer. J. Math. 68, № 3 (1946), 345—384.

Махони Р. (Mahoney R.)
[1] On Howarth endomorphisms, Doct. diss., Washington Univ., 1963.

Мерзляков Ю. И.
[1] К теории обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 29—36.
[2] О локально разрешимых группах конечного ранга, Алгебра и логика (семинар) **3**, № 2 (1964), 5—16.
[3] Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп, Алгебра и логика (семинар) **3**, № 4 (1964), 49—59.

Миллер Г. А. (Miller G. A.)
[1] On the multiple holomorph of a group, Math. Ann. 66 (1909), 133—142.

Милс В. (Mills W. H.)
[1] Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1951), 379—392.
[2] On the non-isomorphism of certain holomorphs, Trans. Amer. Math. Soc. **74**, № 3 (1953), 428—443.
[3] The automorphisms of the holomorph of a finite abelian group, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, № 1 (1957), 1—34.
[4] Decomposition of holomorphs, Pacif. J. Math. **11**, № 4 (1961), 1443—1446.

Митра А. (Mitra A.)
[1] A theorem on Engel groups, J. Indian Math. Soc. **25**, № 3—4 (1961), 155—161.

Мишина А. П.
[1] Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп, Вестн. Моск. ун-та, сер. матем.-мех., № 4 (1962), 39—43.

Мостовский А.
[1] Современное состояние исследований по основаниям математики, Успехи матем. наук **9**, № 3 (1954), 3—38.
Мостовский А. В. (Mostowsky A. W.)
[1] Nilpotent free groups, Fundam. math. **49**, № 3 (1961), 259—269.
[2] On automorphisms of relatively free groups, Fundam. math. **50**, № 4 (1962), 403—411.
Мохамед И. (Mohamed I.)
[1] On series of subgroups related to groups of automorphisms, Proc. London Math. Soc. **13**, № 52 (1963), 711—723.
[2] On the class of the stability group of a subgroup chain, J. London Math. Soc. **39**, № 1 (1964), 109—114.
Мурата К. (Murata K.)
[1] A subdirect representation of a group, J. of the Inst. of Polytechnics, Osaka **11**, № 2 (1960), Ser. A, 11—14.
Мягкова Н. Н.
[1] О группах конечного ранга, Изв. АН СССР, сер. матем. **13** (1949), 495—512.
Нейман Х. (Neumann H.)
[1] Near-rings connected with free groups, Proc. Intern. Congr. Math. **2** (1954), Amsterdam, 1954, 46—47.
[2] On varieties of groups and their associated near-rings, Math. Z. **65**, № 1 (1956), 36—69.
Нейман Б. (Neumann B. H.)
[1] Die Automorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. **107** (1932), 367—386.
[2] Identical relations in groups, Math. Ann. **114** (1937), 506—525.
[3] Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed, Arch. Math. **7**, № 1 (1956), 1—5.
[4] An embedding theorem for algebraic systems, Proc. London Math. Soc. **4**, № 14 (1954), 138—153.
Нейман Б., Нейман Х. (Neumann B. H., Neumann H.)
[1] Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. **34**, (1959), 465—479.
Нейман Б., Нейман Х., Нейман П. (Neumann B. H., Neumann H., Neumann P. M.)
[1] Wreath products and varieties of groups, Math. Z. **80**, № 1 (1862), 44—62.
Нейман П. (Neumann P. M.)
[1] On structure of standard wreath products of groups, Math. Z. **84**, № 4 (1964), 343—373.
Нильсен Я. (Nilsen J.)
[1] Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann. **91** (1924), 169—209.
Нискевич В. Л.
[1] О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем, Матем. сб. **8** (1940), 395—404.
Новиков П. С.
[1] Элементы математической логики, Физматгиз, 1959.

[2] О периодических группах, Докл. АН СССР **127** (1959), 749—752.

О р е О. (O r e O.)

[1] Theory of monomial groups, Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), 15—64.

П а т е р с о н Е. М. (P a t t e r s o n E. M.)

[1] On regular automorphisms of certain classes of rings, Quart. J. Math. **12**, № 46 (1961), 127—133.

П е р е м а н с В. (P e r e m a n s W.)

[1] Volledigheit van holomorfen, Rapp. Math. centrum, Nr. ZW-016, 1957, 1—7.

[2] Completeness of holomorphs, Proc. koninkl. nederl. akad. wet. **A60**, № 5 (1957), 608—619; Indagationes math. **19**, № 5 (1957), 608—619.

П и к к а р С. (P i c c a r d S.)

[1] Les groupes d'automorphismes associés a un système d'éléments générateurs d'un groupe, Actes. Soc. helv. sci. natur. **137** (1957), 54—56.

П л а т о н о в В. П.

[1] К теории алгебраических линейных групп, Докл. АН СССР **146**, № 5 (1962), 1025—1026.

[2] О разрешимых алгебраических линейных группах, Докл. АН БССР **7**, № 7 (1963), 439—442.

[3] Расщепляемые линейные группы, Докл. АН СССР **151**, № 2 (1963), 286—289.

[4] Разрешимые алгебраические группы, Докл. АН СССР **151**, № 1 (1963), 48—51.

[5] Периодические подгруппы алгебраических групп, Докл. АН СССР **153**, № 2 (1963), 270—272.

[6] Энгелевы элементы и радикал в *PI*-алгебрах и топологических группах, Докл. АН СССР **161**, № 2 (1965), 289—291.

П л о т к и н Б. И.

[1] О нильгруппах, Докл. АН СССР **94** (1954), 999—1001.

[2] О некоторых признаках локально нильпотентных групп, Успехи матем. наук **9**, № 3 (61) (1954), 181—188.

[3] Радикальные группы, Матем. сб. **37 (79)**, № 3 (1955), 507—526.

[4] Радикальные и полупростые группы, Труды Моск. матем. об-ва **6** (1957), 299—337.

[5] Радикал и нильэлементы в группах, Изв. высш. учебн. заведений, серия матем. **1** (1958).

[6] Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли, Успехи матем. наук **13**, № 6 (1958), 133—138.

[7] Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы, Успехи матем. наук **13**, № 4 (1958), 89—172.

[8] Нормальные делители, ограничивающие группу, Матем. сб. **53 (95)**, № 3 (1961), 344—352.

[9] Об одном радикале группы автоморфизмов, Докл. АН СССР **130**, № 5 (1960), 977—980.

[10] Локально стабильные группы автоморфизмов, Сиб. матем. журнал **2**, № 1 (1961), 100—114.

[11] О некоторых радикалах в группах автоморфизмов, Успехи матем. наук 17, № 4 (106) (1962), 165—171.
[12] Некоторые свойства автоморфизмов нильпотентных групп, Докл. АН СССР **137**, № 6 (1961), 1303—1306.
[13] Замечания о групповых парах, Матем. зап. Уральск. гос. ун-та, 1962.
[14] Радикалы в групповых парах, Докл. АН СССР **140**, № 5 (1961), 1019—1022.
[15] Äußere lokale Eigenschaften von Automorphismengruppen, Arch. der Math. **XIII** (1962), Basel—Stuttgart, 401—407.
[16] Радикалы, связанные с представлениями групп, Докл. АН СССР **144**, № 1 (1962), 52—55.
[17] Обобщенные стабильные и обобщенные нильпотентные группы, Сиб. матем. журнал **4**, № 6 (1963), 1389—1403.
[18] Некоторые вопросы общей теории представлений групп, Изв. АН СССР, серия матем., вып. 4 (1963).
[19] Ω-полугруппы, Ω-кольца и общие представления, Докл. АН СССР **149**, № 5 (1963), 1037—1040.
[20] О бесконечномерных линейных группах, Докл. АН СССР **153**, № 1 (1963), 42—45.
[21] Об одной теореме Цасенхауза, Сборник памяти Н. Г. Чеботарева, Казань, 1964, 67—74.

Плоткин Б. И., Вилядер В. Г.
[1] К теории локально стабильных групп автоморфизмов, Докл. АН СССР **134**, № 3 (1960), 529—532.

Плоткин Б. И., Кемхадзе Ш. С.
[1] Об одной схеме построения радикалов в группах, Сиб. матем. журнал **6**, № 5 (1965), 1197—1201.

Поваров Г. Н.
[1] О групповой инвариантности булевых функций, Сб. «Применения логики в науке и технике», Изд-во АН СССР, 1960, 263—341.

Райнер И. (Reiner I.)
[1] A new type of automorphism of the general linear group over a ring, Ann. Math. **66**, № 3 (1957), 461—466.

Рамсей Ф. П. (Ramsey F. P.)
[1] On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc., Ser. **2**, № 30 (1929), 338—384.

Рапапорт Е. (Rapaport E. S.)
[1] On free groups and their automorphisms, Acta math. **99**, № 1—2 (1958), 139—163.

Редеи Л. (Redei L.)
[1] Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, Acta math. Acad. sci. Hung. **5**, № 3—4 (1954), 169—175.

Рейнер О. (Reiner O.)
[1] On the direct decompositions of algebras, Spisy prirodoved. fak. univ. Brne **9** (1962), 449—457.

Ри Р. (Ree R.)
[1] The existence of outer automorphisms of some groups, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, № 6 (1956), 962—964.

[2] The existence of outer automorphisms of some groups, II, Proc. Amer. Math. Soc. 9, № 1 (1958), 105—109.

Риге Ж.

[1] Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа, Кибернетический сборник 7, ИЛ, 1963, 129—186.

Риордан Дж.

[1] Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, 1963.

Робинсон А. (Robinson A.)

[1] On the metamathematics of Algebra, Amsterdam, 1951.

Розеблад Дж. (Roseblade J.)

[1] The automorphism group of McLain's characteristically simple group, Math. Z. 82, № 4 (1963), 267—282.

Розенберг А. (Rosenberg A.)

[1] The structure of the infinite general linear group, Ann. Math. 68, № 2 (1958), 278—294.

Розенберг А., Зелинский Д. (Rosenberg A., Zelinsky D.)

[1] Galois theory of continuous transformation rings, Trans. Amer. Math. Soc. 79, № 2 (1955), 429—452.

[2] Automorphisms of separable algebras, Pacif. J. Math. 11, № 3 (1961), 1109—1117.

Сабидуси Г. (Sabidussi G.)

[1] Graphs with given group and given graph-theoretical properties, Canad. J. Math. 9, № 4 (1957), 515—525.

[2] Graphs with given infinite group, Monatsch. Math. 64, № 1 (1960), 64—67.

Седнева М. П.

[1] Некоторые вопросы о бесконечномерных линейных группах, Изв. АН Латв. ССР, сер. физ.-техн. наук, № 6 (1965), 59—62.

Селигмен Г. (Seligman G.)

[1] On automorphisms of Lie algebras of classical type, Trans. Amer. Math. Soc. 92, № 3 (1959), 430—448.

[2] On automorphisms of Lie algebras of classical type, II, Trans. Amer. Math. Soc. 94, № 3 (1960), 452—482.

[3] On automorphisms of Lie algebras of classical type, III, Trans. Amer. Math. Soc. 97, № 2 (1960), 286—316.

Сесекин Н. Ф.

[1] О локально нильпотентных группах без кручения, Матем. сб. 32, № 2 (1953), 407—442.

Симонян Л. А.

[1] Некоторые вопросы теории представлений алгебр Ли, Уч. зап. Латв. гос. ун-та им. П. Стучки 58 (1964), 5—20.

[2] О двух радикалах алгебр Ли, Докл. АН СССР 157, № 2 (1964), 281—283.

[3] Некоторые радикалы алгебр Ли, Сиб. матем. журнал 6, № 5 (1965), 1001—1107.

[4] О стабильных дифференцированиях алгебр Ли, Изв. АН Латв. ССР, сер. физ.-техн. наук, № 3 (1965), 67—70.

Скотт В. (Scott W. R.)

[1] On the order of the automorphism group of a finite group, Proc. Amer. Math. Soc. 5, № 1 (1954), 23—24.

С м и р н о в Д. М.
[1] О группах автоморфизмов разрешимых групп, Матем. сб. **32** (74), № 2 (1953), 365—384.
[2] Об одном классе бесконечных групп, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, физ.-мат. науки 5 (1954), 57—60.
[3] О двух классах разрешимых групп конечного ранга, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та **18** (1958), 67—74.
[4] О приведенно свободных мультиоператорных группах, Докл. АН СССР **150**, № 1 (1963), 44—47.
[5] К теории финитно аппроксимируемых групп, Укр. матем. журнал **15**, № 4 (1963), 453—457.
[6] Об обобщенно разрешимых группах и их групповых кольцах, Докл. АН СССР **155**, № 3 (1964), 535—537.
[7] Группы автоморфизмов групповых колец правоупорядочиваемых групп, Алгебра и логика **4**, № 1 (1965), 31—45.
С т е й н б е р г Р. (S t e i n b e r g R.)
[1] Automorphisms of finite linear groups, Canad. J. Math. **12**, № 4 (1960), 606—615.
[2] Automorphisms of classical Lie algebras, Pacif. J. Math. **11** (1961), 1119—1129.
С т р а з д и н ь И. Э.
[1] Группа переименований l-ичных функций, Изв. АН Латв. ССР, № 3 (1963), 70—77; № 7 (1964), 132.
[2] Симметрические l-ичные функции, Изв. АН Латв. ССР, № 12 (1962), 67—74.
С у п р у н е н к о Д. А.
[1] О матричных нильпотентных группах, Уч. зап. Белорусск. гос. ун-та, сер. физ.-мат. № 15 (1953), 3—6.
[2] О линейных разрешимых группах, Матем. сб. **41**, № 3 (1957), 317—332.
[3] Разрешимые и нильпотентные линейные группы, Изд-во Белорусск. ун-та, 1958.
[4] Две теоремы о матричных группах, Докл. АН БССР **8**, № 8 (1964), 491—494.
[5] О гомоморфизмах Минковского, Сборник памяти Н. Г. Чеботарева, Казань, 1964, 89—92.
[6] Об одном условии полной приводимости матричной группы, Изв. АН СССР, сер. матем. **27**, № 2 (1963), 435—438.
[7] Дополнение к статье «Ядро одного гомоморфизма», Докл. АН БССР 8, № 10 (1964), 621—622.
[8] О локально нильпотентных подгруппах бесконечной симметрической группы, Докл. АН СССР **167**, № 2 (1966), 302—305.
С у п р у н е н к о Д. А., Г а р а щ у к М. С.
[1] Линейные группы с условием Энгеля, Докл. АН БССР **6**, № 5 (1962), 277—280.
[2] Линейные группы с категорией, Докл. АН БССР 6, № 7 (1962), 411—414.
С у п р у н е н к о Д. А., П л а т о н о в В. П.
[1] Об одной теореме Шура, Докл. АН БССР **7**, № 8 (1963), 510—512.

Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И.
[1] Приводимые локально нильпотентные линейные группы, Изв. АН СССР, сер. матем. **24** (1960), 787—806.
Тайманов А. Д.
[1] Характеристики аксиоматизируемых классов моделей, Алгебра и логика (семинар) **1**, вып. 4 (1962), 5—32.
Такахаси М. (Takahasi M.)
[1] Group extensions and their splitting groups, J. Inst. Polytechn. Osaka, City Univ. A5, № 2 (1954), 81—85.
Тарский А. (Tarski A.)
[1] Contributions to the theory of models, I, II, Proc. Acad. van wetensch. **57**, № 5 (1954), 572—581, 582—588; III, там же **58**, № 1 (1955), 58—64.
Тибилетти М. (Tibiletti M.)
[1] Ampliamenti di automorfismi in prodotti di gruppi permutabili, Boll. Unione met. ital. **16**, № 4 (1961), 449—464.
Томпсон Дж. (Thompson J.)
[1] Finite groups with fixed-point free automorphisms of finite order, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1959), 578—581.
[2] Automorphisms of solvable groups, J. Algebra **1**, № 3 (1964), 259—267.
Фрайн Т., Морель А., Скотт Д. (Frayne T., Morel A., Scott D.)
[1] Reduced direct products, Fundam. Math. **51**, № 3 (1962), 195—228.
Фрёлих А. (Fröhlich A.)
[1] Distributively generated near-rings, I, Ideal theory, II, Representation theory, Proc. London Math. Soc. 8, № 29 (1958), 76—108.
[2] Distributively generated near-rings, II, Representation theory, Proc. London Math. Soc. 8, № 29 (1958), 95—108.
[3] The near-ring generated by the inner automorphisms of a finite simple groups, J. London Math. Soc. **33**, № 1 (1958), 95—107.
[4] On groups over a d. g. near-ring (1); some constructions and free R-groups, Quart. J. Math. **11**, № 43 (1960), 193—210.
Фридман Х. (Freedman H.)
[1] The automorphisms of countable primary reduced Abelian groups, Proc. London Math. Soc. **12**, № 45 (1962), 77—99.
Фробениус Г. и Шур И. (Frobenius G. und Schur I.)
[1] Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Berliner Berichte, 1906, 209—217.
Фукс Л. (Fuchs L.)
[1] Abelian groups, Budapest, 1958.
[2] On the automorphism group of abelian p-groups, Publs. math. **7**, № 1—4 (1960), 122—129.
[3] Частично упорядоченные алгебраические системы, ИЛ, 1965.
Фукс-Рабинович Д. И.
[1] О группах автоморфизмов свободных произведений, I, Матем. сб. 8 (1940), 269—276; II, Матем. сб. **9** (1941), 183—220.

Х а и м о Ф. (H a i m o F.)
[1] Automorphisms generated by a class of subnormal subgroups, Duke Math. J. 21, № 2 (1954), 349—353.
[2] Normal automorphisms and their fixed points, Trans. Amer. Math. Soc. 78, № 1 (1955), 150—167.
[3] Power-type endomorphisms of some class 2-groups, Pacif. J. Math. 5, № 2 (1955), 201—213.
Х а л е з о в Е. А.
[1] Автоморфизмы матричных полугрупп, Докл. АН СССР 96, № 2 (1954), 245—248.
[2] Автоморфизмы примитивных квазигрупп, Матем. сб. 53, № 3 (1961), 329—342.
Х а л л е т Дж., Г и р ш К. (H a l l e t t J., H i r s c h K.)
[1] Torsion-free groups, having finite automorphism group, Journ. of Algebra 2 (1965), 287—298.
Х а р в и Дж. (H a r v e y I.)
[1] Complete holomorphs Pacif. J. Math. 11, № 3 (1961), 961—970.
Х а р и с о н М. (H a r r i s o n M. A.)
[1] A census of finite automata, Univ. of California, Electronics Research Lab. (Berkeley, Calif.) Internal Technical Memorandum No TM-19, July 15 (1963), 24; Canad. J. Math. 16 (1964).
Х а т т о р и А. (H a t t o r i A.)
[1] Inner endomorphisms of an associative algebra, J. Math. Soc. Japan 6, № 1 (1954), 40—44.
Х е б р о н и П. (H e b r o n i P.)
[1] Über die inneren Automorphismen des abstrakten Differentialringes, Compositio math. 14, № 1 (1959), 77—82.
Х е й н е к е н Г. (H e i n e k e n H.)
[1] Eine Bemerkung über engelsche Elemente, Arch. Math. 11, № 5 (1960), 321.
[2] Engelsche Elementen der Länge drei, Illinois J. Math. 5, № 4 (1961), 681—707.
[3] Endomorphismenringe und engelsche Elemente, Arch. Math. 13, № 1—3 (1962), 29—37.
Х е л ь д Д. (H e l d D.)
[1] Engelsche Elemente endlicher Gruppen, Math. Ann. 149, № 3 (1963), 237—253.
[2] Engel conditions and direct decompositions into groups of coprime order, Illinois. J. Math. 8, № 4 (1964), 582—585.
[3] Closure properties and partial Engel conditions in groups, там же, 705—712.
[4] Nilpotenz- und Verstreutheitskriterien für artinsche Gruppen, Math. Z. 87 (1965), 49—61.
[5] Gruppen beschränkt Engelscher Automorphismen, Math. Ann. 162, № 1 (1965), 1—8.
Х е р е м а Н. (H e e r e m a N.)
[1] Sums of normal endomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 84, № 1 (1957), 137—143.
Х е р с т е й н И., А д н и Дж. (H e r s t e i n I., A d n e y J.)
[1] A note on the automorphism group of a finite group, Amer. Math. Monthly 59 (1952), 309—310.

Херстейн И., Рухте М. (Herstein I. N., Ruchte M. F.)
[1] Semi-automorphisms of groups, Proc. Amer. Math. Soc. 9, № 1 (1958), 145—150.
Хиггинс Ф. (Higgins P. J.)
[1] Groups with multiple operators, Proc. London Math. Soc. 6, № 23 (1956), 366—416.
[2] Determinants for automorphisms of Ω-groups, Proc. London Math. Soc. 11, № 44 (1961), 641—653.
[3] Algebras with a Scheme of Operators, Math. Nachrichten 27, № 1—2 (1963), 115—132.
Хигмен Г. (Higman G.)
[1] On infinite simple permutation groups, Publs. math. 3, № 3—4 (1954), 221—226.
[2] Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, J. London Math. Soc. 32, № 3 (1957), 321—334.
Хигмен Д. (Higman D. G.)
[1] Modules with a group of operators, Duke Math. J. 21, № 2 (1954), 369—376.
Хион Я. В.
[1] Ω-кольцоиды, Труды Моск. матем. об-ва (в печати).
Холл М. (Hall M.)
[1] Current studies on permutation groups, Proc. Symp. Pure Math. 1 (1959), 29—41.
[2] Теория групп, ИЛ, 1962.
Холл Ф. (Hall Ph.)
[1] On group of automorphisms, J. reine angew. Math. 182 (1940), 194—204.
[2] Some sufficient conditions for a group to be nilpotent, Illinois J. Math. 2, № 4B (1958), 787—801.
[3] On the finiteness of certain soluble groups, Proc. London Math. Soc. (3) 9 (1959), 595—622.
[4] The Frattini subgroups of finitely generated groups, Proc. London Math. Soc. 11, № 42 (1961), 327—352.
[5] Wreath powers and characteristically simple groups, Proc. Camb. Phil. Soc. 58, № 2 (1962), 170—184.
[6] On non-strictly simple groups, Proc. Camb. Phil. Soc. 59, № 3 (1963), 531—553.
Холл Ф., Кулатилака (Hall Ph., Kulatilaka)
[1] A property of locally finite groups, J. London Math. Soc. 39, № 2 (1964), 235—239.
Холл Ф., Хартли Б. (Hall Ph., Hartley B.)
[1] The stability group of a series of subgroups, Proc. London Math. Soc. 16, № 1 (1966), 1—39.
Холланд Ч. (Holland Ch.)
[1] The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set, Michigan Math. J. 10, № 4 (1963), 399—409.
Холмс Ч. (Holmes C. V.)
[1] Automorphisms of monomial groups, Pacif. J. Math. 11, № 2 (1961), 531—545.

Х о у г т о н Ч. (H o u g h t o n C. H.)
[1] On the automorphism groups of certain wreath products, Publs. math. 9, № 3—4 (1962), 307—313.
Х у Н а й - х а о (H s u N a i - c h a o)
[1] The group of automorphisms of the holomorph of a group, Pacif. J. Math. 11, № 3 (1961), 999—1012.
Х у к у х а р а М. (H u k u h a r a M.)
[1] Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, J. Fac. Sci. Tokyo, sec. 1, 7, № 2 (1954), 129—192.
Х у п п е р т Б. (H u p p e r t B.)
[1] Lineare auflösbare Gruppen, Math. Z. 67 (1957), 479—518.
Ц а п п а Г. (Z a p p a G.)
[1] Sugli automorfismi privi di coincidenze nei gruppifiniti, Boll. Unione math. ital. 12, № 2 (1957), 154—163.
[2] Sugli automorfismi uniformi nei gruppi di Hirsch, Ricerche math. 7, № 1 (1958), 3—13.
Ц а с е н х а у з Г. (Z a s s e n h a u s H.)
[1] Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Abh. aus dem Math. Sem. der Hans. Universität 12, H. 3—4 (1938), 289—312.
[2] Lehrbuch der Gruppentheorie, английский перевод с добавлениями, N. Y., 1958.
Ч а к а н ь Б.
[1] Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр, Acta scientiarum Math., Szeged XXV, F. 3—4 (1964), 202—209.
Ч а н В а н Х а о
[1] О полупростых классах групп, Сиб. матем. журнал 3, № 6 (1962), 943—949.
[2] О минимальном радикальном классе над классом абелевых групп, Докл. АН СССР 149, № 6 (1963), 1270—1273.
Ч а н г Б. (C h a n g B.)
[1] The automorphism group of the free group with two generators, Michigan Math. J. 7, № 1 (1960), 79—81.
Ч а н г К. (C h a n g C. C.)
[1] Groups which are automorphism groups of a simply ordered set, Notices of the Amer. Math. Soc. 5 (1958), 491.
Ч а н г К., Э р е н ф о й х т А. (C h a n g C. C., E h r e n f e u c h t A.)
[1] A characterization of abelian groups of automorphisms of a simply ordering relation, Fundam. math. 51, № 2 (1962), 141—147.
Ч а р и н В. С.
[1] К теории локально нильпотентных групп, Матем. сб. 29 (71), № 2 (1951), 433—454.
[2] Об условии минимальности для нормальных делителей локально разрешимых групп, Матем. сб. 33 (75), № 1 (1953), 27—36.
[3] О группах автоморфизмов некоторых классов разрешимых групп, Украинский матем. журнал 5, № 4 (1953), 363—369.
[4] О группах автоморфизмов нильпотентных групп, Укр. матем. журнал 6, № 3 (1954), 295—304.

[5] О разрешимых группах типа A_4, Матем. сб. **52**, № 3 (1960), 895—914.
[6] О разрешимых группах типа A_3, Матем. сб. **54**, № 4 (1961), 489—499.

Черников С. Н.
[1] О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем. сб. **28** (1951), 119—129.
[2] Условия конечности в общей теории групп, Успехи матем. наук **14**, № 5 (1959), 45—86.

Чехата Ч. (Chehata C. G.)
[1] Simultaneous extension of partial endomorphisms of groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2** (1954), 37—46.
[2] Commutative extension of partial automorphisms of groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. **1**, № 4 (1955), 170—181.
[3] Some results on partial automorphisms of groups, Proc. Math. and Phys. Soc. U. A. R. **24** (1960), 17—24.
[4] Extension of partial endomorphisms of abelian groups, Proc. Glasgow Math. Assoc. **6**, № 1 (1963), 44—48.

Шевалле К.
[1] Теория групп Ли (2, Алгебраические группы), ИЛ, 1958.

Шенкман Е. (Schenkman E.).
[1] A generalization of the central elements of a group, Pacif. J. Math. **3**, № 2 (1953), 501—504.
[2] The existence of outer automorphisms of some nilpotent groups of class 2, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 1 (1955), 6—11.
[3] On the structure of automorphism group of a nilpotent group, Port. math. **13**, № 1 (1954), 129—135.

Шик Ф. (Šik F.).
[1] Automorphismen geordneter Mengen, Časop. pěstov. mat. **83**, № 1 (1958), 1—22.

Ширшов А. И.
[1] О кольцах с тождественными соотношениями, Матем. сб. **43**, № 2 (1957), 277—283.
[2] О некоторых группах, близких к энгелевым, Алгебра и логика (семинар) **2**, № 5 (1963), 5—18.

Шмелькин А. Л.
[1] Одно свойство полупростых классов групп, Сиб. матем. журнал **3**, № 6 (1962), 950—951.
[2] Сплетения и многообразия групп, Докл. АН СССР **157**, № 5 (1964), 1063—1065.

Шмидт Е. Т. (Schmidt E. T.)
[1] Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Unteralgebrenverbänden, Acta Scient. math., **24**, № 3—4 (1963), 251—254.
[2] Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppe und Kongruenzverbänden, Acta Math. Budapest **15**, F. 1—2 (1964), 37—47.

Шода К. (Shoda K.)
[1] Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2** (1930), 25—50.

[2] Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann. **100** (1928), 674—686.

Шпейзер А. (Speiser A.)

[1] Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Basel—Stuttgart, 1937.

Шпехт В. (Specht W.)

[1] Gruppentheorie, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.

[2] Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen, Math. Z. **37** (1933), 321—341.

Шрейер И. и Улам С. (Schreier I. und Ulam S.)

[1] Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge, Studia Math. **4** (1933), 134—141.

[2] Über die Automorphismen der Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge, Fundam. Math. **28** (1937), 258—260.

Шулт Е. (Shult E. E.)

[1] Finite groups admitting Abelian fixed point free operator groups, Doct. diss., Univ. Illinois, 1964.

Шур Й. (Schur I.)

[1] Über Gruppen periodischer linearer Substitutionen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1911), 619—627.

Шэнь Гуан-юй

[1] Один класс простых подалгебр джекобсоновых алгебр и их автоморфизмы, Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсю), Acta scient. natur. Univ. pekinensis **3**, № 2 (1957).

Щукин К. К.

[1] О RI^*-разрешимом радикале групп, Докл. АН СССР **132**, № 3 (1960), 541—544.

[2] RI^*-разрешимый радикал группы, Матем. сб. **52** (94), № 4 (1960), 1021—1031.

[3] О локально разрешимом радикале одного класса групп, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **44** (1960), 95—99.

[4] Замечания о первичных группах, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **50** (1962), 9—11.

[5] К теории радикалов в группах, Сиб. матем. журнал **3**, № 6 (1962), 932—942.

Эванс Т. (Evans T.)

[1] Endomorphisms of abstract algebras, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A66, № 1 (1961—1962), 53—64.

Эренфойхт А., Мостовский А. (Ehrenfeucht A., Mostowski A.)

[1] Models of axiomatic theories admitting automorphisms, Fundam. math. **43**, № 1 (1956), 50—68.

Ян Ши-цзянь (Yien Sze-chien)

[1] A system of relations of unimodular matrices and automorphisms of unimodular group, Кэсюэ цзилу, Sci. Rec. **1**, № 1 (1957), 13—17.

[2] Linear groups over a commutative integral domain, Sci. Rec. **1**, № 5 (1957), 297—300.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелева A_1-группа 496
— A_2-группа 496
— A_3-группа 496
— A_4-группа 496
— A_5-группа 496
Абсолютно свободная Ω-пара 92
Абстрактные свойства алгебр (универсальных) 20
Автоморфизм алгебры (универсальной) 21
— группы внешний 404
— — локально внутренний 401
— — нормальный 404
— — регулярный 310
— — сильно локально внутренний 401
Автоэпиморфизм 221
Алгебра универсальная 17
— — абсолютно свободная 29
— — коммутативная 32
— — локально нетерова 19
— — нетерова 19
— — однородная 22
— — приведенная свободная 31
— — простая 27
— — свободная примитивного класса 31
— — характеристически простая 27
Алгебраическая операция нульарная 18
— — n-арная 17
Аннулятор нормальной системы Ω-группы 224
α-радикал (радикал представления) 178
α-радикал группы 362

Башня 415

Верхний Y-центр Ω-группы 212
Внешне алгебраически элемент 149
— нильпотентный элемент 210
— нильэлемент 210

Голоморф 338
— относительный 338
Гомоморфизм алгебры универсальной 20
— алгебраической системы 60
— пары 86
— сильный алгебраической системы 61
— — пары 86
Группа автоморфизмов импримитивная прямого разложения 235
— — полная 554
— алгебраическая 360
— — матричная 303
— беровская 353
— внешне локально нильпотентная 445
— — разрешимая 220
— внешних автоморфизмов 404
— квазистабильная относительно Ω-группы 207
— квазифинитно стабильная относительно Ω-группы 207
— локально конечномерная линейная 264
— — ограниченная 360
— — относительно конечная 144
— — — нильпотентная 145
— — — разрешимая 145
— — стабильная 93, 178
— мономиальная 102

Группа наднильпотентная 353
— относительно конечная 144
— — нильпотентная 145
— — периодическая 144
— — разрешимая 145
— полициклическая (S-группа Гирша) 147
— полная линейная модуля 246
— — мономиальная 102
— — симметрическая 21
— полупростая 364
— — линейная 294
— радикальная 366
— слабо стабильная относительно Ω-группы 178
— совершенная 414
— стабильная относительно Ω-группы 178
— финитно стабильная относительно Ω-группы 200
— фиттингова 359
— энгелева 387
— F-полупростая 366
G-характеристичность (относительная характеристичность) 106
Г-композиционный фактор Ω-группы 169
Г-нормализатор 85
Г-централизатор 85
Г-цоколь Ω-группы 192

Действующая группа 83
Дистрибутивность умножения (левая, правая) в Ω-полугруппе 33
Допустимая (относительно действующей группы) конгруэнция 87

Идеал Ω-группы 38
— — допустимый относительно Ω-почти кольца 161
— — характеристический 53
— — центральный 50
Изоморфизм алгебр 20
— алгебраических систем 61
— пар 86
Изоморфные алгебры 20
Индекс конечный линейный 290

Квазикольцо 41
Квазистабильность 207
Квази-θ-пара 93
Квазиэндоморфизмы алгебр 34
Класс абстрактный алгебр 21
— двойственно радикальный 55
— минимальный радикальный 359
— примитивный алгебр 30
— радикальный 53
— строго радикальный 53
Коммутант алгебры 33
— взаимный двух Ω-подгрупп 46
— Ω-группы 45
— сильный Ω-группы 45
Композит набора бинарных отношений 25
— — конгруэнций 24
Компонента однородная вполне приводимой Ω-группы 49
Конгруэнция алгебры 23
— — вполне характеристическая 27
— — инвариантная относительно автоморфизма 26
— — — — эндоморфизма 26
— — характеристическая 27
— заданного представления Ω-полугруппы относительно Ω-алгебры 154
Корадикал 55

Линейная группа 247
— — расщепляемая 309
— Ω-алгебра 300
Локально θ-пара 93
— θ-элемент ($L\theta$-элемент) 137
LN_1-радикал группы 352
LS_1-радикал группы 352

Матрица квазитреугольная 268
— обобщенная 240
— треугольная 260
Мероморфизм 221

Многообразие алгебраическое 302
Множество базисное 130
— главное основное модели 120
— нильпотентное элементов действующей группы 209
— основное алгебраической системы 59
— — алгебры 18
Модель 59
— многоосно́вная 79
M, N-матрица 250

Неприводимость представления 176
— — сильная 176
Нижний W-ряд 218
Нильавтоморфизм Ω-группы 210
Нильгруппа 387
— внешняя 446
Нильмножество элементов действующего Ω-почти кольца 210
— — действующей группы 209
Нильпотентное множество элементов действующего Ω-почти кольца 210
— — — действующей группы 209
Нильэндоморфизм Ω-группы 224
Нормальное представление группы относительно Ω-группы 176
— — Ω-почти кольца относительно Ω-группы 176
Нормальный вид формулы УИП 75
— делитель, ограничивающий группы 343
— —, сильно ограничивающий группы 373

Область действия 83
Ограниченное подмножество (действующей группы) 149
Однородное пространство 93
Орбита 84
Основные операции алгебры 18
— предикаты алгебраической системы 59
Относительная π-группа 144
Относительная θ-пара 93
— характеристичность 106
Относительно характеристическая (Г-характеристическая) подсистема алгебраической системы 91
Отношение n-арное (n-местное) 59
Ω-группа (мультиоператорная группа) 37
— абелева 45
— абсолютно простая 44
— без центра 50
— вполне приводимая 47
— коммутативная 45
— локально финитарная 216
— нильпотентная 46
— простая 44
— разрешимая 46
— строго простая 44
— финитарная 216
Ω-квазикольцо 42
— нормальное 184
— правильное 184
Ω-кольцо 43
Ω-модуль (обобщенный модуль) 153
Ω-подгруппа 38
Ω-подкольцо аннуляторное 224
— внешне локально нильпотентное 229
— локально финитно аннуляторное 228
— слабо аннуляторное 224
— финитно аннуляторное 228
Ω-полугруппа 33
— групповая 158
— — приведенная (в данном классе) 159
— дистрибутивная 34
— локально ограниченная 164
— полугрупповая 158
Ω-почти кольцо 42
— — локально сильно разрешимое 230
Ω-пространство 300

Пара 83
— алгебраическая 149

Пара внутренняя 335
— групповая 335
— квазистабильная 207
— линейная 247
— локально ограниченная 149
— — стабильная 93, 178
— — финитная 265
— — финитно стабильная 93, 200
— правильная 172
— псевдостабильная 588, 511
— W-разрешимость 219
— регулярная 94
— свободная чистая 93
— сильно локально ограниченная 264
— скалярная 522
— слабо стабильная 208, 178
— стабильная 208, 178
— транзитивная 93
— треугольная 522
— финитно стабильная 200
— чистая 83
Пересечение эквивалентностей 24
Подалгебра 18
— вполне характеристическая 22
— сильно характеристическая 22
— характеристическая 22
Подгруппа достижимая 345
— локально достижимая 348
— — субинвариантная 347
— субинвариантная 345
Подмодель 60
Подобные элементы алгебраической системы 62
Подпара 89
Подсистема алгебраической системы 59
Подстановка 21
— вполне бесконечная 321
— m-бесконечная 321
Почти кольцо 39
— — мультиоператорное 42
Предикат n-местный 58
Представление внутреннее 335
— группы абсолютно неприводимое относительно векторного пространства 288
Представление группы автоморфизмами алгебраической системы 82
— — (Ω-почти кольца) вполне приводимое 188
— — G-инвариантное 479
— — разложимое 187
— линейное 247
— Ω-полугруппы локально ограниченное относительно Ω-алгебры 163
— — строгое относительно Ω-алгебры 154
— присоединенное 249
Преобразование множества 21
Присоединенное умножение 249
Проекция группы относительно алгебраической системы 83
Произведение полное прямое алгебраических систем 68
— приведенное (относительно фильтра) моделей 71
Прямое разложение Ω-групп 46
Псевдостабильная действующая группа 511
PJ-группа 293
p-элемент действующей группы 144
π-элемент действующей группы 144

Радикал группы Бера 353
— — вполне приводимый 363
— Джекобсона Ω-почти кольца 184
— — локально конечный 352
— — — нетеров 349
— — — нильпотентный 350
— — наднильпотентный 353
— квазистабильный (β-радикал) 208
— локально стабильный (β^*-радикал) 485
— — финитно стабильный (γ-радикал) 201
— представления группы 178
— — Ω-почти кольца 180
Радикальное нормально наследственное теоретико-групповое свойство 346

Разрешимая A_1-группа 497
— A_2-группа 497
— A_3-группа 497
— A_4-группа 497
— A_5-группа 497
Ранг специальной группы 494
Расширение гиперцентральное 375
— центральное 374
Ряд верхний $\mathfrak{R}$-радикальный 53
— — стабильный 211
— — цокольный 192
— — ядерный 221
— возрастающий нормальный 44
— нижний аннуляторный 225
— — Г-стабильный 200
— убывающий нормальный 44
R-группа 458
RN-пара 169
RN^*-пара 169
$\overline{RN}$-пара 169
$\mathfrak{R}$-радикал Ω-группы 53
— — верхний 53
— — строгий 53
RN^*-радикал группы 352

Символы операций 29
Система алгебраическая 59
— — линейная 300
— аннуляторная относительно Ω-подкольца 224
— двойная локальная подпар пары 92
— инвариантная в Ω-группе 44
— квазиоператоров 521
— композиционная в Ω-группе 44
— локальная подалгебр 19
— — подпар пары 92
— локально совместная формул УИП 73
— нормальная в Ω-группе 44
— полная в Ω-группе 43
— разрешимая в Ω-группе 46
— сильно разрешимая в Ω-группе 44
— совместная формул УИП 67
— стабильная относительно действующей группы 178
Система W-треугольная (разрешимая) 219
— центральная в Ω-группе 46
Смежный класс 23
Содержательное истолкование языка УИП на модели 65
Сплетение групп 101
— дискретное 101
— полное 101
— пар 102
Сумма дискретная прямая алгебр 28
— — — Ω-групп 47
— подпрямая алгебр 28
— полная прямая алгебр 28
— — — пар 99
— полуполная (слева, справа) пар 99
S-группа Гирша (полициклическая группа) 147
Σ-замыкание 84
Σ-центр 85

Тождественное соотношение в алгебре 30
Точное представление группы 83
Траектория 84
$\tilde{\theta}$-группа 136
θ-радикал 106
θ-элемент 137

Ультрапроизведение 71
Ультрафильтр 69
W-группа 363
W_0-группа 557
y-свойство 375
y'-свойство 375

Фактор-алгебра 24
Фактор-множество 23
Фактор-пара 87
Фильтр 68
— главный 69
Формула УИП 64
— — замкнутая 65
Формульный предикат 66
— элемент модели 67

Характер представления 282
x-свойство 375
x'-свойство 375

Центр Ω-группы 50
Централизатор строгого модуля 155
Центрированная система подмножеств 69
Циклическое представление группы относительно алгебры 158
Цоколь Ω-группы 49
Z-пара 169
ZA-пара 169

Эквивалентность на множестве 23
— пар 86
Элемент группы достижимый 346
— — локально достижимый 346
— — — субинвариантный 346
— — обобщенный центральный 388
— — сильный обобщенный центральный 388
— — субинвариантный 346
— действующей группы алгебраический 149
— — — ограниченный 149
Элемент действующей группы почти периодический 143
— — — смешанный 143
— — — финитно стабильный 204
— — — чистый 143
— — — μ-ограниченный 144
— — — ω-ограниченный 144
— дистрибутивный Ω-полугруппы 34
— индивидуальный алгебраической системы 62
— линейной группы унипотентный 290
— области действия гиперцентральный 491
— Ω-полугруппы строго дистрибутивный 154
— Ω-почти кольца внешний квазирегулярный 182
Элиминация кванторов существования 76
Эндоморфизм алгебры 21
— векторного пространства локально алгебраический 310
— группы центральный 404
— линейной алгебры расщепляемый 309
— Ω-группы нормальный 162
— почти периодический 222
Эпиморфизм 20

Ядро представления 83

Борис Исаакович Плоткин

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М., 1966 г., 604 стр.

Редактор *Г. В. Дорофеев*
Техн. редактор *Л. А. Пыжова*
Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 30/VI 1966 г. Подписано к печати 22/IX 1966 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 18,875. Условн. печ. л. 31,71.
Уч.-изд. л. 30,62.
Тираж 6000. Т-12738. Цена книги 2 р. 08 к. Заказ 1083.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

1-я типография изд. «Наука»
Ленинград, В-34, 9-я линия, д. 12